

## 增强耦合的 TORA 系统镇定控制方法设计

武宪青, 欧县华, 何熊熊

(浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310023)

**摘要:** 针对欠驱动 TORA 系统, 设计一种镇定控制器和增强型耦合控制器. 根据 TORA 系统的动力学模型, 分析旋转小球与平移振荡器之间的耦合关系和系统的无源性. 构造一个新型的 Lyapunov 函数, 并得到一种耦合镇定控制器. 采用 Lyapunov 方法和 LaSalle 不变性原理证明了闭环系统的稳定性. 最后, 通过改进所设计的控制器得到一种增强型耦合控制器. 仿真结果验证了所提出控制器的有效性和优越性.

**关键词:** 欠驱动 TORA 系统; 耗散性分析; Lyapunov 方法; LaSalle 不变性原理

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Enhanced coupling stabilization controller design for TORA systems

WU Xian-qing, OU Xian-hua, HE Xiong-xiong

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China. Correspondent: HE Xiong-xiong, E-mail: hxx@zjut.edu.cn)

**Abstract:** A stabilization control method and an enhanced coupling control method are proposed for the translation oscillators with a rotating actuator(TORA) system. Based on the dynamic model of TORA systems, the coupling relation between the eccentric rotational proof mass and the translational oscillator is analyzed, and the passivity of the TORA system is analyzed as well. Then, an energy storage function is constructed and a coupling control method is proposed. The stability of the closed-loop system is proven by using Lyapunov techniques and LaSalle's invariance theorem, and an improved coupling control method is proposed by modifying the designed method. Simulation results show the effectiveness and superior performance of the proposed methods.

**Keywords:** underactuated translation oscillators with a rotating actuator system; dissipativity analysis; Lyapunov method; LaSalle's invariance theorem

### 0 引言

欠驱动系统是指被控状态量个数大于控制量维数的一类系统, 通常欠驱动系统需要用较少的控制输入实现对更多状态量的控制. 鉴于此原因, 对欠驱动系统的控制器设计难度较大, 非常具有挑战性, 一直以来是非常受关注的问题<sup>[1-6]</sup>. 具有旋转激励的平移振荡器(TORA)是一种典型的非线性欠驱动系统, 它原先是双自旋航天器的简化模型, 现作为一种非线性基准系统, 常被用于分析、设计非线性控制器以及检验非线性控制器的性能.

针对 TORA 系统的控制器设计, 目前已有很多学者进行了深入研究<sup>[7-15]</sup>. Jankovic 等<sup>[8]</sup>提出了数种基于级联和无源性理论的非线性控制器, 实现了对

TORA 系统的镇定控制. Alley<sup>[9]</sup>在此基础上设计了一种控制增益选择方法, 使得 TORA 系统类似于传统的线性动态吸收器, 系统能量能够以最大衰减速率减小. Nazrulla 等<sup>[10]</sup>将滑模控制与扩展高增益观测器结合在一起, 提出了一种非线性输出反馈控制策略, 得到了良好的暂态性能和鲁棒性. 此外, 基于能量的控制方法<sup>[11-12]</sup>、基于无源性的控制方法<sup>[13]</sup>和其他控制方法<sup>[14-15]</sup>也常用于控制 TORA 系统.

鉴于已有的大部分控制方法没有充分利用转动球与小车运动的耦合关系, 基于耗散性理论, 本文研究了 TORA 系统的镇定控制问题, 得到了一种耦合镇定控制器和一种增强型耦合控制器, 提高了系统的暂态性能. 首先, 充分考虑了 TORA 系统可驱动的偏

收稿日期: 2014-04-27; 修回日期: 2014-06-12.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61473262); 国家科技支撑计划项目(2013BAF07B03).

作者简介: 武宪青(1987-), 男, 博士生, 从事欠驱动桥式吊车系统控制的研究; 何熊熊(1965-), 男, 教授, 博士生导师, 从事重复学习控制等研究.

心旋转小球与不可驱动的平移振荡小车之间的耦合关系,利用它们之间的耦合关系,通过向已有能量函数中加入耦合项,增加闭环系统的阻尼,构造了新型的Lyapunov函数.根据构造的Lyapunov函数设计了一种耦合镇定控制器,实现了同时对旋转小球与平移振荡小车的镇定控制.为了得到更好的控制性能,对所设计的耦合控制器进行改进,得到了一种增强型的镇定控制器.数值仿真结果表明,所提出方法的控制性能优于已有的控制方法,不仅提高了系统的暂态性能,而且具有很好的鲁棒性,对实际应用具有重要的意义.

## 1 动力学模型

模型已知的TORA系统如图1所示,该系统由可驱动的小球和一个与弹簧连接的移动小车组成,小球在电机驱动力的作用下可在竖直的平面内转动,系统动力学模型<sup>[7]</sup>表示为

$$(M+m)\ddot{x} + mr\ddot{\theta}\cos\theta - mr\dot{\theta}^2\sin\theta + kx = 0, \quad (1)$$

$$mr\ddot{x}\cos\theta + (mr^2 + J)\ddot{\theta} + mgr\sin\theta = \tau. \quad (2)$$

其中:  $M$  为小车质量;  $m$  为转动小球的质量;  $r$  为转动半径;  $k$  为弹簧的劲度系数;  $J$  为小球关于其质心的转动惯量;  $g$  为因重力而产生的加速度;  $x(t)$  和  $\theta(t)$  分别为小车距离初始位置的位移和小球逆时针转离竖直向下方向的角度,它们是整个系统的状态量;  $\tau(t)$  为作用在偏心旋转小球上的输入转矩,为系统的唯一控制输入量.由此可以看出, TORA 系统是一个典型的欠驱动机电系统.对式(1)和(2)整理可得

$$\ddot{x} = -\frac{mr\cos\theta\tau}{m(\theta)} + \frac{m^2r^2g\sin\theta\cos\theta}{m(\theta)} - \frac{(mr^2 + J)\zeta(x, \theta, \dot{\theta})}{m(\theta)}, \quad (3)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)\tau}{m(\theta)} + \frac{mr\cos\theta\zeta(x, \theta, \dot{\theta})}{m(\theta)} - \frac{(M+m)mgr\sin\theta}{m(\theta)}, \quad (4)$$

其中  $m(\theta)$ 、 $\zeta(x, \theta, \dot{\theta})$  分别代表如下的辅助函数:

$$m(\theta) = Mmr^2 + JM + Jm + m^2r^2\sin^2\theta,$$

$$\zeta(x, \theta, \dot{\theta}) = kx - mr\dot{\theta}^2\sin\theta.$$

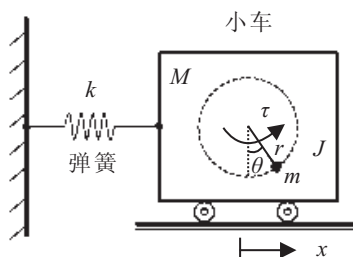


图1 TORA系统结构

为方便控制器的设计,将系统动力学模型(1)和(2)化为如下紧凑的矩阵形式:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}. \quad (5)$$

其中

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M+m & mr\cos\theta \\ mr\cos\theta & mr^2+J \end{bmatrix},$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & -mr\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = [x \ \theta]^T,$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = [kx \ mgr\sin\theta]^T, \quad \mathbf{u} = [0 \ \tau]^T.$$

显然,  $M(\mathbf{q})$  为正定对称矩阵,且对于  $\dot{M}(\mathbf{q})$  和  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  恒有

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

## 2 耗散理论分析

系统的耗散性与系统的稳定性之间有着紧密的联系,本节将对TORA系统的耗散性进行分析.

对于式(5)所描述的TORA模型,系统的总能量为

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}}_{\text{S.K.E}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2 - mgr\cos\theta}_{\text{S.P.E}}. \quad (6)$$

其中: S.K.E代表系统的动能, S.P.E代表系统的势能.对式(6)两边关于时间求导,并利用式(5)进行简化后得到

$$\dot{E} = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \dot{\theta}\tau. \quad (7)$$

对式(7)两边关于时间进行积分可得

$$E(t) - E(0) = \int_0^t \dot{\theta}(\nu)\tau(\nu)d\nu. \quad (8)$$

由式(8)可见, TORA系统(5)是以  $\tau(t)$  为输入、 $\dot{\theta}(t)$  为输出的无源耗散系统<sup>[16]</sup>,该性质是随后控制器设计的基础.

由式(6)和(7)可知,对于

$$\tau(t) = 0, \quad \theta(t) \in (-\pi, \pi],$$

系统(5)具有两个平衡点(一个不稳定平衡点和一个稳定平衡点),本文的控制目标是将系统状态量调节至系统的稳定平衡点处,即

$$[x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (9)$$

## 3 基于耗散理论的控制器设计

本文的控制目标是针对TORA系统,设计出耦合的非线性控制器,达到同时控制偏心旋转球和平移振荡小车的目的.

### 3.1 动能耦合控制器设计

在已有系统总能量(6)的基础上,为实现同时镇定旋转小球与平移小车的目的,利用两者之间的耦合

关系, 向系统的能量函数中加入耦合项, 以增加闭环系统的阻尼, 构造如下正定函数:

$$V(t) = k_E(E + mgr) + \frac{1}{2} \frac{k_v m(\theta) \dot{\theta}^2}{M + m} + \frac{1}{2} k_\theta \theta^2, \quad (10)$$

其中  $k_E, k_v, k_\theta \in \mathbf{R}^+$  为随后定义的控制增益. 对式(10)两边关于时间求导, 并利用式(3)~(7)进行整理后得到

$$\dot{V}(t) = \dot{\theta}[(k_E + k_v)\tau + k_\theta \theta + \varphi(t)], \quad (11)$$

其中

$$\varphi(t) = k_v \frac{k_x m r \cos \theta}{M + m} - k_v mgr \sin \theta. \quad (12)$$

为实现预定的控制目标, 需设计合适的控制器  $\tau(t)$  使得其能有效补偿动态特性  $k_\theta \theta(t)$  和非线性函数  $\varphi(t)$ , 且需满足  $\dot{V}(t) \leq 0$ , 使得闭环系统在平衡点处渐近稳定.

根据上述分析, 设计如下控制器:

$$\tau = \frac{-k_\theta \theta - k_\omega \dot{\theta} - \varphi(t)}{k_E + k_v}, \quad (13)$$

其中  $k_E, k_v, k_\omega, k_\theta \in \mathbf{R}^+$  为控制增益.

### 3.2 闭环系统的稳定性分析

本节对闭环系统平衡点的稳定性进行严格分析. 为证明闭环系统在平衡点处的渐近稳定性, 提出如下定理并给以严格的数学分析证明.

**定理1** 对于TORA系统(5), 采用耦合控制器(13)能够使闭环系统从任意初始位置渐近收敛至稳定平衡点, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) \quad \dot{x}(t) \quad \theta(t) \quad \dot{\theta}(t)]^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (14)$$

**证明** 将耦合控制器(13)代入  $\dot{V}(t)$  的表达式后, 可将式(11)改写为

$$\dot{V}(t) = -k_\omega \dot{\theta}^2. \quad (15)$$

显然,  $\dot{V}(t)$  是负半定的,  $V(t) \in \mathcal{L}_\infty$  单调递减, 故闭环系统是Lyapunov稳定的. 结合式(6)和(10)可推知闭环系统的所有状态信号均有界, 即

$$x(t), \dot{x}(t), \theta(t), \dot{\theta}(t) \in \mathcal{L}_\infty, \quad (16)$$

进而可由式(13)推知  $\tau(t) \in \mathcal{L}_\infty$ .

为完成定理的证明, 定义不变集

$$\Gamma = \{(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) \mid \dot{V}(t) = 0\}. \quad (17)$$

由式(15)可知, 在不变集  $\Gamma$  中, 有

$$\dot{\theta} = 0, \quad (18)$$

因此可得出在不变集  $\Gamma$  中, 有

$$\theta = c, \quad \ddot{\theta} = 0, \quad (19)$$

其中  $c \in \mathbf{R}$  为常数. 为确定在不变集中  $\dot{x}(t)$  的值, 分两种情形进行分析.

情形1: 在  $\Gamma$  中,  $\dot{x}(t) \equiv 0$ , 则  $x(t)$  为常数,  $\dot{x}(t) = 0$ . 结合式(1)、(18)和(19)可知  $x(t) = 0$ , 将控制器(13)代入式(2)并整理得

$$-k_\theta \theta = k_E mgr \sin \theta. \quad (20)$$

因此, 对于  $\theta \in (-\pi, \pi]$ , 式(20)有唯一解  $\theta(t) = 0$ .

情形2: 在  $\Gamma$  中,  $\dot{x}(t)$  不恒等于零, 即在  $\Gamma$  中至少有一点使得  $\dot{x}(t^*) \neq 0$ . 因为  $\ddot{x}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ , 所以  $\dot{x}(t)$  连续, 存在一个  $\dot{x}(t^*)$  的邻域  $S_{\dot{x}}$ , 使得在邻域  $S_{\dot{x}}$  中, 有

$$\dot{x}(t) \neq 0. \quad (21)$$

在邻域  $S_{\dot{x}}$  中进行分析, 将控制器(13)代入式(2), 并结合式(1)、(18)和(19)进行整理化简可得

$$k_E k_x m r \cos \theta = (M + m)(k_\theta \theta + k_E mgr \sin \theta). \quad (22)$$

由式(19)可知,  $\theta = c$ , 进一步推知  $x(t)$  为常数,  $\dot{x}(t) = 0$ . 与假设在邻域  $S_{\dot{x}}$  中存在某点  $\dot{x}(t^*) \neq 0$  矛盾, 故假设不成立.

综合上述分析可知, 不变集  $\Gamma$  中仅包含稳定平衡点

$$[x(t) \quad \dot{x}(t) \quad \theta(t) \quad \dot{\theta}(t)]^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

由LaSalle不变性原理<sup>[16]</sup>可知, 系统状态在耦合控制器(13)的作用下随时间推移渐近收敛到稳定平衡点处.  $\square$

### 3.3 增强型耦合控制器

第3.2节已经给出耦合控制器(13)的设计过程, 并证明了其收敛性. 为了进一步提高该控制器的控制性能, 本文在耦合控制器中的微分项前引入包含振荡小车位移的元素  $[k_p x^2(t) + 1]$ , 从而得到如下增强型耦合控制器:

$$\tau = \frac{-k_\theta \theta - k_\omega (k_p x^2 + 1) \dot{\theta} - \varphi(t)}{k_E + k_v}. \quad (23)$$

其中:  $\varphi(t)$  为式(12)所定义的辅助函数;  $k_p \in \mathbf{R}^+$  为正的增益. 与控制器(13)相比, 该增强型耦合控制器可以通过微分预测环节来限制旋转小球的摆幅, 增强了旋转小球与振荡小车之间的耦合关系, 随后的仿真结果也证实了这一特性.

**定理2** 对于TORA系统(5), 在增强型耦合控制器(23)的作用下, 系统状态可以从任意初始位置渐近收敛至稳定平衡点, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) \quad \dot{x}(t) \quad \theta(t) \quad \dot{\theta}(t)]^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (24)$$

定理2的证明类似于定理1, 篇幅所限, 此略.

## 4 仿真分析

为验证所提出方法的有效性, 给出一系列数值仿真结果. 具体过程分两组测试进行验证, 分别进行对

比测试和鲁棒性测试. 仿真过程中, TORA 系统的参数选自文献 [7] 中实验平台的参数, 具体如下:

$$M = 1.3608 \text{ kg}, m = 0.096 \text{ kg},$$

$$k = 186.3 \text{ N/m}, r = 0.0592 \text{ m},$$

$$J = 0.0002175 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

选取文献 [8] 所设计的控制器作为对比, 3 种控制器的控制增益如表 1 所示.

表 1 控制增益

控制器	$k_\theta$	$k_\omega$	$k_E$	$k_v$	$k_p$
文献 [8] 方法	0.01	0.0014	NA	NA	NA
本文方法 (式 (13))	5.24	0.8	360	10	NA
本文方法 (式 (23))	5.24	0.8	360	10	400

#### 4.1 对比测试

系统的初始状态为

$$[x(0) \dot{x}(0) \theta(0) \dot{\theta}(0)]^T = [0.04 \text{ m } 0 \text{ } 0 \text{ } 0]^T.$$

图 2~图 4 分别为文献 [8] 方法、本文方法 (式 (13)) 和本文方法 (式 (23)) 对比测试的仿真结果.

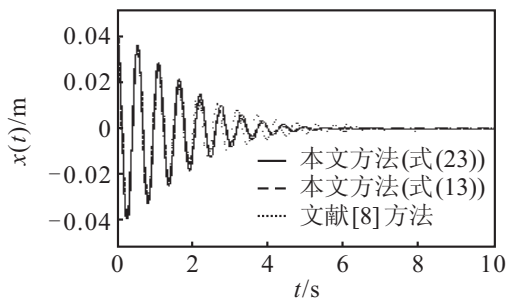


图 2 平移振荡小车位移

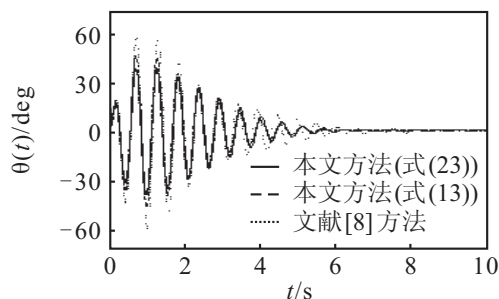


图 3 旋转小球摆角

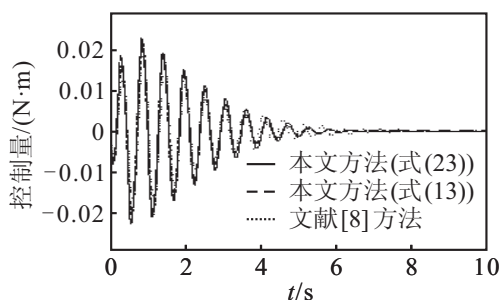


图 4 控制量

由仿真结果可见, 在 3 种方法的作用下, 系统最终到达了稳定状态. 本文方法能取得更优越的暂态性能, 而且偏心旋转球的摆幅和平移振荡小车的最大位移均小于文献 [8] 方法. 此外, 在增强型耦合控制器的作用下, 旋转小球的最大摆幅小于耦合控制器作用下的摆幅, 与理论分析基本一致. 仿真结果进一步表明了所提出方法的可行性和有效性.

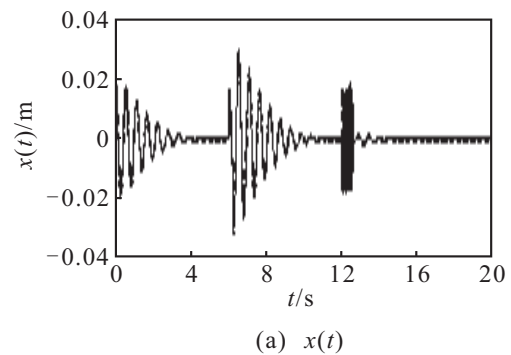
#### 4.2 鲁棒性测试

为进一步测试本文所提方法的鲁棒性, 在控制过程中添加不同类型的干扰, 具体而言, 系统的初始状态设为

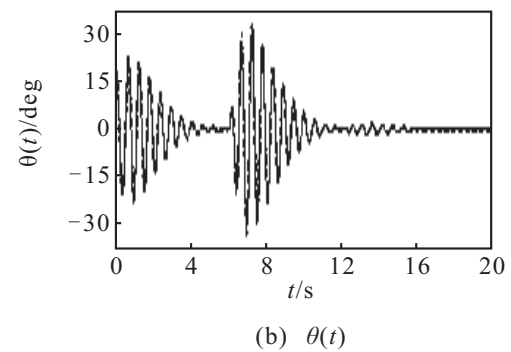
$$[x(0) \dot{x}(0) \theta(0) \dot{\theta}(0)]^T = [0.02 \text{ m } 0 \text{ } 20^\circ \text{ } 0]^T.$$

在 6~6.2 s 之间加入脉冲干扰, 在 12~12.5 s 之间加入随机干扰, 其幅值均为 1.

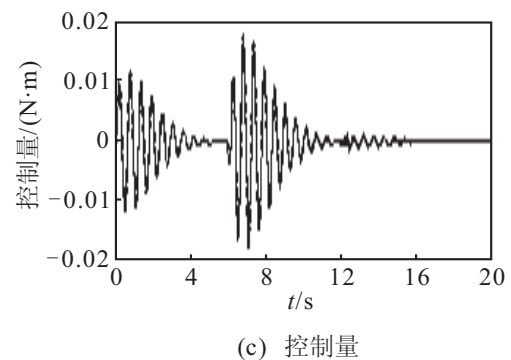
图 5 给出了鲁棒性测试结果. 结果显示, 耦合控制器 (式 (13)) 和增强型耦合控制器 (式 (23)) 均可快速消除并抑制这些干扰, 且增强型耦合控制器 (式 (23))



(a)  $x(t)$



(b)  $\theta(t)$



(c) 控制量

图 5 鲁棒性测试

的控制效果与耦合控制器(式(13))相比有所提高, 进一步验证了理论分析的准确性, 结果同样表明了所提出方法具有较好的鲁棒性。

## 5 结 论

本文针对欠驱动TORA系统, 充分考虑了TORA系统可驱动旋转小球与不可驱动小车之间的动态耦合关系, 提出了一种基于耗散理论的非线性耦合控制器和一种增强型耦合镇定控制器, 实现了对旋转小球和移动小车的镇定控制。利用Lyapunov方法和LaSalle不变性原理证明了闭环系统的稳定性和收敛性。为验证所提出方法的有效性, 给出数值仿真结果, 并与已有方法进行对比, 结果显示, 所提出方法能取得更好的控制效果, 且具有良好的鲁棒性。后续工作将尝试将所设计的控制方法应用于其他欠驱动系统的控制。

## 参考文献(References)

- [1] Sun N, Fang Y. New energy analytical results for the regulation of underactuated overhead cranes: An end-effector motion-based approach[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2012, 59(12): 4723-4734.
- [2] Sun N, Fang Y, Zhang X. An increased coupling-based control method for underactuated crane systems: Theoretical design and experimental implementation[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 70(2): 1135-1146.
- [3] Sun N, Fang Y, Zhang X. Energy coupling output feedback control of 4-DOF underactuated cranes with saturated inputs[J]. Automatica, 2013, 49(5): 1318-1325.
- [4] Ailon A. Simple tracking controllers for autonomous VTOL aircraft with bounded inputs[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(3): 737-743.
- [5] Xu J X, Guo Z Q, Lee T H. Design and implementation of integral sliding mode control on an underactuated two-wheeled mobile robot[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2014, 61(7): 3671-3681.
- [6] Olfati-Saber R. Global configuration stabilization for the VTOL aircraft with strong input coupling[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(11): 1949-1952.
- [7] Bupp R T, Bernstein D S, Coppola V T. A benchmark problem for nonlinear control design[J]. Int J of Robust Nonlinear Control, 1998, 8(4/5): 307-310.
- [8] Jankovic M, Fontaine D, Kokotovic P V. TORA example: Cascade-and passivity-based control designs[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 1996, 4(3): 292-297.
- [9] Alleyne A. Physical insights on passivity-based TORA control designs[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 1998, 6(3): 436-439.
- [10] Nazrulla S, Khalil H K. A novel nonlinear output feedback control applied to the TORA benchmark system[C]. Proc of the 47th IEEE Conf on Decision and Control. Cancun: IEEE Press, 2008: 3565-3570.
- [11] Gao B, Zhang X, Chen H, et al. Energy-based control design of an underactuated 2-dimensional TORA system[C]. Proc of the 2009 Int Conf on Intelligent Robots and Systems. Louis: IEEE Press, 2009: 1296-1301.
- [12] 高丙团. TORA的动力学建模及基于能量的控制设计[J]. 自动化学报, 2008, 34(9): 1221-1224.  
(Gao B T. Dynamical modeling and energy-based control design for TORA[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(9): 1221-1224.)
- [13] Gao B, Bao Y, Xie J, et al. Passivity-based control of two-dimensional translational oscillator with rotational actuator[J]. Trans of the Institute of Measurement and Control, 2014, 36(1): 111-118.
- [14] Petres, Z, Baranyi P, Korondi P, et al. Trajectory tracking by TP model transformation: Case study of a benchmark problem[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2007, 54(3): 1654-1663.
- [15] Avis J M, Nersesov S G, Nathan R. Decentralised energy-based hybrid control for the multi-RTAC system[J]. Int J of Control, 2010, 83(8): 1701-1709.
- [16] Khalil H K. Nonlinear systems[M]. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002: 126-133.

(责任编辑: 郑晓蕾)