

带有乘性过程噪声和模式观测时滞离散 马氏跳线性系统的状态估计

刘巍

(河南理工大学 电气工程与自动化学院, 河南 焦作 454003)

摘要: 研究受乘性过程噪声干扰的离散马氏跳线性系统状态估计问题. 系统可得到的观测包括两部分: 模式观测和输出观测, 其中模式观测受到固定时滞的影响. 利用贝叶斯定理及所得到的一些结果, 提出一种新颖的最小均方误差意义下最优状态估计算法. 该次优算法是回归的, 并且不随着时间增加而加重计算存储负荷. 通过计算机仿真来评估所提出次优算法的性能, 仿真结果验证了该算法的优越性.

关键词: 状态估计; 离散时间; 马氏跳线性系统; 乘性噪声; 模式观测时滞

中图分类号: TP273

文献标志码: A

State estimation for discrete-time Markov jump linear systems with multiplicative process noises and delayed mode measurements

LIU Wei

(School of Electrical Engineering and Automation, He'nan Polytechnic University, Jiaozuo 454003, China.
E-mail: intervalm@163.com)

Abstract: The state estimation problem for discrete-time Markov jump linear systems affected by multiplicative process noises is studied. The available measurements for the system under consideration have two components, the model measurement and the output measurement, where the model measurement is affected by a fixed amount of delay. By using the Bayes theorem and some results obtained in this paper, a novel suboptimal state estimation algorithm is proposed in the sense of minimum mean-square error. The proposed algorithm is recursive and does not increase computation and storage load with time. Computer simulations are carried out to evaluate the performance of the proposed algorithm. The simulation results show the superiority of the proposed algorithm.

Keywords: state estimation; discrete-time; Markov jump linear systems; multiplicative noises; delayed mode measurements

0 引言

离散马氏跳线性系统是带有参数的离散线性系统, 其中的参数随着一个有限维离散时间马尔可夫链不断变化. 离散马氏跳线性系统是一类重要的随机时变系统, 因为该系统可用来描述许多具有随机变结构物理行为的实际系统^[1-2]. 该系统已在移动目标跟踪、图像处理、远程通讯、经济等多个领域中得到广泛的使用.

关于离散马氏跳线性系统的一个基本的且极其重要的问题是根据所得观测来估计系统状态, 在最

近的40多年中, 该问题已得到深入广泛的研究. 对于既不含有乘性噪声、又不含有模式观测时滞的离散马氏跳线性系统状态估计问题的研究主要分两种情况. 第1种情况是输出和模式观测均可得, 在此情况下的最优状态估计算法可以通过对时变系统应用卡尔曼滤波得到^[3-5]; 第2种情况是只有输出观测可得, 然而在该情况下的最优状态估计算法需要指数的复杂度 $O(N^T)$, 其中 N 代表一个有限维离散时间马尔可夫链可能的实现, T 代表观测的数量^[6-7]. 因此, 为了限制计算负荷, 不得不考虑次优算法. 广义伪贝叶

收稿日期: 2014-05-15; 修回日期: 2014-09-25.

基金项目: 河南省科技攻关项目(142102210048); 河南省教育厅科学技术研究重点项目(13A413332); 河南理工大学博士基金项目(B2012-038).

作者简介: 刘巍(1976-), 男, 讲师, 博士, 从事状态估计理论、多模型估计等研究.

斯方法^[7-8]和交互多模型算法^[9]是最流行的次优算法. 使用不同的高斯假设, 通过求和加权的模式条件估计而得. 其他次优算法可以参见文献 [10-14]. 针对模式观测受时滞影响的离散马氏跳线性系统状态估计问题的研究还很少. 文献 [4] 针对带有模式观测时滞离散马氏跳线性系统的状态估计问题, 提出了一个最优算法. 文献 [5] 通过研究带有输出观测时滞和模式观测时滞离散马氏跳线性系统的状态估计问题, 进一步延展了文献 [4] 中所得到的结果.

本文考虑一个更复杂的离散马氏跳线性系统模型, 该系统在考虑模式观测时滞的基础上又考虑了乘性过程噪声的影响. 乘性噪声在许多情况下都存在, 例如, 传输信号经过电离层信道时的衰退或反射以及信号的采样、选通、调制等^[15]. 因此, 当上述情况出现并影响到离散马氏跳线性系统的状态时, 为了更精确地描述系统的物理行为, 有必要将乘性过程噪声引入系统中. 针对带有乘性过程噪声和模式观测时滞的离散马氏跳线性系统, 本文的主要目标是在最小均方误差意义下设计一个状态估计算法. 由于乘性过程噪声的存在, 导致本文所考虑的离散马氏跳线性系统是一个非高斯系统. 最小均方误差意义下非高斯系统的最优状态估计是非线性无穷维的且难以实际计算, 因此必须设计可实现的次优算法来近似最优状态估计. 本文首先得到仅带有乘性噪声(不存在模式观测时滞)离散马氏跳线性系统的最优状态估计算法; 然后, 针对所要考虑的带有乘性过程噪声和模式观测时滞的离散马氏跳线性系统, 根据所得最优算法并利用一些高斯假设, 提出一种回归且有限维可计算的次优状态估计算法.

首先给出如下符号: 对于一个普通的随机过程 Z_k , 令 Z^k 代表该随机过程从时间 0 到时间 k 的状态, 即 $Z^k = \{Z_0, Z_1, \dots, Z_k\}$. 令 $\sum_{i_a^b}^N$ 代表 $\sum_{i_a=1}^N \sum_{i_{a+1}=1}^N \dots \sum_{i_b=1}^N$, 其中 a 和 b 是满足 $a \leq b$ 的整数. 令 $\hat{E}[X|Y=y]$ 代表给定 $Y=y$ 时 X 的线性最小均方误差估计, 其中 X 和 Y 是随机向量. 对于一个随机向量 X , 令 $\text{Var}(X)$ 代表 X 的协方差矩阵.

1 问题描述及预备引理

考虑如下离散马氏跳线性系统:

$$x_{k+1} = \left(A(\theta_{k+1}) + \sum_{\lambda=1}^M \tilde{A}^\lambda(\theta_{k+1}) \xi_{k+1}^\lambda \right) x_k + B(\theta_{k+1}) \omega_{k+1} + F(\theta_{k+1}) u_{k+1}, \quad (1)$$

$$y_k = C(\theta_k) x_k + D(\theta_k) v_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

其中: $x_k \in \mathbf{R}^n$ 是未知状态; θ_k 是一个已知的离散时间马尔可夫链带有有限的状态空间 $\{1, 2, \dots, N\}$ 及转移概率

$$p_{ij} \triangleq P(\theta_{k+1} = j | \theta_k = i), \quad i, j = 1, 2, \dots, N; \quad (3)$$

$\xi_k^\lambda \in \mathbf{R}$ 是乘性过程噪声; $\omega_k \in \mathbf{R}^m$ 是加性过程噪声; $u_k \in \mathbf{R}^s$ 是外加输入; $y_k \in \mathbf{R}^p$ 是观测; $v_k \in \mathbf{R}^q$ 是加性观测噪声; $A(\theta_k), \tilde{A}^\lambda(\theta_k), B(\theta_k), C(\theta_k), D(\theta_k)$ 及 $F(\theta_k)$ 是适当维数的时变矩阵; 初始状态 x_0 是带有均值 \bar{x}_0 及协方差矩阵 \bar{P}_0 的高斯随机向量.

本文使用如下 3 个假设:

假设 1 ω_k, v_k 和 ξ_k^λ 是零均值标准白噪声序列.

假设 2 ω_k 独立于 v_i 和 ξ_i^λ , 其中 $i = 0, 1, \dots, k$. v_k 独立于 ξ_i^λ , 并且 ξ_i^λ 独立于 ξ_i^j , 其中 $j = 1, 2, \dots, M, j \neq \mu$.

假设 3 x_0 独立于 ω_k, v_k 和 ξ_k^λ , 并且 θ_k 独立于 x_0, ω_k, v_k 和 ξ_k^λ .

假设状态向量 x_k 和模式 θ_k 是未知的, 并且当前时刻可得的数据包括直到 k 时刻的输出观测以及直到 $k-h$ 时刻的模式观测, 其中 h 是一个正整数, 代表影响模式观测的时滞. 本文的目标是利用可得到的观测数据在最小均方误差意义下设计一个回归的算法, 用来估计未知状态 x_k . 即通过一个给定的观测序列 y^k, θ^{k-h} 来计算 $E[x_k | y^k, \theta^{k-h}]$.

注 1 因为状态 x_i ($i = 1, 2, \dots, k$) 含有乘性噪声 ξ_i^λ , 所以 x_i 不满足高斯分布. 这导致了本文研究的系统是非高斯的. 由于非高斯系统的最优条件均值状态估计是非线性无穷维的, 且在实际中难以计算, 必须考虑采用次优算法来近似计算 $E[x_k | y^k, \theta^{k-h}]$.

引理 1^[16] 在 $f(X|Y)$ 服从高斯分布的情况下, 给定 $Y=y$ 关于 X 的线性最小均方误差估计与相应的最小均方误差估计相等, 即

$$\hat{E}[X|Y=y] = E[X|Y=y]. \quad (4)$$

2 主要结果

针对所考虑的离散马氏跳线性系统, 本节将取得一个在最小均方误差意义下的次优状态估计算法.

2.1 标准情况

首先讨论标准情况下关于带有乘性过程噪声离散马氏跳线性系统的状态估计问题, 这里的标准情况指的是输出和模式观测均可得到且不存在时滞.

为了符号简单, 令

$$\hat{x}_k^\theta \triangleq \hat{E}[x_k | y^k, \theta^k],$$

$$P_k^\theta \triangleq E[(x_k^\theta - \hat{x}_k^\theta)(x_k^\theta - \hat{x}_k^\theta)^\top],$$

$$\bar{x}_k^\theta \triangleq E[x_k^\theta], \bar{X}_k^\theta \triangleq E[x_k^\theta (x_k^\theta)^\top],$$

其中 x_k^θ 是在马尔可夫链具有状态 θ^k 时随机向量 x_k 的状态. 标准情况下的最优算法可概括为如下定理.

定理 1 当模式观测不存在时滞, 即 $h = 0$ 时, 线性最小均方误差估计 \hat{x}_k^θ 及相应的误差协方差矩阵 P_k^θ 可通过如下方程回归地计算:

$$\text{Var}(\tilde{\omega}_k^\theta) = \sum_{\lambda=1}^M \tilde{A}^\lambda(\theta_k) \bar{X}_{k-1}^\theta \tilde{A}^\lambda(\theta_k)^\top + B(\theta_k) B(\theta_k)^\top, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_k^\theta &= A(\theta_k) \bar{X}_{k-1}^\theta A(\theta_k)^\top + \text{Var}(\tilde{\omega}_k^\theta) + \\ &F(\theta_k) u_k u_k^\top F(\theta_k)^\top + \\ &A(\theta_k) \bar{x}_{k-1}^\theta u_k^\top F(\theta_k)^\top + \\ &(A(\theta_k) \bar{x}_{k-1}^\theta u_k^\top F(\theta_k)^\top)^\top, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\bar{x}_k^\theta = A(\theta_k) \bar{x}_{k-1}^\theta + F(\theta_k) u_k, \quad (7)$$

$$\hat{\omega}_k^\theta = A(\theta_k) \hat{\omega}_{k-1}^\theta + F(\theta_k) u_k, \quad (8)$$

$$\hat{y}_k^\theta = C(\theta_k) \hat{\omega}_k^\theta, \quad (9)$$

$$M_k^\theta = A(\theta_k) P_{k-1}^\theta A(\theta_k)^\top + \text{Var}(\tilde{\omega}_k^\theta), \quad (10)$$

$$N_k^\theta = C(\theta_k) M_k^\theta C(\theta_k)^\top + D(\theta_k) D(\theta_k)^\top, \quad (11)$$

$$K_k^\theta = M_k^\theta C(\theta_k)^\top (N_k^\theta)^{-1}, \quad (12)$$

$$P_k^\theta = M_k^\theta - K_k^\theta C(\theta_k) M_k^\theta, \quad (13)$$

$$\hat{x}_k^\theta = \hat{\omega}_k^\theta + K_k^\theta (y_k - \hat{y}_k^\theta), \quad (14)$$

其中

$$\tilde{\omega}_k^\theta = \sum_{\lambda=1}^M \tilde{A}^\lambda(\theta_k) \xi_k^\lambda x_{k-1}^\theta + B(\theta_k) \omega_k. \quad (15)$$

证明 由假设 1 和假设 2 可知, $\xi_k^\lambda x_{k-1}^\theta$ 、 $\xi_k^j x_{k-1}^\theta$ ($j = 1, 2, \dots, M, j \neq \mu$) 和 ω_k 是相互独立的. 基于此并使用式 (15), 得

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{v}_k^\theta) &= \\ \text{Var}\left(\sum_{\lambda=1}^M \tilde{A}^\lambda(\theta_k) \xi_k^\lambda x_{k-1}^\theta + B(\theta_k) \omega_k\right) &= \\ \sum_{\mu=1}^M \text{Var}\left(\tilde{A}^\mu(\theta_k) \xi_k^\mu x_{k-1}^\theta\right) + \text{Var}(B(\theta_k) \omega_k) &= \\ \sum_{\mu=1}^M \tilde{A}^\mu(\theta_k) \text{Var}(\xi_k^\mu x_{k-1}^\theta) \tilde{A}^\mu(\theta_k)^\top + B(\theta_k) B(\theta_k)^\top. \end{aligned} \quad (16)$$

由协方差矩阵的定义可得

$$\begin{aligned} \text{Var}(\xi_k^\lambda x_{k-1}^\theta) &= \\ E[\xi_k^\lambda x_{k-1}^\theta (\xi_k^\lambda x_{k-1}^\theta)^\top] - E[\xi_k^\lambda x_{k-1}^\theta] (E[\xi_k^\lambda x_{k-1}^\theta])^\top. \end{aligned} \quad (17)$$

由假设 1 ~ 假设 3 可知, ξ_k^λ 是一个服从标准正太分布的随机变量并独立于 x_{k-1}^θ . 因此得到

$$\begin{aligned} E[\xi_k^\lambda x_{k-1}^\theta (\xi_k^\lambda x_{k-1}^\theta)^\top] &= \\ E[(\xi_k^\lambda)^2] E[x_{k-1}^\theta (x_{k-1}^\theta)^\top] &= \\ (\text{Var}(\xi_k^\lambda) + (E[\xi_k^\lambda])^2) E[x_{k-1}^\theta (x_{k-1}^\theta)^\top] &= \\ E[x_{k-1}^\theta (x_{k-1}^\theta)^\top] \end{aligned} \quad (18)$$

和

$$E[\xi_k^\lambda x_{k-1}^\theta] = E[\xi_k^\lambda] E[x_{k-1}^\theta] = 0_{n \times 1}. \quad (19)$$

将式 (18) 和 (19) 代入 (17), 得

$$\text{Var}(\xi_k^\lambda x_{k-1}^\theta) = E[x_{k-1}^\theta (x_{k-1}^\theta)^\top]. \quad (20)$$

将式 (20) 代入 (16), 并用 \bar{X}_{k-1}^θ 替代 $E[x_{k-1}^\theta (x_{k-1}^\theta)^\top]$, 即得式 (5).

式 (1) 也可以写成如下形式:

$$x_{k+1}^\theta = A(\theta_{k+1}) x_k^\theta + \tilde{\omega}_{k+1}^\theta + F(\theta_{k+1}) u_{k+1}, \quad (21)$$

其中 $\tilde{\omega}_k^\theta$ 定义于式 (15). 当 θ^k 已知时, 由假设 1 ~ 假设 3 可知, $\tilde{\omega}_k^\theta$ 是零均值白噪声序列且独立于 x_{k-1}^θ . 由此并利用式 (21), 可得

$$\begin{aligned} E[x_k^\theta (x_k^\theta)^\top] &= \\ E[(A(\theta_k) x_{k-1}^\theta + \tilde{\omega}_k^\theta + F(\theta_k) u_k) \times \\ (A(\theta_k) x_{k-1}^\theta + \tilde{\omega}_k^\theta + F(\theta_k) u_k)^\top] &= \\ A(\theta_k) E[x_{k-1}^\theta (x_{k-1}^\theta)^\top] A(\theta_k)^\top + \text{Var}(\tilde{\omega}_k^\theta) + \\ F(\theta_k) u_k u_k^\top F(\theta_k)^\top + A(\theta_k) E[x_{k-1}^\theta] \times \\ u_k^\top F(\theta_k)^\top + (A(\theta_k) E[x_{k-1}^\theta] u_k^\top F(\theta_k)^\top)^\top. \end{aligned} \quad (22)$$

然后, 分别用 \bar{X}_k^θ 、 \bar{X}_{k-1}^θ 和 \bar{x}_{k-1}^θ 替代 $E[x_k^\theta (x_k^\theta)^\top]$ 、 $E[x_{k-1}^\theta (x_{k-1}^\theta)^\top]$ 和 $E[x_{k-1}^\theta]$, 即得式 (6). 利用式 (21) 易得 (7).

当 θ^k 已知时, 由假设 1 ~ 假设 3 可知, $\tilde{\omega}_k^\theta$ 是零均值白噪声序列且独立于 x_0 和 $v_i, i = 0, 1, \dots, k$. 显然, 当 θ^k 已知时, 表示成式 (21) 和 (2) 的离散系统满足使用卡尔曼滤波的条件. 对建模成式 (21) 和 (2) 的系统使用卡尔曼滤波, 即得式 (8) ~ (14). \square

注 2 定理 1 中所考虑的系统是本文所研究系统的特例. 当式 (2) 中的模式观测不存在时滞, 即 $h = 0$ 时, 本文所考虑的系统就变成了定理 1 所考虑的系统. 定理 1 将被用于取得针对本文所研究系统的次优状态估计算法.

2.2 模式观测时滞情况

现在考虑在模式观测时滞情况下带有乘性过程噪声离散马氏跳线性系统的状态估计问题. 更准确

地说,是考虑建模成式(1)和(2)并带有模式观测时滞的($h \geq 1$)离散马氏跳线性系统的状态估计问题.

为了符号简单, θ_τ^k 的一个实现简写成 $i_\tau^k = \{i_\tau, i_{\tau+1}, \dots, i_k\}$, θ_τ^k 的另一个实现简写成 $j_\tau^k = \{j_\tau, j_{\tau+1}, \dots, j_k\}$.

最优状态估计 $E[x_k|y^k, \theta^{k-h}]$ 可表示成

$$E[x_k|y^k, \theta^{k-h}] = \sum_{i_{k-h+1}^k} P(i_{k-h+1}^k|y^k, \theta^{k-h})E[x_k|y^k, \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^k]. \quad (23)$$

由式(23)可知,需要计算 $P(i_{k-h+1}^k|y^k, \theta^{k-h})$ 和 $E[x_k|y^k, \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^k]$ 得到 $E[x_k|y^k, \theta^{k-h}]$. 首先计算 $P(i_{k-h+1}^k|y^k, \theta^{k-h})$, 而 $E[x_k|y^k, \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^k]$ 的计算将在算法中给出. 由贝叶斯定理,得

$$P(i_{k-h+1}^k|y^k, \theta^{k-h}) = \frac{f(y^k, \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^k)}{\sum_{j_{k-h+1}^k} f(y^k, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^k)}. \quad (24)$$

当 $h \geq 2$ 时, $f(y^k, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^k)$ 可写成

$$f(y^k, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^k) = f(y^{k-1}, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^k) f(y_k|y^{k-1}, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^k) = f(y^{k-1}, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^{k-1}) P(j_k|y^{k-1}, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^{k-1}) \times f(y_k|y^{k-1}, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^k). \quad (25)$$

当 θ^{k-1} 已知时,由式(1)和(2)可知 y^{k-1} 是一个随机向量的线性组合,其中这些随机向量属于集合 $\Xi = \{x_0, \omega_1, \dots, \omega_{k-1}, \xi_0^1, \dots, \xi_{k-1}^M, v_0, \dots, v_{k-1}\}$. 由假设3可知, θ^{k-1} 独立于集合 Ξ 中的任意一个随机向量. 因此有

$$P(j_k|y^{k-1}, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^{k-1}) = P(j_k|\theta^{k-h}, j_{k-h+1}^{k-1}) = P(j_k|j_{k-1}). \quad (26)$$

将式(26)代入(25),并用 p_{j_{k-1}, j_k} 替代 $P(j_k|j_{k-1})$,得

$$f(y^k, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^k) = f(y^{k-1}, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^{k-1}) p_{j_{k-1}, j_k} \times f(y_k|y^{k-1}, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^k). \quad (27)$$

反复使用式(27)直到时刻 $t-h+1$,可得

$$f(y^k, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^k) = f(y^{k-h}, \theta^{k-h}) p_{\theta_{k-h}, j_{k-h+1}} \times f(y_{k-h+1}|y^{k-h}, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}) \times \prod_{l=k-h+2}^k p_{j_{l-1}, j_l} f(y_l|y^{l-1}, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^l). \quad (28)$$

当 $h=1$ 时,类似可得

$$f(y^k, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^k) = f(y^{k-h}, \theta^{k-h}) p_{\theta_{k-h}, j_k} f(y_k|y^{k-h}, \theta^{k-h}, j_k). \quad (29)$$

合并式(25)与(29),可得

$$f(y^k, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^k) = \begin{cases} f(y^{k-1}, \theta^{k-1}) p_{\theta_{k-1}, j_k} f(y_k|y^{k-1}, \theta^{k-1}, j_k), & h=1; \\ f(y^{k-h}, \theta^{k-h}) p_{\theta_{k-h}, j_{k-h+1}} \times f(y_{k-h+1}|y^{k-h}, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}) \times \prod_{l=k-h+2}^k p_{j_{l-1}, j_l} f(y_l|y^{l-1}, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^l), & h \geq 2. \end{cases} \quad (30)$$

将式(30)代入(24),得

$$P(i_{k-h+1}^k|y^k, \theta^{k-h}) = \frac{f_a(y^k, \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^k)}{\sum_{j_{k-h+1}^k} f_a(y^k, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^k)}. \quad (31)$$

其中

$$f_a(y^k, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^k) = \begin{cases} p_{\theta_{k-1}, j_k} f(y_k|y^{k-1}, \theta^{k-1}, j_k), & h=1; \\ p_{\theta_{k-h}, j_{k-h+1}} f(y_{k-h+1}|y^{k-h}, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}) \times \prod_{l=k-h+2}^k p_{j_{l-1}, j_l} f(y_l|y^{l-1}, \theta^{k-h}, j_{k-h+1}^l), & h \geq 2. \end{cases} \quad (32)$$

根据式(1), x_l 也可写成

$$x_l = A(\theta_l)x_{l-1} + \tilde{\omega}_l + F(\theta_l)u_l, \quad l = k-h+1, \dots, k, \quad (33)$$

其中

$$\tilde{\omega}_l = \sum_{\lambda=1}^M \tilde{A}^\lambda(\theta_l) \xi_l^\lambda x_{l-1} + B(\theta_l)\omega_l. \quad (34)$$

为了符号简单,令 $x_{l,k}^{\theta,h,i}$ 和 $\tilde{\omega}_{l,k}^{\theta,h,i}$ 分别代表马尔可夫链具有状态 $\theta^{k-h}, i_{k-h+1}^l$ 时 x_l 和 $\tilde{\omega}_l$ 的状态. 而且,令

$$\hat{x}_{l,k}^{\theta,h,i} = \hat{E}[x_l|y^l, \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^l], \quad (35)$$

$$\bar{x}_{l,k}^{\theta,h,i} = E[x_{l,k}^{\theta,h,i}], \quad (36)$$

$$\bar{X}_{l,k}^{\theta,h,i} = E[x_{l,k}^{\theta,h,i} (x_{l,k}^{\theta,h,i})^T], \quad (37)$$

$$P_{l,k}^{\theta,h,i} = E[(x_{l,k}^{\theta,h,i} - \hat{x}_k^{\theta,h,i})(x_{l,k}^{\theta,h,i} - \hat{x}_k^{\theta,h,i})^T]. \quad (38)$$

下面给出本文的次优算法,该算法的一次循环流程如图1所示.由 $\bar{X}_{k-h-1}^\theta, \bar{x}_{k-h-1}^\theta, \hat{x}_{k-h-1}^\theta$ 和 P_{k-h-1}^θ 开始,该次优算法的步骤如下.

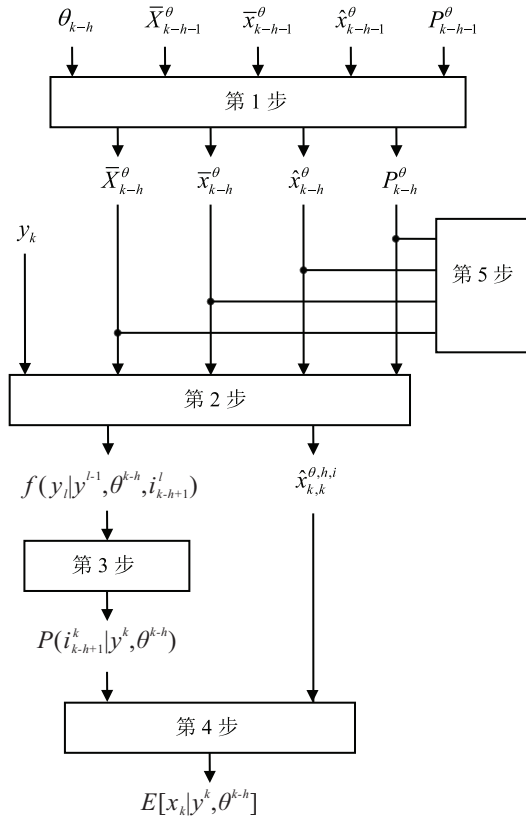


图 1 本文提出的次优算法

Step 1 根据定理 1 计算 \bar{X}_{k-h}^θ , \bar{x}_{k-h}^θ , \hat{x}_{k-h}^θ 和 P_{k-h}^θ .

Step 2 按如下方案计算 $f(y_l|y^{l-1}, \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^l)$ 和 $\hat{x}_{k,k}^{\theta,h,i}$:

for $l = k - h + 1 : k$

for $i_l = 1 : N$

$$\text{Var}(\tilde{\omega}_{l,k}^{\theta,h,i}) = \sum_{\mu=1}^M \tilde{A}^\lambda(i_l) \bar{X}_{l-1,k}^{\theta,h,i} \tilde{A}^\lambda(i_l)^T + B(i_l) B(i_l)^T, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_{l,k}^{\theta,h,i} &= A(i_l) \bar{X}_{l-1,k}^{\theta,h,i} A(i_l)^T + \text{Var}(\tilde{\omega}_{l,k}^{\theta,h,i}) + \\ &F(i_l) u_l u_l^T F(i_l)^T + A(i_l) \bar{x}_{l-1,k}^{\theta,h,i} u_k^T F(i_l)^T + \\ &(A(i_l) \bar{x}_{l-1,k}^{\theta,h,i} u_k^T F(i_l)^T)^T, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\bar{x}_{l,k}^{\theta,h,i} = A(i_l) \bar{x}_{l-1,k}^{\theta,h,i} + F(i_l) u_l, \quad (41)$$

$$\hat{\omega}_{l,k}^{\theta,h,i} = A(i_l) \hat{x}_{l-1,k}^{\theta,h,i} + F(i_l) u_l, \quad (42)$$

$$\hat{y}_{l,k}^{\theta,h,i} = C(i_l) \hat{\omega}_{l,k}^{\theta,h,i}, \quad (43)$$

$$M_{l,k}^{\theta,h,i} = A(i_l) P_{l-1,k}^{\theta,h,i} A(i_l)^T + \text{Var}(\tilde{\omega}_{l,k}^{\theta,h,i}), \quad (44)$$

$$N_{l,k}^{\theta,h,i} = C(i_l) M_{l,k}^{\theta,h,i} C(i_l)^T + D(i_l) D(i_l)^T, \quad (45)$$

$$K_{l,k}^{\theta,h,i} = M_{l,k}^{\theta,h,i} C(i_l)^T (N_{l,k}^{\theta,h,i})^{-1}, \quad (46)$$

$$P_{l,k}^{\theta,h,i} = M_{l,k}^{\theta,h,i} - K_{l,k}^{\theta,h,i} C(i_l) M_{l,k}^{\theta,h,i}, \quad (47)$$

$$\hat{x}_{l,k}^{\theta,h,i} = \hat{\omega}_{l,k}^{\theta,h,i} + K_{l,k}^{\theta,h,i} (y_k - \hat{y}_{l,k}^{\theta,h,i}), \quad (48)$$

$$\begin{aligned} f(y_l|y^{l-1}, \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^l) &= \\ \frac{\exp\{-0.5(y_l - \hat{y}_{l,k}^{\theta,h,i})^T (N_{l,k}^{\theta,h,i})^{-1} (y_l - \hat{y}_{l,k}^{\theta,h,i})\}}{(2\pi)^{0.5p} |N_{l,k}^{\theta,h,i}|^{0.5}}. \end{aligned} \quad (49)$$

end for

end for

$\hat{x}_{k,k}^{\theta,h,i}$ 是 $l = k$ 时式 (48) 的值.

Step 3 由式 (31) 和 (32) 计算 $P(i_{k-h+1}^k|y^k, \theta^{k-h})$.

Step 4 由下式计算 $E[x_k|y^k, \theta^{k-h}]$:

$$E[x_k|y^k, \theta^{k-h}] = \sum_{i_{k-h+1}^k} P(i_{k-h+1}^k|y^k, \theta^{k-h}) \hat{x}_{k,k}^{\theta,h,i}. \quad (50)$$

Step 5 存储 \bar{X}_{k-h}^θ , \bar{x}_{k-h}^θ , \hat{x}_{k-h}^θ 和 P_{k-h}^θ , 以便计算 $k + 1$ 时刻的状态估计.

上述次优算法的取得过程如下.

1) 由定理 1, 即得式 (39) ~ (48).

2) 式 (49) 的取得.

利用式 (1), x_l 也可表示成

$$x_l = A_\xi(\theta_l) x_{l-1} + B(\theta_l) \omega_l + F(\theta_l) u_l, \quad (51)$$

其中

$$A_\xi(\theta_l) = A(\theta_l) + \sum_{\lambda=1}^M \tilde{A}^\lambda(\theta_l) \xi_l^\lambda. \quad (52)$$

为了符号简单, 令 $y_{l,k}^{\theta,h,i} \triangleq \{y^{l-1}, \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^l\}$. 在假设 $f(A_\xi(\theta_l) x_{l-1} | y_{l,k}^{\theta,h,i})$ 是高斯分布的情况下, 注意到 ω_l 和 u_l 是独立于 $A_\xi(\theta_l) x_{l-1}$ 和 $y_{l,k}^{\theta,h,i}$ 的高斯随机向量, 由式 (51) 和 (2) 得知 $f(y_l | y_{l,k}^{\theta,h,i})$ 是高斯的. 因此有

$$\begin{aligned} f(y_l | y_{l,k}^{\theta,h,i}) &= \\ \frac{1}{(2\pi)^{0.5p} |\text{Var}(y_l | y_{l,k}^{\theta,h,i})|^{0.5}} \exp\{-0.5(y_l - \\ E[y_l | y_{l,k}^{\theta,h,i}])^T (\text{Var}(y_l | y_{l,k}^{\theta,h,i}))^{-1} \times \\ (y_l - E[y_l | y_{l,k}^{\theta,h,i}])\}. \end{aligned} \quad (53)$$

在上述高斯假设下, 由引理 1 可得

$$\hat{y}_{l,k}^{\theta,h,i} = E[y_l | y_{l,k}^{\theta,h,i}]. \quad (54)$$

参考文献 [13] 中的 (A.2) 和 (A.3), 并注意到如果 $f(A_\xi(\theta_l) x_{l-1} | y_{l,k}^{\theta,h,i})$ 是高斯的, 则 $f(y_l | y_{l,k}^{\theta,h,i})$ 也是高斯的, 易得

$$\begin{aligned} E[(y_l - E[y_l | y_{l,k}^{\theta,h,i}]) (y_l - \\ E[y_l | y_{l,k}^{\theta,h,i}])^T | \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^l] &= \text{Var}(y_l | y_{l,k}^{\theta,h,i}). \end{aligned} \quad (55)$$

在 $f(A_\xi(\theta_l)x_{l-1}|y_{l,k}^{\theta,h,i})$ 服从高斯分布的假设下, 将式(54)代入(55), 得

$$E[(y_l - \hat{y}_{l,k}^{\theta,h,i})(y_l - \hat{y}_{l,k}^{\theta,h,i})^T | \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^l] = \text{Var}(y_l | y_{l,k}^{\theta,h,i}). \quad (56)$$

将式(54)和(56)代入(53), 并分别用 $f(y_l | y^{l-1}, \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^l)$ 和 $N_{l,k}^{\theta,h,i}$ 替代 $f(y_l | y_{l,k}^{\theta,h,i})$ 和 $E[(y_l - \hat{y}_{l,k}^{\theta,h,i})(y_l - \hat{y}_{l,k}^{\theta,h,i})^T | \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^l]$, 即得式(49).

3) 式(50)的取得.

式(50)在假设 $f(A_\xi(\theta_k)x_{k-1}|y^k, \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^k)$ 服从高斯分布的前提下得到. 在该高斯假设下, 易得 $f(x_k | y^k, \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^k)$ 服从高斯分布. 基于此并使用引理1, 得

$$E[x_k | y^k, \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^k] = \hat{E}[x_k | y^k, \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^k]. \quad (57)$$

将式(57)代入(23), 并用 $\hat{x}_{k,k}^{\theta,h,i}$ 替代 $\hat{E}[x_k | y^k, \theta^{k-h}, i_{k-h+1}^k]$, 即得式(50).

注3 当新的观测 y_k 和 θ_{k-h} 到来时, 由于计算 $k+1$ 时刻状态估计的初始条件 $\bar{X}_{k-h}^\theta, \bar{x}_{k-h}^\theta, \hat{x}_{k-h}^\theta$ 和 P_{k-h}^θ 能够由上一时刻的初始条件 $\bar{X}_{k-h-1}^\theta, \bar{x}_{k-h-1}^\theta, \hat{x}_{k-h-1}^\theta$ 和 P_{k-h-1}^θ 得到, 可见本文提出的次优算法是回归的.

注4 本文提出的算法是次优的, 即该算法在计算最优状态估计 $E[x_k | y^k, \theta^{k-h}]$ 时使用了近似. 更确切地说, 该算法的次优性在于使用了假设 $f(A_\xi(\theta_l)x_{l-1}|y_{l,k}^{\theta,h,i})$ 服从高斯分布.

注5 虽然本文仅考虑了离散系统, 但令该离散系统的采样间隔趋近于零, 便可推广到连续系统的情况.

3 数值例子

下面通过一个标量动力系统的例子来测试本文所提出算法的性能. 考虑没有输入 u_k 时式(1)和(2)的一维模型. 其中

$$M = 1, \theta_k \in \{1, 2, 3\};$$

$$A(1) = 1, A(2) = 1, A(3) = -0.9;$$

$$B(1) = B(2) = B(3) = 0.5;$$

$$\tilde{A}^1(1) = 0.3, \tilde{A}^1(2) = 0.4, \tilde{A}^1(3) = 0.3;$$

$$C(1) = C(2) = C(3) = 1;$$

$$D(1) = D(2) = D(3) = 1;$$

而 x_0 是带有均值 $\bar{x}_0 = 0$ 和协方差 $\bar{P}_0 = 10$ 的高斯随机变量; $P(\theta_0 = 1) = 0.2, P(\theta_0 = 2) = 0.4, P(\theta_0 = 3) = 0.4$; 转移概率矩阵为

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

针对时滞 h 的不同, 考虑两种情况, 即 $h = 1$ 和 $h = 2$. 下面比较本文提出的次优算法和文献[5]的算法的性能. 由于文献[5]的算法不能处理系统方程中含有乘性噪声的情况, 在使用该算法时, 假设状态方程(1)中不含有乘性噪声 ξ_{k+1}^λ . 运行500次蒙特卡罗仿真, 而且每次仿真均使用从 $k = 0$ 到 $k = 100$ 这个时间段.

当 $h = 1$ 时, 文献[5]中算法和本文算法的均方根误差在图2中给出; 图3给出了 $h = 2$ 时文献[5]中算法和本文算法的均方根误差; 这两个算法相应的平均均方根误差在表1中给出.

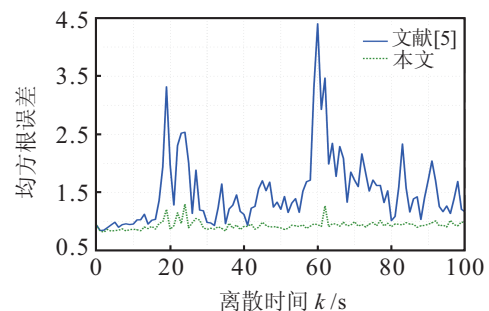


图2 $h = 1$ 时文献[5]中算法和本文算法的均方根误差

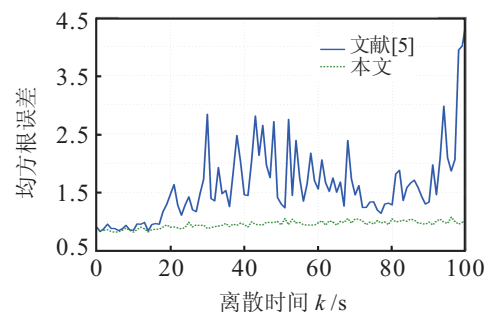


图3 $h = 2$ 时文献[5]中算法和本文算法的均方根误差

表1 文献[5]中算法和本文算法的平均均方根误差

时滞	文献[5]的算法	本文算法
$h = 1$	1.6378	0.9406
$h = 2$	1.7428	0.9517

观察图2可知, 在 $h = 1$ 时与文献[5]中算法相比, 本文算法在所有的时间样本上具有更小的或相等的均方根误差. 尤其是, 除了在时间样本 $0 \sim 15, 25 \sim 35, 41, 80, 81$ 和 88 外, 本文算法的均方根误差较文献[5]中的算法要低得多.

图3表明在 $h = 2$ 时, 本文算法在所有的时间样本上同样比文献[5]中算法具有更小的或相等的均方根误差, 且在绝大部分时间样本中具有低得多的均方根误差.

表1表明, 本文算法的平均均方根误差在 $h = 1$ 和 $h = 2$ 时, 分别仅为文献[5]中算法的57.43%和54.6%.

综上所述, 本文算法大大超越了文献[5]中算法.

4 结 论

针对带有乘性过程噪声和模式观测时滞的离散马氏跳线性系统, 本文基于最小均方误差准则提出了一个新颖的次优状态估计算法. 该算法的次优性是由于系统状态的非高斯性造成的. 本文提出的算法是回归的, 并且是有限维可计算的. 因此, 该算法在现实中可用于解决一类满足本文所研究系统模型的工程问题. 通过一个带有乘性过程噪声和模式观测时滞的标量离散马氏跳线性系统的例子, 表明了本文所得算法的性能远远好于文献[5]中算法的性能.

参考文献(References)

- [1] Logothetis A, Krishnamurthy V. Expectation maximization algorithms for map estimation of jump Markov linear systems[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1999, 47(8): 2139-2156.
- [2] 牛尔卓, 王青, 董朝阳, 等. 马尔可夫跳变系统的鲁棒故障检测与时域优化[J]. 控制与决策, 2014, 29(2): 379-384.
(Niu E Z, Wang Q, Dong C Y, et al. Robust fault detection and time domain optimization for Markovian jump system[J]. Control and Decision, 2014, 29(2): 379-384.)
- [3] Chizeck H J, Ji Y. Optimal quadratic control of jump linear systems with Gaussian noise in discrete-time[C]. Proc of the 27th IEEE Conf on Decision and Control. Honolulu: IEEE Press, 1988: 1989-1992.
- [4] Matei I, Martins N C, Baras J S. Optimal state estimation for discrete-time Markovian jump linear systems in the presence of delayed mode observations[C]. Proc of 2008 American Control Conf. Washington: IEEE Press, 2008: 3560-3565.
- [5] Matei I, Baras J S. Optimal state estimation for discrete-time Markovian jump linear systems in the presence of delayed output observations[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(9): 2235-2240.
- [6] Bar-Shalom Y, Li X R. Estimation and tracking: Principles, techniques, and software[M]. Norwood: Artech House, 1996: 76-189.
- [7] Ackerson G A, Fu K S. On state estimation in switching environments[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1970, 15(1): 10-17.
- [8] Chang C B, Athans M. State estimation for discrete systems with switching parameters[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 1978, 14(3): 418-425.
- [9] Blom H A P, Bar-Shalom Y. The interacting multiple model algorithm for systems with Markovian switching coefficients[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1988, 33(8): 780-783.
- [10] Li X R, Bar-Shalom Y. Multiple-model estimation with variable structure[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(4): 478-493.
- [11] Doucet A, Andrieu C. Iterative algorithms for state estimation of jump Markov linear systems[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2001, 49(6): 1216-1227.
- [12] Li W L, Jia Y M. Adaptive filtering for jump Markov systems with unknown noise covariance[J]. IET Control Theory and Applications, 2013, 7(13): 1765-1772.
- [13] Liu W, Zhang H G, Wang Z S, et al. State estimation for discrete-time Markov jump linear systems based on orthogonal projective theorem[J]. Int J of Control, Automation, and Systems, 2012, 10(5): 1049-1054.
- [14] Liu W, Zhang H G, Wang Z S. A novel truncated approximation based algorithm for state estimation of discrete-time Markov jump linear systems[J]. Signal Processing, 2011, 91(4): 702-712.
- [15] Rajasekaran P K, Satyanarayana N, Srinath M D. Optimum linear estimation of stochastic signals in the presence of multiplicative noise[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 1971, 7(3): 462-468.
- [16] Lewis F L, Xie L H. Optimal and robust estimation: With an introduction to stochastic control theory[M]. Boca Raton: CRC Press, 2008: 3-25.

(责任编辑: 李君玲)