

一种可保证瞬态特性的改进的鲁棒模型参考自适应控制

杨 艺, 陈 欣, 李春涛

(南京航空航天大学 自动化学院, 南京 210016)

摘要: 针对典型的鲁棒模型参考自适应控制中瞬态性能无法得到保障的问题, 提出一种改进的鲁棒模型参考自适应控制器. 该控制器在标准的鲁棒自适应控制中加入 H_∞ 补偿器, 以抑制闭环自适应系统中参数估计误差和不确定扰动对系统输出跟踪性能造成的不利影响. 理论分析和仿真验证表明, 所提出的控制器不但保留了典型鲁棒模型参考自适应控制的理想特性, 并且通过设计适当的 H_∞ 补偿器使得闭环系统的瞬态性得到了较大的改善, 其改善的程度依赖于 H_∞ 补偿器性能指标的大小.

关键词: 线性系统; 鲁棒自适应控制; 瞬态性能; H_∞ 最优

中图分类号: TP273

文献标志码: A

A modified robust model reference adaptive control with guaranteed transient performance

YANG Yi, CHEN Xin, LI Chun-tao

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China.

Correspondent: CHEN Xin, E-mail: chenxin@nuaa.edu.cn)

Abstract: A modified robust model reference adaptive controller is proposed to deal with the unguaranteed transient performance problem in standard robust model reference adaptive control. An H_∞ compensator is introduced as an additional item in nominal robust adaptive control to attenuate the adverse effects on tracking performance caused by parameter estimation error and bounded uncertain disturbance. The theoretical analysis and simulation results show that the proposed controller not only can maintain the ideal properties of the standard robust model reference adaptive control, but also greatly improve the transient performance of the closed-loop system through designing a proper H_∞ compensator. Furthermore, the amount of the transient performance improvement depends on the performance level of the H_∞ compensator.

Keywords: linear system; robust adaptive control; transient performance; H_∞ optimization

0 引 言

在标准的鲁棒模型参考自适应控制中, 闭环系统的瞬态特性无法得到保障是一直以来阻碍其广泛应用的主要问题. 尤其是那些对控制精度和动态响应要求较高的控制系统(如飞行控制系统), 糟糕的瞬态特性(如大超调或振荡)会造成控制品质的严重恶化甚至控制失效^[1]. 导致自适应控制系统瞬态性能降低的主要原因之一是控制参数估计误差^[2-3], 且由于对象建模的不精确或者模型系数本身的漂移, 无论采用哪种自适应律来更新控制参数, 该估计误差总是无法避免. 另外, 被动的参数辨识策略以及为了保障鲁棒性而采用较小的自适应增益均会对参数的收敛构成阻

碍^[3], 从而间接导致瞬态性能的下降. 与此同时, 外部环境带来的不确定性扰动也会对系统瞬态性能造成直接的、无法估计的影响.

为了改善模型参考自适应控制的瞬态性能, 一种较直观的方法是通过持续激励来使得控制参数逐渐逼近“真值”. 然而这种持续激励信号会对闭环系统造成扰动, 并且由于实际的被控对象存在不确定性, 该方法的作用效果并不十分明显^[4]. 另一种较实用的方法是基于 Luenberger 观测器的自适应控制策略^[5-6], 该策略通过提升系统状态(或输出)跟踪误差的收敛速率来改善瞬态性能. 然而它同时改变了精心选取的参考模型, 这在大多数情况下是人们所不希望的.

收稿日期: 2014-05-21; **修回日期:** 2014-08-22.

基金项目: 航空科学基金项目(20125852057); 江苏省普通高校研究生科研创新计划项目(CXLX12.0159); 中央高校基本科研业务费专项基金项目.

作者简介: 杨艺(1985—), 男, 博士生, 从事先进飞行控制技术的研究; 陈欣(1958—), 男, 研究员, 博士生导师, 从事无人机飞行控制系统的设计与工程化等研究.

Ortega^[2]通过引入高阶的参数估计器使闭环自适应系统达到新的动态平衡,其本质上是通过改进自适应算法来提高瞬态性能;Miller等^[7]提出了一种高增益切换的模型参考自适应方法,使系统获得任意期望的瞬态性能,但它以丧失了无静差跟踪能力为代价;Zhang等^[8]将规范化的自适应律与backstepping方法相结合,提出了一种新的自适应控制器,利用非线性反馈项来增加系统阻尼,从而改善了系统瞬态特性.然而,以上方法均没有综合考虑不确定扰动对系统瞬态带来的影响.

本文考虑带有不确定输入扰动的任意相对阶线性系统,提出一种可保证瞬态特性的鲁棒模型参考自适应控制器;在不改变典型鲁棒模型参考自适应控制原有特性的前提下,通过引入 H_∞ 补偿器来抑制闭环自适应系统中参数估计误差项以及输入扰动对系统输出跟踪带来的影响,从而改善了系统的瞬态性能,并且通过预先设置 H_∞ 补偿器的性能指标可以调整瞬态特性的改善程度.

1 数学准备与问题描述

1.1 数学准备

定义 1 对于任意信号 $x : [0, \infty) \rightarrow R^n$, x 在区间 $[0, t]$ 上的函数 x_t 定义为

$$x_t(\tau) = \begin{cases} x(\tau), & \tau \leq t; \\ 0, & \tau > t. \end{cases} \quad (1)$$

定义 2 对于任意信号 $x : [0, \infty) \rightarrow R^n$, 以及 $\delta \geq 0, t \geq 0, \|x_t\|_2^\delta$ 的定义为

$$\|x_t\|_2^\delta \triangleq \left(\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} [x^T(\tau)x(\tau)] d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

注 1 当 $\delta = 0, t = \infty$ 时, $\|x_t\|_2^\delta$ 变为 x 的 L_2 范数,且满足一般向量范数的性质.

定义 3 令 $\delta \geq 0$, 传递函数 $H(s)$ 在区间 $\text{Re}[s] \geq -\delta/2$ 内解析, 则定义

$$\|H(s)\|_\infty^\delta \triangleq \|H(s - \delta/2)\|_\infty, \quad (3)$$

且, 若 $H(s)$ 严格合适(分子阶次小于分母阶次), 则定义

$$\|H(s)\|_2^\delta \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}[H^*(j\omega - \delta/2)H(j\omega - \delta/2)] d\omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

其中 H^* 表示 H 的共轭转置.

引理 1^[8] 令 $z = H(s)w$, $H(s)$ 在区间 $\text{Re}[s] \geq -\delta/2$ 内解析, 则对于任意 $\delta \geq 0$ 和 $w \in L_2$, 有

$$\|z_t\|_2^\delta \leq \|H(s)\|_\infty^\delta \|w_t\|_2^\delta. \quad (5)$$

若 $H(s)$ 严格合适, 则有

$$|z(t)| \leq \|H(s)\|_2^\delta \|w_t\|_2^\delta, \quad (6)$$

且, 若 $H(s)$ 为 n 阶的稳定的传递函数, 则

$$\|z(t)\|_\infty \leq 2n\|H(s)\|_\infty \|w\|_\infty. \quad (7)$$

引理 2^[9] 令 $x : [0, \infty) \rightarrow R^n$, 对于某个 $\mu \geq 0$, 若 $x \in S(\mu)$, 则对于 $\forall \delta > 0$, 有 $\|x_t\|_2^\delta \in L_\infty$. 其中 $S(\mu) =$

$$\left\{ x \mid \int_t^{t+T} x^T(\tau)x(\tau) d\tau \leq \int_t^{t+T} \mu(\tau) d\tau + c \right\}, c \geq 0.$$

引理 3 对于如下线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1\omega + B_2u, \\ z = C_1x, \\ y = C_2x. \end{cases} \quad (8)$$

其中: $u(t) \in \mathfrak{R}^{n_u}, w(t) \in \mathfrak{R}^{n_w}, z(t) \in \mathfrak{R}^{n_z}, y(t) \in \mathfrak{R}^{n_y}$, $n_w \leq n_y \leq n_x$; A, B_1, B_2, C_1 和 C_2 均为相应维常数阵, 且满足 (A, B_1) 可控、 (A, C_2) 可观、 B_1 与 C_2 满秩, 以及 $C_2(sI - A)^{-1}B_1$ 左可逆并满足严格最小相位.

若状态 x 完全可测, 则存在状态反馈 H_∞ 控制

$$u = Kx = -\frac{1}{2\varepsilon} R^{-1} B_2^T P x, \quad (9)$$

其中 P 为下列 Riccati 方程

$$A^T P + PA - \varepsilon^{-1} P B_2 R^{-1} B_2^T P + \gamma^{-1} P B_1 B_1^T P + \gamma^{-1} C_1^T C_1 + \varepsilon S = 0 \quad (10)$$

的对称正定解, $R \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_u}$ 和 $S \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ 为任意的对称正定阵, $\varepsilon > 0, \gamma > 0$.

若状态 x 不完全可测, 则可构造如下带有观测器的输出反馈 H_∞ 控制 $u = F(s)y$, 其状态空间表示为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2 K \hat{x} + L(y - C_2 \hat{x}), \\ u = K \hat{x}. \end{cases} \quad (11)$$

其中: \hat{x} 为观测器状态, K 为状态反馈增益, $L = Q C_2^T$ 为观测器增益, Q 为下列 Riccati 方程

$$AQ + QA^T + J + q^2 \rho^{-1} B_1 B_1^T - QC_2^T C_2 Q + q^{-2} \rho^{-1} Q C_1^T C_1 Q = 0 \quad (12)$$

的对称正定解, $J \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ 为任意给定的对称正定阵, $q > 0$. 使得系统(8)稳定, 且 w 到 z 的传递函数 $G_{\omega z}(s)$ 有

$$\|G_{\omega z}(s)\|_\infty < \gamma. \quad (13)$$

注 2 在引理 3 中, 对于任意的性能指标 γ , 选择 ε 充分小且 q 足够大, 从而使得状态反馈 H_∞ 最优控制(9)和输出反馈 H_∞ 最优控制(11)总是存在. 其证明参见文献[10-11].

1.2 问题描述

考虑一般的带有输入扰动的 SISO 线性系统

$$y = G_p(s)(u + d) = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}(u + d), \quad (14)$$

以及如下参考模型:

$$y_m = W_m(s)r = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}r. \quad (15)$$

假设 1 $R_p(s)$ 为首 1 的 n_p 次多项式; $Z_p(s)$ 、 $Z_m(s)$ 和 $R_m(s)$ 均为首 1 的 Hurwitz 多项式, 其阶次分别为 m_p 、 q_m 、 p_m , 且 $m_p < n_p$; 增益 k_p 的符号已知。

假设 2 $G_p(s)$ 与 $W_m(s)$ 的相对阶一致, 即 $n_p - m_p = p_m - q_m = n^*$ 。

假设 3 d 为有界的输入扰动, r 为分段连续的有界参考指令。

控制目标为: 设计自适应控制器 u 使得闭环系统输入-输出稳定且跟踪误差 $e_1 = y - y_m$ 有界, 同时保证系统具有满意的瞬态性能, 即 e_1 的 L_∞ 范数小于一个正的常数。

2 改进的鲁棒模型参考自适应控制器设计

为了实现控制目标, 在标准的自适应控制器 u_s 中加入 H_∞ 补偿器 u_c 来改善系统的瞬态特性, 构造如下改进的鲁棒模型参考自适应控制:

$$u = u_s + u_c = \theta^T \omega + c_0 r + u_c, \quad c_0 = \frac{k_m}{k_p}. \quad (16)$$

其中

$$\omega = [\omega_1^T, \omega_2^T, y]^T, \quad \theta = [\theta_1^T, \theta_2^T, \theta_3^T]^T,$$

$$\omega_1 = \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u, \quad \omega_2 = \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y,$$

$$\alpha(s) = [s^{n_p-2}, s^{n_p-3}, \dots, s, 1], \quad \Lambda(s) = Z_m \lambda(s).$$

$\lambda(s)$ 为首 1 的 Hurwitz 多项式, 其阶次为 $n_p - q_m - 1$; $\theta \in \mathbb{R}^{2n-1}$ 为控制参数向量, 其规范化的自适应律如下:

$$\dot{\theta} = \text{Proj}(\dot{\theta}, -\Gamma \epsilon \phi), \quad (17)$$

$$\epsilon = \frac{\theta^T \phi + c_0 y - W_m(s) u}{m^2}, \quad (18)$$

$$\phi = W_m(s) \omega, \quad (19)$$

$$m^2 = \alpha_0 + u^2 + y^2, \quad \alpha_0 > 0. \quad (20)$$

其中: $\Gamma = \Gamma^T > 0$ 为自适应增益阵, $\text{Proj}(\cdot)$ 为投影算子^[5], m 为规范化信号。

注意到, 标准的鲁棒自适应控制器 $u_s = \theta^T \omega + c_0 r$ 与规范化自适应控制律 (17) 的设计在文献 [9]、文献 [12] 和文献 [13] 中广泛讨论, 本文不再赘述。接下来重点给出 H_∞ 补偿器 u_c 的设计。

首先, 导出带有补偿器的系统跟踪误差动态。对于给定的满足假设 1 和假设 2 的传递函数 $G_p(s)$, 存在期望的控制参数 $\theta^* = [\theta_1^{*T}, \theta_2^{*T}, \theta_3^*]$ 使得如下模型匹配条件成立^[12-13]:

$$\frac{c_0 k_p Z_p}{\left(1 - \frac{\alpha^T(s) \theta_1^*}{\Lambda(s)}\right) R_p - k_p Z_p \left(\frac{\alpha^T(s) \theta_2^*}{\Lambda(s)} + \theta_3^*\right)} = W_m(s). \quad (21)$$

式 (21) 两边乘以 y , 且由于 $R_p(s)y = K_p Z_p(s)(u + d)$,

有

$$c_0 k_p Z_p y = W_m(s) \left[\left(1 - \frac{\theta_1^{*T} \alpha(s)}{\Lambda(s)}\right) k_p Z_p (u + d) - k_p \left(\frac{\theta_2^{*T} \alpha(s)}{\Lambda(s)} + \theta_3^*\right) Z_p y \right], \quad (22)$$

两边同时除以 $k_p Z_p$, 得到

$$y = \frac{W_m(s)}{c_0} \left[u - \frac{\theta_1^{*T} \alpha(s)}{\Lambda(s)} u - \frac{\theta_2^{*T} \alpha(s)}{\Lambda(s)} y - \theta_3^* y + \left(1 - \frac{\theta_1^{*T} \alpha(s)}{\Lambda(s)}\right) d \right]. \quad (23)$$

令 $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$, $d_1 = \left(1 - \frac{\theta_1^{*T} \alpha(s)}{\Lambda(s)}\right) d$, 由控制器 (16) 有

$$y = \frac{W_m(s)}{c_0} [\tilde{\theta}^T \omega + u_c + c_0 r + d_1], \quad (24)$$

再由参考模型 (15) 可得

$$e_1 = y - y_m = \frac{W_m(s)}{c_0} [\tilde{\theta}^T \omega + u_c + d_1]. \quad (25)$$

将其写成如下状态空间的形式:

$$\begin{cases} \dot{e} = A_c e + B_c [\tilde{\theta}^T \omega + d_1] + B_c u_c, \\ e_1 = C_c e, \end{cases} \quad (26)$$

其中 (A_c, B_c, C_c) 为 $W_m(s)/c_0$ 的最小实现。

由上述跟踪误差动态 (25) 和 (26) 可以看出, 参数估计误差项 $\tilde{\theta}^T \omega$ 和扰动 d_1 将直接影响跟踪误差 e_1 , 也即对瞬态性能的好坏起主要作用。因此, 通过设计 H_∞ 补偿器 u_c 来抑制 $\tilde{\theta}^T \omega + d_1$ 对跟踪误差 e_1 的扰动, 从而改善系统的瞬态响应。注意到, 本文的控制目标是使跟踪误差 e_1 尽可能小, 为此引入 $e_z = e_1$ 来构造如下增广误差动态方程:

$$\begin{cases} \dot{e} = A_c e + B_c [\tilde{\theta}^T \omega + d_1] + B_c u_c, \\ e_z = C_c e, \\ e_1 = C_c e. \end{cases} \quad (27)$$

可以将式 (27) 看作系统 (8) 的一种特殊形式, 并且可以通过选择合适的参考模型 $W_m(s)$ 来满足其假设条件 (例如选取 $W_m(s)$ 使得 $W_m(s)/c_0$ 既可控又可观, 且严格最小相位)。之后, 基于方程 (27) 和引理 3 给出 H_∞ 补偿器 u_c 的设计步骤。

Step 1: 初始化 $\varepsilon > 0$, $0 < \gamma < \|W_m(s)/c_0\|_\infty$ 以及对称正定阵 $S \in \mathbb{R}^{p_m \times p_m}$, $R \in \mathbb{R}^{q_m \times q_m}$, 求解如下 Riccati 方程:

$$A_c^T P + P A_c - \varepsilon^{-1} P B_c^T R^{-1} B_c^T P + \varepsilon S + \gamma^{-1} C_c^T C_c = 0, \quad (28)$$

得到状态反馈增益 $K = -\frac{1}{2\varepsilon} R^{-1} B_c^T P$ 。若对称正定解 P 不存在, 则减小 ε 并重复此步骤; 若误差状态 e 完全可测, 则状态反馈 H_∞ 补偿器 $u_c = K e$ 便设计完成并转至 Step 3, 否则继续 Step 2。

Step 2: 初始化 q , $\delta > 0$, 以及对称正定阵 $J \in \mathbb{R}^{p_m \times p_m}$, 求解如下 Riccati 方程:

$$A_c Q + Q A_c^T + J + (q^{-2} \delta^{-1} - 1) Q C_c^T C_c Q + q^2 \delta^{-1} B_c B_c^T = 0, \quad (29)$$

得到观测器增益 $L = Q C_2^T$, 以及如下输出反馈 H_∞ 补偿器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}} = A_c \hat{e} + B_c K \hat{e} + L(e_1 + C_c \hat{e}), \\ u_c = K \hat{e}. \end{cases} \quad (30)$$

若对称正定解 Q 不存在, 则增大 q 并重复此步骤.

Step 3: 减小 γ 值并返回 **Step 1**, 直到获得满意的瞬态性能或者 H_∞ 补偿器达到最优 (γ 最小).

注 3 由上述步骤可知, 通过选择充分小的 ϵ 和足够大的 q 可得到 H_∞ 最优补偿器, 但这会导致增益 K 和 L 过大. 对于整个闭环控制系统而言, 大增益会使得系统的稳定裕度降低, 并且放大测量噪声的影响. 因此, 在实际应用中, H_∞ 补偿器的设计通常采用折中的方式. 事实上, 通过接下来的理论分析和仿真验证可知, 对于某个给定的 $0 < \gamma < \|W_m(s)/c_0\|_\infty$ 的次最优 H_∞ 补偿器亦可以使系统获得满意的瞬态性能.

3 稳定性与瞬态特性分析

3.1 稳定性分析

首先证明 H_∞ 补偿器 (30) 的加入不会改变自适应律 (17) 的性质; 接着通过输入-输出有界性证明闭环系统 (14) 稳定.

定理 1 对于带有 H_∞ 补偿器的控制输入 (16), 自适应律 (17) 仍能保证参数估计误差 $\tilde{\theta}$ 有界, 并使得如下不等式成立:

$$\int_t^{t+T} \frac{(\tilde{\theta}^T \phi)^2}{m^2} dz \leq c_\eta T + \frac{|\tilde{\theta}(t)|^2}{\lambda_{\min}(\Gamma)}, \quad \forall t, T \geq 0; \quad (31)$$

$$\int_t^{t+T} |\dot{\tilde{\theta}}|^2 dz \leq c \left[c_\eta T + \frac{|\tilde{\theta}(t)|^2}{\lambda_{\min}(\Gamma)} \right], \quad \forall t, T \geq 0. \quad (32)$$

其中: $\lambda(\cdot)$ 表示矩阵的特征值;

$$c_\eta = \frac{\eta^2}{m^2},$$

$$\eta = W_m(s) \left(1 - \frac{\theta_1^{*T} \alpha(s)}{\Lambda(s)} \right) d,$$

$c > 0$ 为常数的通用符号.

证明 由式 (23) 和 (19) 有

$$W_m(s)u - \theta^{*T} \phi + \eta = c_0 y. \quad (33)$$

将式 (33) 代入 (18) 得

$$\epsilon = \frac{\tilde{\theta}^T \phi + \eta}{m^2}. \quad (34)$$

构造 Lyapunov 函数 $V = \frac{\tilde{\theta}^T \tilde{\theta}}{2\Gamma}$, 由自适应律 (17) 有

$$\dot{V} = \tilde{\theta}^T (\Gamma^{-1} \text{Proj}(\hat{\theta}, -\Gamma \epsilon \phi) + \epsilon \phi) - \epsilon \tilde{\theta}^T \phi. \quad (35)$$

由投影算子 Proj 的性质^[6]和式 (34), 有

$$\dot{V} \leq -\epsilon \tilde{\theta}^T \phi = -\tilde{\theta}^T \phi \left(\frac{\tilde{\theta}^T \phi + \eta}{m^2} \right) \leq$$

$$-\frac{(\tilde{\theta}^T \phi)^2}{2m^2} + \frac{\eta^2}{2m^2}, \quad (36)$$

又由于

$$\begin{cases} \phi = W_m(s)H_1(s)[u \ y]^T, \\ H_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} & 1 \end{bmatrix}^T, \end{cases} \quad (37)$$

由引理 1 和 $W_m(s)H_1(s)$ 为稳定的传递函数阵, 有

$$|\phi|^2 \leq cm^2, \quad c > 0. \quad (38)$$

则式 (36) 可以改写为

$$\begin{cases} \dot{V} \leq -K_0 V + K_1, \\ K_0 = c\lambda_{\max}(\Gamma), \\ K_1 = \frac{\eta^2}{2m^2}, \end{cases} \quad (39)$$

从而由式 (39) 和 Gronwall-Bellman 引理^[14]可得

$$V(t) \leq \left[V(0) - \frac{K_1}{K_0} \right] e^{-K_0 t} + \frac{K_1}{K_0}, \quad (40)$$

即 $V(t)$ 有界, 参数估计误差 $\tilde{\theta}$ 有界.

再由式 (36) 可得

$$\int_t^{t+T} \frac{(\tilde{\theta}^T \phi)^2}{m^2} dz \leq c_\eta T + \frac{|\tilde{\theta}(t)|^2}{\lambda_{\min}(\Gamma)}, \quad \forall t, T \geq 0. \quad (41)$$

同理, 由于

$$\epsilon^2 m^2 = \frac{(\tilde{\theta}^T \phi + \eta)^2}{m^2} \leq 2 \frac{(\tilde{\theta}^T \phi)^2}{m^2} + 2 \frac{\eta^2}{m^2},$$

有

$$\int_t^{t+T} \epsilon^2 m^2 dz \leq 4c_\eta T + 2 \frac{|\tilde{\theta}(t)|^2}{\lambda_{\min}(\Gamma)}, \quad \forall t, T \geq 0. \quad (42)$$

接着, 因为 $\dot{V} \leq -\epsilon \tilde{\theta}^T \phi$, $\tilde{\theta}$ 有界, 且由式 (38) 有

$$|\dot{\tilde{\theta}}|^2 \leq c\lambda_{\max}^2(\Gamma)\epsilon^2 |\phi|^2 \leq c\epsilon^2 m^2. \quad (43)$$

因此, 由式 (42) 和 (43) 可得

$$\int_t^{t+T} |\dot{\tilde{\theta}}|^2 dz \leq c \left[c_\eta T + \frac{|\tilde{\theta}(t)|^2}{\lambda_{\min}(\Gamma)} \right], \quad \forall t, T \geq 0. \quad (44)$$

定理得证. \square

定理 2 带有 H_∞ 补偿器的改进的鲁棒模型参考自适应控制 (16) 和自适应律 (17) 可保证具有任意相对阶的系统 (14) 所有信号均一致有界.

证明 将 H_∞ 补偿器 (30) 代入式 (27), 有

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}} = \bar{A}\bar{e} + \bar{B}[\tilde{\theta}^T \omega + d_1], \\ e_1 = \bar{C}\bar{e}. \end{cases} \quad (45)$$

其中

$$\bar{e} = [e \ \hat{e}]^T,$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_c & B_c K \\ LC_c & A_c + B_c K - LC_c \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = [B_c \ 0]^T,$$

$$\bar{C} = [C_c \ 0].$$

令 $W_c(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B}$, 有

$$e_1 = W_c(s)[\tilde{\theta}^T \omega + d_1]. \quad (46)$$

则由引理 3 可知 $W_c(s)$ 稳定, 且

$$\|W_c(s)\|_\infty < \gamma. \quad (47)$$

根据式 (46), 式 (24) 可写为

$$y = W_c(s)[\tilde{\theta}^T \omega + d_1] + W_m(s)r. \quad (48)$$

由系统 (23) 可得

$$u = \frac{R_p(s)}{k_p Z_p(s)} W_c(s)[\tilde{\theta}^T \omega + d_1] + W_m(s)r - d. \quad (49)$$

选择 $\delta_1 > 0$, 其满足多项式 $|sI - \bar{A}|$, $R_m(s)$, $\lambda(s)$ 以及 $Z_p(s)$ 的根均有 $Re[s] < -\frac{\delta_1}{2}$. 令 $\delta \in (0, \delta_1)$, 并构造如下函数:

$$m_f(t) = 1 + \|u_t\|_2^\delta + \|y_t\|_2^\delta. \quad (50)$$

由引理 1 可知, 若 $m_f(t)$ 有界, 则系统 (14) 所有信号均一致有界. 下面证明 $m_f(t)$ 的有界性. 由式 (48)、(49) 和假设 3, 以及引理 1 可得

$$m_f(t) \leq c + c\|(\tilde{\theta}^T \omega)_t\|_2^\delta, \quad c > 0. \quad (51)$$

由 Swapping 引理^[13]有

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^T \omega &= F_1(s, \alpha)[\dot{\tilde{\theta}}^T \omega + \tilde{\theta}^T \dot{\omega}] + F_0(s, \alpha) \times \\ &W_m^{-1}(s)[\tilde{\theta}^T \phi + w_c(s)[w_b(s)[\omega^T] \tilde{\theta}]]. \end{aligned} \quad (52)$$

其中

$$sF_1(s, \alpha) = 1 - F_0(s, \alpha),$$

$$F_0(s, \alpha) = \frac{\alpha^{n^*}}{s + \alpha^{n^*}},$$

$$w_c(s) = -C_m^T(sI - A_m)^{-1},$$

$$w_b(s) = (sI - A_m)^{-1}B_m,$$

(A_m, B_m, C_m) 为 $W_m(s)$ 的最小实现, $\alpha > \frac{\delta}{2}$. 注意到

$$\begin{cases} \omega = H(s)[u \ y]^T + [0 \ 0 \ y]^T, \\ H(s) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} & 0 \end{bmatrix}^T. \end{cases} \quad (53)$$

由引理 1 可得

$$\|\omega_t\|_2^\delta \leq cm_f, \quad (54)$$

$$|\omega(t)| \leq cm_f(t) + |y(t)|. \quad (55)$$

由式 (48)、引理 1 以及 $\tilde{\theta}$ 有界, 可得

$$|\omega_t| \leq c[\|\omega_t\|_2^\delta + c]. \quad (56)$$

因此有

$$|\omega(t)| \leq cm_f(t) + c. \quad (57)$$

由式 (53) 有

$$\dot{\omega} = sH(s)[u \ y]^T + [0 \ 0 \ \dot{y}]^T,$$

再由式 (48) 得

$$\begin{aligned} \|\dot{\omega}_t\|_2^\delta &\leq cm_f + \|\dot{y}_t\|_2^\delta \leq \\ cm_f + \|sW_c(s)\|_\infty^\delta &[\|(\tilde{\theta}^T \omega)_t\|_2^\delta + c] + c \leq \end{aligned}$$

$$cm_f + c[m_f + c] + c \leq cm_f + c. \quad (58)$$

又因为

$$|w_b(s)[\omega^T]| \leq c\|\omega_t\|_2^\delta \leq cm_f, \quad (59)$$

将式 (57)、(58) 和 (59) 代入 (52) 有

$$\begin{aligned} \|(\tilde{\theta}^T \omega)_t\|_2^\delta &\leq c + \frac{c}{\alpha} m_f(t) + c\alpha^{n^*} \|(\tilde{\theta}^T \phi)_t\|_2^\delta + \\ &\left(\frac{c}{\alpha} + c\alpha^{n^*}\right) \|(\dot{\tilde{\theta}}|m_f)_t\|_2^\delta. \end{aligned} \quad (60)$$

将式 (60) 代入 (51), 并且对两边同时平方得

$$m_f^2(t) \leq c + \int_0^t \left[c \frac{(\tilde{\theta} \phi)^2}{m^2} + c|\dot{\tilde{\theta}}|^2 \right] e^{-\delta(t-z)} m_f^2(z) dz. \quad (61)$$

令

$$\zeta^2 = c \frac{(\tilde{\theta} \phi)^2}{m^2} + c|\dot{\tilde{\theta}}|^2,$$

由 Gronwall-Bellman 引理^[15]有

$$m_f^2(t) \leq c \left[1 + \int_0^t e^{-\delta(t-z)} \zeta^2(z) e^{\int_z^t \zeta^2(\tau) d\tau} dz \right]. \quad (62)$$

由式 (31) 和 (32) 可知 $\zeta \in S(cc_\eta)$, 因此有

$$\int_z^t \zeta^2(\tau) d\tau \leq cc_\eta(t-z) + c, \quad (63)$$

且由引理 2 有

$$\|\zeta_t\|_2^\delta \in L_\infty. \quad (64)$$

对于不等式 (62), 由 (63)、(64) 以及定义 2, 并通过选择 α_0 足够大使得 $cc_\eta < \delta$, 可得

$$m_f(t) \in L_\infty. \quad (65)$$

因此有系统 (14) 所有信号均一致有界. \square

3.2 瞬态特性分析

接下来, 利用输出跟踪误差的 L_∞ 标准^[2]和任意单位时间内的均方差标准^[3]来研究闭环系统的瞬态性能.

定理 3 对于改进的鲁棒模型参考自适应控制 (16), 其 H_∞ 补偿器的性能指标为 γ , 使得系统 (14) 的输出跟踪误差 e_1 满足如下不等式关系:

$$\|e_1(t)\|_\infty \leq \gamma c, \quad (66)$$

$$\frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} |e_1|^2 d\tau \leq \gamma^2 c, \quad (67)$$

其中 $c > 0$ 为常数的通用符号.

证明 式 (26) 所给出的跟踪误差动态

$$e_1 = W_c(s)[\tilde{\theta}^T \omega + d_1]. \quad (68)$$

由于 $W_c(s)$ 稳定且阶次为 $2p_m$, 由引理 1 可得

$$\|e_1(t)\|_\infty \leq 4p_m \|W_c(s)\|_\infty \|\tilde{\theta}^T \omega\|_\infty. \quad (69)$$

由 $\tilde{\theta}$ 有界和式 (57) 可知 $\tilde{\theta}^T \omega \in L_\infty$, 且由式 (47) 有

$$\|e_1(t)\|_\infty \triangleq \sup_{t \geq 0} |e_1(t)| \leq \gamma c. \quad (70)$$

接着, 由

$$\int_{t_1}^{t_2} |H(s)x|^2 dt \leq \|H(s)\|_\infty^2 \int_{t_1}^{t_2} |x|^2 dt, \quad (71)$$

可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} |e_1|^2 d\tau \leq \\ & \|W_c(s)\|_\infty^2 \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} |\tilde{\theta}^T \omega|^2 d\tau < \\ & \gamma^2 \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} |\tilde{\theta}^T \omega|^2 d\tau \leq \gamma^2 c. \end{aligned} \quad (72)$$

定理得证. \square

由定理 3 可知, 闭环系统的瞬态特性与 H_∞ 补偿器的性能指标 γ 直接相关, 即 γ 值越小, 跟踪误差 e_1 越小, 则系统的瞬态性能就越好. 定理 2 和定理 3 从理论上保证了控制目标的实现, 并且下节的仿真例子可以验证该结论的正确性.

4 仿真验证

为了说明该设计方法的有效性和正确性, 以 F-16 战斗机纵向短周期动态为被控对象^[16], 在输入端加入有界扰动 d_δ , 其传递函数为

$$q = \frac{-(10.06s + 10.35)}{s^2 + 2.096s + 0.3536} (\delta_e + d_\delta). \quad (73)$$

其中: 输入 δ_e 为升降舵, 输出 q 为俯仰角速率. 选取如下参考模型:

$$q_m = \frac{-(s + 2)}{s^2 + 4s + 2} r. \quad (74)$$

设计控制器 (16) 和自适应律 (17), 其中: $c_0 = 0.1$, $\alpha_0 = 1$. 为了体现参数估计误差和输入扰动对系统瞬态特性的影响, 选取自适应初值 $\theta = [1, 0.1, 0]$, 以及自适应增益 $\Gamma = \text{diag}\{1, 1, 1\}$, 并考虑有界输入扰动 $d_\delta = 0.02\sin 2t$, 以及如下参考指令:

$$r(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 20; \\ -2, & 20 \leq t < 40; \\ 4, & 40 \leq t \leq 60. \end{cases} \quad (75)$$

接着, 依据 Step 1~Step 3 来构造 H_∞ 补偿器 u_c . 首先选取 $\varepsilon = 1$, $0 < \gamma = 3 < \left\| \frac{-c_0^{-1}(s+2)}{s^2 + 4s + 2} \right\|_\infty = 10$, 以及 $R = S = I_{2 \times 2}$, 求解方程 (28) 得

$$P = \begin{bmatrix} 1.452 & 0.452 \\ 0.452 & 0.452 \end{bmatrix},$$

$$K_{\gamma=3} = [0.904 \quad 0.904].$$

令 $q = 2$, $\rho = 1$, 求解方程 (29) 得

$$Q = \begin{bmatrix} 0.6044 & -0.3603 \\ -0.3603 & 3.6612 \end{bmatrix},$$

$$L_{\gamma=3} = [0.6103 \quad 8.2523]^T.$$

则可得到性能指标 $\gamma = 3$ 的 H_∞ 补偿器 (30).

为了比较不同性能指标的补偿器的作用效果, 令 $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $q = 1$, $\rho = 1$, 并重复上述步骤, 得到如下增益阵:

$$K_{\gamma=1} = [4.0633 \quad 4.0633],$$

$$L_{\gamma=1} = [12.5 \quad 10]^T.$$

以及性能指标 $\gamma = 1$ 的 H_∞ 补偿器 (30).

针对无补偿器 (典型的鲁棒模型参考自适应) 与带有 H_∞ 补偿器 ($\gamma = 1$ 或 3) 的鲁棒模型参考自适应控制对比仿真结果如图 1~图 4 所示.

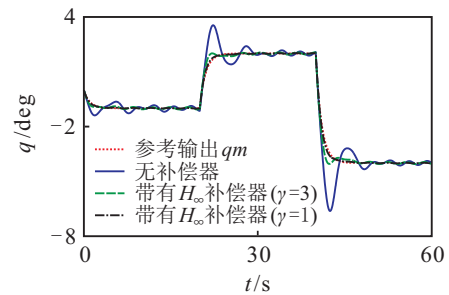


图 1 俯仰角速率

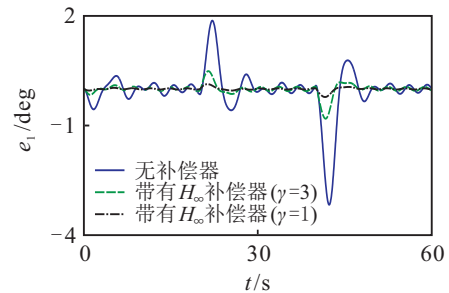


图 2 输出跟踪误差

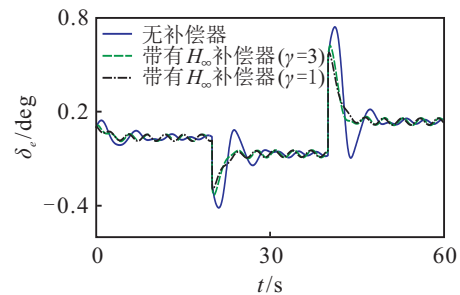


图 3 升降舵偏转

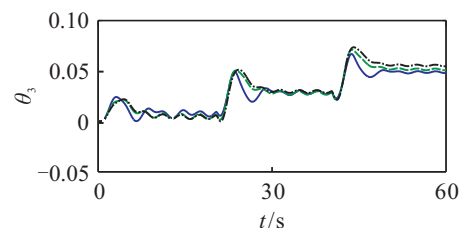
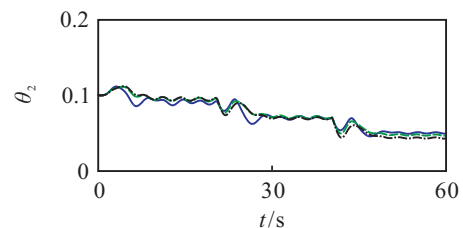
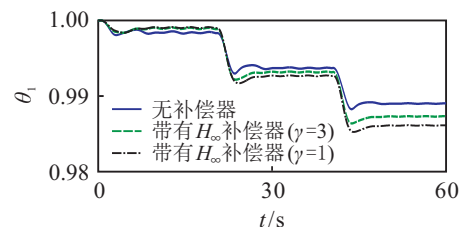


图 4 参数估计值

由图1可知,随着指令 $r(t)$ 的增大,无补偿器的(典型的)鲁棒模型参考自适应控制的响应超调和振荡逐渐增大;显而易见的,加入 H_∞ 补偿器后系统的瞬态特性得到较大的改善,并且 H_∞ 补偿器的性能指标 γ 值越小,其改善系统瞬态特性的能力越强,同时对参考模型的输出跟踪误差也越小(图2),这与定理3给出的结论一致;系统的输入曲线(图3)和输出响应(图1)说明了带有补偿器的闭环系统是输入-输出稳定的,这验证了定理2的正确性;同理,由图4可知,补偿器的加入对参数估计值产生了一定的影响(本质上是由于估计误差信号 ϵ 的改变),但其仍能保证参数估计误差有界,这说明了定理1的正确性。

5 结 论

本文将标准的鲁棒模型参考自适应控制与一类特殊的 H_∞ 控制相结合,提出了一种改进的鲁棒模型参考自适应控制器.其不但保留了典型的鲁棒自适应控制所具备的各种理想特性,并且通过引入系统化设计的 H_∞ 补偿器,使得闭环系统的瞬态性能得到较大的改善,其改善程度与 H_∞ 补偿器的性能指标 γ 密切相关. H_∞ 补偿器的加入从扰动抑制的角度出发,解决了典型的鲁棒模型参考自适应控制无法保证系统瞬态特性的问题,使其在实际应用中获得更好的控制效果。

参考文献(References)

- [1] Golden M, Ydstie B. Chaos and strange attractors in adaptive control systems[J]. Proc of IFAC World Congress, 1987, 10(2): 127-132.
- [2] Ortega R. On Morse's new adaptive controller: Parameter convergence and transient performance[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1993, 38(8): 1191-1202.
- [3] Sun J. A modified model reference adaptive control scheme for improved transient performance[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1993, 38(8): 1255-1259.
- [4] Mirkin B, Gutman O, Shtessel Y. Coordinated decentralized sliding mode MRAC with control cost optimization for a class of nonlinear systems[J]. J of the Franklin Institute, 2012, 349(4): 1364-1379.
- [5] Levretsky E, Wise K. Robust and adaptive control with aerospace applications[M]. New York: Springer, 2013: 387-406.
- [6] Annaswamy M, Lavretsky E, Dydek T, et al. Recent results in robust adaptive flight control systems[J]. Int J of Adapt Control Signal Process, 2013, 27(1/2): 4-21.
- [7] Miller D, Davison E. An adaptive controller which provides an arbitrarily good transient and steady state response[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1991, 36(1): 68-81.
- [8] Zhang Y P, Ioannou P. A new linear adaptive controller: Design, analysis and performance[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(5): 883-897.
- [9] Ioannou P, Datta A. Robust adaptive control: A unified approach[J]. Proc of the IEEE, 1991, 79(12): 1736-1768.
- [10] Petersen R. Disturbance attenuation and H_∞ optimization: A design method based on the algebraic Riccati equation[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1987, 32(5): 427-429.
- [11] Petersen R, Hollot C. High gain observers applied to problems in the stabilization of uncertain linear system, disturbance attenuation and H_∞ optimization[J]. Int J of Adaptive Control and Signal Processing, 1988, 2: 347-369.
- [12] Narendra K, Annaswamy A. Stable adaptive systems[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1989: 663-694.
- [13] Ioannou P, Sun J. Robust adaptive control[M]. New York: Dover, 2013: 811-872.
- [14] Hale J. Ordinary differential equations[M]. New York: Wiley-Interscience, 1969: 143-155.
- [15] Desoer C, Vidyassgar M. Feedback system: Input-output properties[M]. New York: Academic, 1975: 296-321.
- [16] Stevens B, Lewis F. Aircraft control and simulation[M]. New York: Wiley-Interscience, 2003: 52-67.

(责任编辑:齐 霖)