

正态分布区间灰数灰色预测模型

杨锦伟^{1,2}, 肖新平¹, 郭金海^{1,3}

(1. 武汉理工大学 理学院, 武汉 430070; 2. 平顶山学院 数学与信息科学学院, 河南 平顶山 467000; 3. 长江大学 信息与数学学院, 湖北 荆州 434023)

摘要: 近期灰数预测主要关注无分布信息和均匀分布区间灰数预测. 基于灰朦胧集演化思想, 研究在不确定信息广泛存在的正态分布背景下, 正态分布区间灰数序列的灰色预测问题. 首先, 通过正态分布随机函数实现区间灰数序列与实数序列族的信息等效转换; 然后, 对正态分布区间灰数随机白化序列进行 GM(1,1) 建模, 利用最大值最小值及正态分布“ 3σ 法则”建立区间灰数预测模型; 最后, 通过实例对比分析验证了所提出模型的可行性和有效性, 为区间灰数预测问题提供新的思路和方法.

关键词: 灰色系统理论; 区间灰数; 正态分布; 信息转换; 随机模拟

中图分类号: N941.5

文献标志码: A

Gray prediction model of normal distribution interval grey number

YANG Jin-wei^{1,2}, XIAO Xin-ping¹, GUO Jin-hai^{1,3}

(1. School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China; 2. School of Mathematics and Information Science, Pingdingshan University, Pingdingshan 467000, China; 3. School of Information and Mathematics, Yangtze University, Jingzhou 434023, China. Correspondent: GUO Jin-hai, E-mail: xin3fei@21cn.com)

Abstract: Grey prediction mainly concerns uniform distribution interval grey number prediction recently. A grey prediction model of normal distribution interval grey number sequence is developed, based on grey hazy set evolutionary thinking and normal distribution which is the main existence way of uncertain information. Firstly, the information equivalence conversion between interval grey number and real numbers sequence family is achieved by using the normal distribution random function. Then, the GM(1,1) model of random sequences on the normal distribution interval grey number is given, the interval grey number prediction model is established by using maximum minimum values and the normal distribution “three sigma rule”. Through the example comparative analysis, the results show that the model is feasible and effective, providing new ideas and models for the interval grey number prediction.

Keywords: grey system; interval grey number; normal distribution; information conversion; random simulation

0 引言

以实数序列为建模对象的灰色预测模型在过去的30年间于社会经济、能源交通等领域得到了广泛且成功的应用^[1-2]. 但是, 随着科技的进步与发展, 研究对象的不确定性、复杂性等特征在不断增强, 传统的灰色预测模型受到越来越多的挑战. 灰数序列的预测问题对于人类认识和研究复杂系统未来发展趋势有重要意义, 是灰色系统理论的前沿课题之一. 近年来, 针对灰数序列的灰预测建模吸引了一批学者不断地投入精力进行研究, 并获得了一些初步成果. 文献[3]定义了区间灰数的标准形式, 构造了通过白部与

灰部表征的区间灰数预测模型; 文献[4]通过面积转换与坐标转换实现区间灰数序列和实数序列的信息等价转换, 建立了区间灰数的几何预测模型; 文献[5]以区间灰数核序列预测为基础, 依据灰度不减公理^[6], 以核为中心拓展得到了区间灰数的上界和下界; 文献[7]以区间灰数的核序列为趋势序列, 以灰数灰度思想定义了区间灰数的认知程度, 分别进行 GM(1,1) 模型预测, 合成得到了区间灰数预测模型, 文献[8]在此基础上研究了包含实数、区间灰数的混合型预测问题; 文献[9-10]分别以核与信息域、核与灰半径为工具进行了区间灰数预测; 文献[11]提出了在简单灰数

收稿日期: 2014-05-23; 修回日期: 2014-11-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51479151); 教育部高校博士点基金项目(20120143110001); 教育部人文社科基金项目(11YJC630155); 平顶山学院中青年骨干教师培养项目(20128024).

作者简介: 杨锦伟(1983-), 男, 博士生, 从事灰色系统理论与应用的研究; 肖新平(1965-), 男, 教授, 博士生导师, 从事系统工程与控制等研究.

合成运算时应同时关注对简单灰数论域的合成运算,定义了合成灰数的灰度,得到了合成灰数的线性收敛性;文献[12]在考虑合成灰数灰度性质的基础上,结合动力系统自忆性原理,分别建立核与灰度的Verhulst自忆性耦合预测模型,还原得到区间灰数模拟预测值。

上述研究主要从区间灰数的表征、几何特性、核与灰度等角度挖掘灰数序列的内蕴信息和发展规律,建立区间灰数灰预测模型,并在能源工程和社会经济中得到成功应用。但是这些研究都是在缺乏灰数取值分布信息的背景下进行的,对灰信息的利用仅处于灰朦胧集的胚胎子集阶段,并未考虑灰朦胧集的信息动态演化性。而作为灰理论基础的灰朦胧集^[13]具有胚胎子集、发育子集、成熟子集和实证子集4个阶段,这一思想贯穿区间灰数建模的整个过程,信息补充有助于获得更好的应用效果。灰信息分为不完备的灰信息和不确定的灰信息,不完备的灰信息可以不断进行信息补充。文献[14]在给出典型白化权函数的条件下,通过面积及坐标转换,建立了一种区间灰数预测模型。而不确定灰信息可以为模糊信息或概率信息,Tsaur^[15]将模糊集理论引入灰色GM(1,1)模型,建立了模糊灰色回归模型以实现区间灰数预测;谢乃明等^[16]在考虑灰数的概率分布的基础上,给出了灰数的一种排序方法,并用之于不确定性决策的研究中;Zhang^[17]运用随机模拟方法对灰色预测模型进行精度测试,也取得了良好效果。但是,针对在不确定灰信息为概率信息背景下的区间灰数预测的相关研究尚且没有。

文献[18]指出许多随机性方法体现了灰思想和灰观念,而灰色问题在一定条件下也可以从随机性角度去认识、研究和处理。现实世界中大量的不确定信息呈现了一定规律性的分布,正态分布是存在最为广泛的一种,具有普适性。本文考虑在数据信息的灰朦胧集演变过程中,以区间灰数真值服从正态概率分布作为灰信息补充,运用正态分布随机函数进行区间灰数数值覆盖的随机实现,将区间灰数序列转化为信息等效的白化实数序列族,构建正态分布区间灰数随机白化序列GM(1,1)模型,基于最大值最小值原理及正态分布“3 σ 法则”建立区间灰数预测模型。

本文关注灰数序列预测中不完备信息的有效补充和不确定信息的充分利用,进行正态分布区间灰数有效数值覆盖下的真值随机实现,通过实例分析、模型检验和误差分析验证了所提出模型的可行性和有效性。

1 理论基础

定义1 令 P 为命题, $p(\theta)$ 为命题信息,由于信息

的不完备和不确定性,导致只能获取命题可能取值的集合 D ,不能获取其确切值。该命题表现为 $p(\theta)$ 意义下的一个不确定数 \otimes , d° 为该命题的真实值^[13],则称

- 1) \otimes 为命题 P 意义下的灰数;
- 2) D 为 \otimes 的数值覆盖集合;
- 3) $p(\theta)$ 为灰数 \otimes 在 θ 点取值的可能性;
- 4) d° 为 \otimes 的真实值。

通常将灰数记为 $\forall \otimes \Rightarrow d^\circ \in D, \theta \in D, p(\theta)$ 。

由定义1可知,灰数 \otimes 是依赖于命题信息背景 $p(\theta)$ 的不知道确定数值的数,但是它有一个包含真值 d° 的数值覆盖集合 D ,当灰数 \otimes 参与数学运算时,由于真值未知,为保证信息不失,需尊重信息完整性。

本文考虑在数值覆盖集合 D 为非负连续覆盖集合(即区间)的情形下,命题真值 d° 取值可能性服从正态分布的区间灰数预测问题。

定义2 称灰数 \otimes 是连续型灰数,若 \otimes 的数值覆盖集合 D 为连续的区间集合,记为

$$\forall \otimes \Rightarrow d^\circ \in D, D = [a, \bar{a}], \theta \in D, p(\theta)$$

或简记为 $\otimes = [a, \bar{a}], p$ 。其中 a, \bar{a} 分别为灰数 \otimes 的下界和上界, $0 < a < \bar{a}$ 。

定义3 设连续型灰数 $\otimes = [a, \bar{a}], p$,若真值 $d^\circ \in [a, \bar{a}]$ 取值可能性服从正态分布,则称 $\otimes = [a, \bar{a}], p$ 为正态分布连续型灰数,或称正态分布区间灰数。

下文所讨论的均为正态分布区间灰数,简记为 $\otimes = [a, \bar{a}]$ 。

定义4 设正态分布区间灰数 $\otimes = [a, \bar{a}]$,则称 $\bar{\otimes} = E(\otimes) = \frac{1}{2}(a + \bar{a})$ 为灰数 \otimes 的核, $\sigma = \frac{1}{6}(\bar{a} - a)$ 为灰数 \otimes 的信息扩散度。

定理1 设正态分布区间灰数 $\otimes = [a, \bar{a}]$, $\bar{\otimes} = E(\otimes)$ 为灰数 \otimes 的核, σ 为灰数 \otimes 的信息扩散度,则 $a = \bar{\otimes} - 3\sigma, \bar{a} = \bar{\otimes} + 3\sigma$ 。

证明 由

$$\begin{cases} \bar{\otimes} = E(\otimes) = (a + \bar{a})/2, \\ \sigma = (\bar{a} - a)/6 \end{cases} \quad (1)$$

联立解方程组即得。□

定理2 设正态分布区间灰数 $\otimes = [a, \bar{a}]$,真值 $d^\circ \in [a, \bar{a}]$ 取值可能性服从正态分布 $N(\bar{\otimes}, \sigma^2)$,则 $[a, \bar{a}]$ 能够有效实现灰数 \otimes 的数值覆盖。

证明 由 $d^\circ \sim N(\bar{\otimes}, \sigma^2)$,则 d° 取值的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - \bar{\otimes})^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < \infty.$$

相应的分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(y - \bar{\otimes})^2}{2\sigma^2}\right] dy, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$\begin{aligned} \text{令 } \xi &= \frac{d^\circ - \bar{\otimes}}{\sigma}, \text{ 则 } \xi \sim N(0, 1), \text{ 从而有} \\ P(\bar{\otimes} - 3\sigma &\leq d^\circ \leq \bar{\otimes} + 3\sigma) = \\ P(-3\sigma &\leq \xi \leq 3\sigma) = \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} &\int_{-3\sigma}^{3\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \approx 0.9973. \end{aligned}$$

真值 d° 落在区间 $[a, \bar{a}]$ 外的概率只有 0.0027, 因为这一概率很小, 故表明 $[a, \bar{a}]$ 能够有效实现灰数 \otimes 的数值覆盖. \square

定义 5 由正态分布区间灰数按一定顺序构成的序列称为正态分布区间灰数序列, 记作

$$X(\otimes) = (\otimes_1, \otimes_2, \dots, \otimes_n),$$

$$\otimes_k \in [a_k, \bar{a}_k], a_k < \bar{a}_k, k = 1, 2, \dots, n.$$

其中: a_k 和 \bar{a}_k 分别称为灰数 \otimes_k 的下界和上界; $X(\otimes)$ 中所有灰数核组成的序列称为 $X(\otimes)$ 的核序列, 记为 $X(\bar{\otimes}) = (\bar{\otimes}_1, \bar{\otimes}_2, \dots, \bar{\otimes}_n)$; $X(\otimes)$ 中所有灰数的扩散度组成的序列称为扩散度序列, 记为 $X(\sigma) = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

2 模型构建

2.1 建模思想

采用序列转换方法构建区间灰数预测模型需要遵循信息等价性与数据完整性规则^[19], 引入蒙特卡罗法思想, 将正态分布区间灰数序列转变为相应的实数序列族, 构建区间灰数预测模型, 需要遵循下述信息转换原则:

- 1) 区间灰数序列与转换后的实数序列族具有同等信息量——信息等价性;
- 2) 转换所得实数序列族需同时包含区间灰数上界和下界信息——数据完整性.

由定理 2 可知: 将正态分布区间灰数进行计算机随机模拟, 产生服从正态分布的随机数, 约 99.73% 的取值都落在以 $\bar{\otimes}$ 为中心的 3σ 区间内, 即区间灰数 $[a, \bar{a}]$ 能够有效实现灰数 \otimes 的数值信息覆盖, 这表明信息转换过程遵循了信息等价性原则; 同时, 转换所得实数序列族每个节点上的随机数最大值和最小值对应了区间灰数的上界和下界信息, 这保证了信息转换过程中的数据完整性.

在满足上述原则的基础上, 通过计算机随机模拟真值服从正态分布的区间灰数的多次“实现”, 保证了区间灰数序列与实数序列族的信息等效转换.

在此基础上, 进行正态分布区间灰数预测建模的基本思想为: 给定正态分布区间灰数序列 $X(\otimes) = (\otimes_1, \otimes_2, \dots, \otimes_n)$; 求其核序列和扩散度序列; 对该序列进行服从正态分布的 m 次随机实现, 对每次生成的白化实数序列 $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}) (i = 1, 2, \dots, m)$ 进行 GM(1,1) 建模, 共得到 m 组白化实数序列的灰预测

结果; 对第 k 个位置的 m 个模拟值 $\hat{x}_{k1}, \hat{x}_{k2}, \dots, \hat{x}_{km}$, 求其最小值、最大值, 分别作为区间灰数 \otimes_k 预测值的上下界; 或者, 进一步对 $\hat{x}_{k1}, \hat{x}_{k2}, \dots, \hat{x}_{km}$ 进行频数分析, 在符合正态分布的条件下, 求得期望 Ex_k 及标准差 σ_k , 得到 $[Ex_k - 3\sigma_k, Ex_k + 3\sigma_k]$ 为区间灰数 \otimes_k 的预测值. 建模预测原理如图 1 所示.

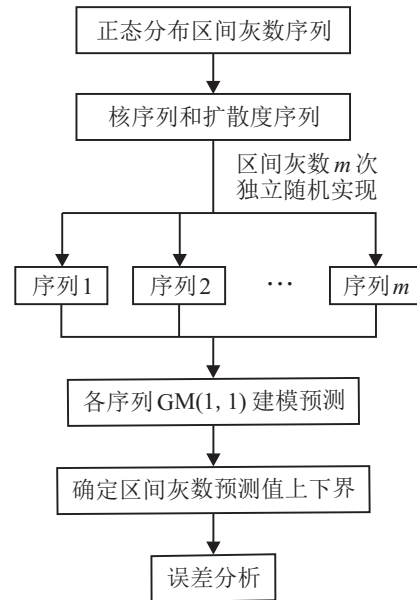


图 1 预测原理

2.2 正态分布区间灰数序列的随机白化序列族转换及 GM(1,1) 建模

记正态分布区间灰数序列 $X(\otimes) = (\otimes_1, \otimes_2, \dots, \otimes_n)$, $\otimes_k \in [a_k, \bar{a}_k], a_k < \bar{a}_k, k = 1, 2, \dots, n$. 由式(1)计算可得核序列 $X(\bar{\otimes}) = (\bar{\otimes}_1, \bar{\otimes}_2, \dots, \bar{\otimes}_n)$ 及扩散度序列 $X(\sigma) = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, 其中

$$\begin{aligned} \bar{\otimes}_k &= (a_k + \bar{a}_k)/2, \\ \sigma_k &= (\bar{a}_k - a_k)/6, \\ k &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

分别以核序列及扩散度序列为期望和标准差序列, 利用 Matlab 中产生正态分布随机数的函数 normrnd(mu, sigma) 对区间灰数序列进行 m 次随机实现, 得到正态分布区间灰数的 m 个随机白化序列.

设 $X(\otimes)$ 的一次正态分布随机实现白化实数序列为 $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$, 由 $x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$, 得 $x^{(0)}$ 的时间响应函数为

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(1)}(k+1) &= \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-ak} + \frac{b}{a}, \\ k &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned} x^{(1)}(1) &= x^{(0)}(1), \\ x^{(1)}(k) &= \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), \\ z^{(1)}(k) &= 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1), \end{aligned}$$

$$k = 2, 3, \dots, n.$$

其还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) = e^{-ak} \frac{e^a - 1}{a} (b - ax^{(0)}(1)). \quad (3)$$

式(3)即为区间灰数正态分布随机数白化实数序列的GM(1,1)预测模型.

2.3 正态分布区间灰数预测

正态分布区间灰数预测需要预测区间灰数的上界和下界,根据定理2和原则1)、原则2),正态分布区间灰数预测值的上下界有两种预测方案.

方案1,对第k个位置的m个模拟值 $\hat{x}_{k1}, \hat{x}_{k2}, \dots, \hat{x}_{km}$,分别求其最大值 $\max\{\hat{x}_{k1}, \hat{x}_{k2}, \dots, \hat{x}_{km}\}$ 、最小值 $\min\{\hat{x}_{k1}, \hat{x}_{k2}, \dots, \hat{x}_{km}\}$ 作为区间灰数 \otimes_k 预测值的上下界,即 $\hat{\otimes}_k = [\hat{a}_k, \hat{b}_k]$,其中

$$\begin{cases} \hat{a}_k = \min\{\hat{x}_{k1}, \hat{x}_{k2}, \dots, \hat{x}_{km}\}, \\ \hat{b}_k = \max\{\hat{x}_{k1}, \hat{x}_{k2}, \dots, \hat{x}_{km}\}. \end{cases} \quad (4)$$

方案2,对第k个位置的m个模拟值 $\hat{x}_{k1}, \hat{x}_{k2}, \dots, \hat{x}_{km}$ 进行频数分析,在符合正态分布的条件下,求得期望 Ex_k 及标准差 $\hat{\sigma}_k$,由“3 σ 法则”,令 $Ex_k \pm 3\hat{\sigma}_k$ 分别作为区间灰数预测值的上下界,即得到

$$\hat{\otimes}_k = [Ex_k - 3\hat{\sigma}_k, Ex_k + 3\hat{\sigma}_k]. \quad (5)$$

上述方案中m的值均通过数值实验来确定.

2.4 模型检验

1) GM(1,1)建模后验差比检验.

设 $x^{(0)}$ 为原始序列, $\hat{x}^{(0)}$ 为模型序列, $q^{(0)}$ 为残差序列,则 $x^{(0)}$ 的均值与方差分别为

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{(0)}(k), \\ S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x^{(0)}(k) - \bar{x})^2. \end{cases} \quad (6)$$

$q^{(0)}$ 的均值与方差分别为

$$\begin{cases} \bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q^{(0)}(k), \\ S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (q^{(0)}(k) - \bar{q})^2. \end{cases} \quad (7)$$

后验差比值为

$$C = S_2/S_1. \quad (8)$$

2) 残差检验.

定义正态分布区间灰数序列各灰元上下界的相对误差

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_k = \frac{|\bar{a}_k - \hat{a}_k|}{\bar{a}_k} \times 100\%, \\ \underline{\varepsilon}_k = \frac{|\underline{a}_k - \hat{a}_k|}{\underline{a}_k} \times 100\%. \end{cases} \quad (9)$$

模型平均相对误差(MRE)为

$$\varepsilon(X(\otimes)) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (\bar{\varepsilon}_k + \underline{\varepsilon}_k). \quad (10)$$

3 实例分析

利用文献[20]的具体实例,进行区间灰数预测及对比分析.

例1 城市外来工数量的区间灰数预测问题^[20].某市2004~2009年外来工数量如表1所示.

	年份					
	2004	2005	2006	2007	2008	2009
灰数 \otimes_1	\otimes_2	\otimes_3	\otimes_4	\otimes_5	\otimes_6	
人数 [58,70]	[75,88]	[89,103]	[114,132]	[135,155]	[161,183]	

以2004~2008年数据为原始数据进行建模,以2009年数据进行预测分析.

Step 1: 计算正态分布区间灰数序列的核序列和扩散度序列

$$X(\bar{\otimes}) = (64, 81.5, 96, 123, 145),$$

$$X(\sigma) = (2, 2.17, 2.33, 3, 3.33).$$

以 $X(\bar{\otimes})$ 为期望序列, $X(\sigma)$ 为标准差序列,进行m次独立随机试验,获取随机白化序列,这里取m从100到3000,间隔100,进行误差分析.

Step 2: 以任意一次区间灰数的随机实现序列为对象,进行GM(1,1)建模.

Step 3: 按照式(4)和(5)分别计算得到方案1和方案2区间灰数上下界的预测值.

Step 4: 按照式(8)~(10)进行误差分析及模型检验.

以 $m = 1000$ 时为例,对模型的随机白化序列灰色预测进行后验差比检验,对节点预测值进行正态分布检验,分析建模过程的合理性和适用性.

后验差比分布如图2所示,1000个预测序列中96.6%的序列 $c \leq 0.15$,3.4%的序列 $0.15 < c \leq 0.21$,均为一级精度($c \leq 0.35$)序列,预测效果优秀,这表明对正态分布区间灰数序列进行随机白化灰色建模是可行的、适用的.

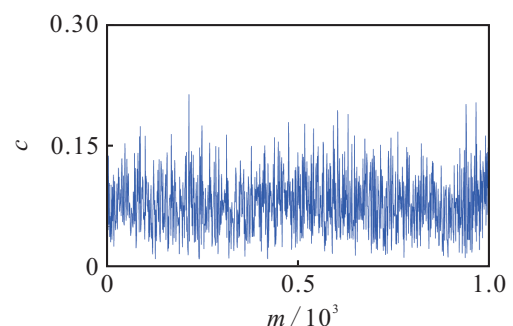


图2 后验差比分布

以方案1为例, 6个区间灰数预测值的频数分布如图3所示, 经 lillietest 函数检验均服从正态分布, 这表明正态分布区间灰数的随机白化序列 GM(1,1) 建模预测值仍服从正态分布, 建模方案是合理的。

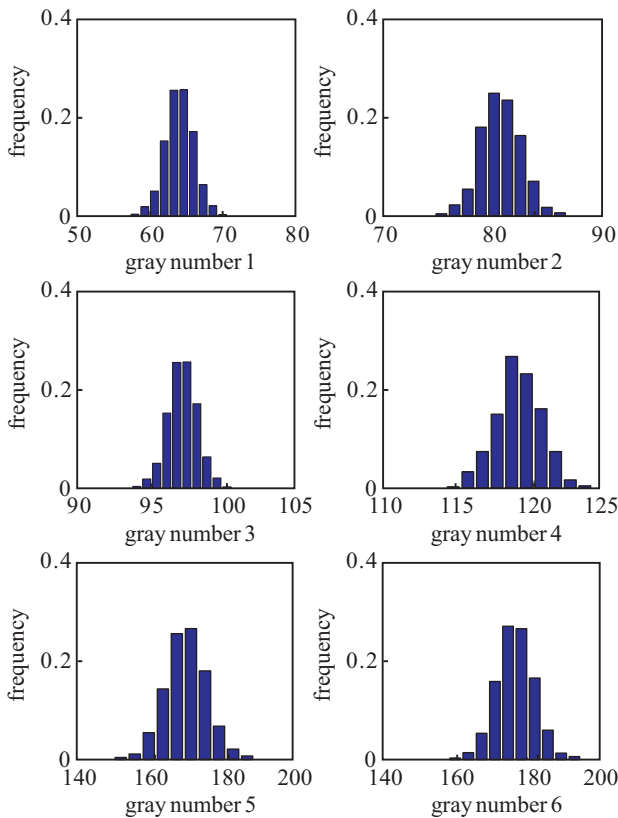


图3 各区间灰数随机预测值的频数分布

令 m 从 100 到 3000, 间隔 100, 进行建模预测, 其误差分析如图4所示。

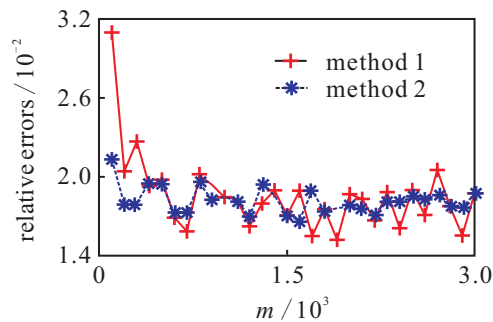


图4 随机次数 m 与模型误差关系

从图4可以看出, 当随机次数 $m > 500$ 后, 方案1和方案2的平均相对误差小于2.1%, 均达到较高精度, 可进行建模预测。方案1的误差具有一定的随机性, 在方案2的误差附近波动, 这是模型随机性的表现; 而方案2的误差则具有一定的稳定性, 体现了“ 3σ 法则”约束优化的有效性。

以模型误差稳定后, m 从 1000 到 3000, 间隔 100 的 21 次预测结果的均值作为最终输出预测值, 区间灰数序列的预测值及误差对比结果见表2。

表2 预测值及误差分析

年份	实际值	文献[20]方法预测值	方案1预测值	方案2预测值
2004	[58,70]	[61.16,72.02]	[57.33,70.90]	[57.99,70.01]
2005	[75,88]	[74.62,87.32]	[74.58,86.60]	[75.23,86.06]
2006	[89,103]	[91.04,105.90]	[93.27,102.85]	[93.87,102.37]
2007	[114,132]	[111.06,128.45]	[114.16,124.58]	[114.81,123.98]
2008	[135,155]	[135.50,155.84]	[136.30,154.50]	[136.95,153.66]
MRE		2.09	1.66	1.77
2009	[161,183]	[165.31,189.11]	[160.91,193.94]	[161.68,192.04]
MRE		3.01	3.02	2.68

从表2可以看出, 方案1和方案2的平均相对误差均小于1.8%, 优于文献[20]方法的2.09%, 在对2009年预测值的检验中, 方案1与文献[20]的预测效果相当, 而优化后具有稳定性的方案2的误差为2.68%, 优于文献[20]的3.01%。故可采用方案2为最终预测方案, 其预测效果达到一级精度。

4 结论

随着科技的进步和人类对事物和复杂系统认识的深入, 灰色理论的研究重心已从传统灰色预测和决策模型发展到灰数信息背景下的预测与决策问题研究, 对于无分布信息和均匀分布背景下的区间灰数预测已有较多的深入研究。本文基于灰朦胧集演化思想, 提出了基于正态分布背景的区间灰数随机实现预测模型, 寻求区间灰数多次独立随机实现白化序列的 GM(1,1) 建模, 通过取各节点多次预测值的上下边界为区间灰数预测值及确定多次预测值的期望及标准差, 由“ 3σ 法则”求取区间灰数预测值, 实现了连续区间灰数的预测。通过实例分析, 验证了该模型的可行性、合理性和有效性, 为区间灰数预测问题提供了新的思路和模型。

参考文献(References)

- [1] 肖新平, 毛树华. 灰预测与决策方法[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 3-11.
(Xiao X P, Mao S H. Grey forecasting and decision methods[M]. Beijing: Science Press, 2013: 3-11.)
- [2] Liu S F, Forrest J, Yang Y J. A brief introduction to grey systems theory[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2012, 2(2): 89-104.
- [3] 方志耕, 刘思峰, 陆芳, 等. 区间灰数表征与算法改进及其 GM(1,1) 模型应用研究[J]. 中国工程科学, 2005, 7(2): 57-61.
(Fang Z G, Liu S F, Lu F, et al. Study on improvement of token and arithmetic of interval grey numbers and its GM(1,1) model[J]. Engineering Science, 2005, 7(2): 57-61.)
- [4] Zeng B, Liu S F, Xie N M. Prediction model of interval grey number based on DGM(1,1)[J]. J. of Systems Engineering

- and Electronics, 2010, 21(4): 598-603.
- [5] 曾波. 基于核和灰度的区间灰数预测模型[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(4): 111-114.
(Zeng B. Prediction model of interval grey number based on kernel and degree of greyness[J]. Systems Engineering and Electronics, 2011, 33(4): 111-114.)
- [6] 刘思峰, 方志耕, 谢乃明. 基于核和灰度的区间灰数运算法则[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(2): 313-316.
(Liu S F, Fang Z G, Xie N M. Algorithm rules of interval grey numbers based on the "kernel" and the degree of greyness of grey numbers[J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 32(2): 313-316.)
- [7] 袁潮清, 刘思峰, 张可. 基于发展趋势和认知程度的区间灰数预测[J]. 控制与决策, 2011, 26(2): 313-315.
(Yuan C Q, Liu S F, Zhang K. Prediction model for interval grey number based on trend and cognition[J]. Control and Decision, 2011, 26(2): 313-315.)
- [8] 吴利丰, 刘思峰, 闫书丽. 区间灰数序列的灰色预测模型构建方法[J]. 控制与决策, 2013, 28(12): 1912-1915.
(Wu L F, Liu S F, Yan S L. Grey prediction model for hybrid sequence[J]. Control and Decision, 2013, 28(12): 1912-1915.)
- [9] 杨德岭, 刘思峰, 曾波. 基于核和信息域的区间灰数 Verhulst 模型[J]. 控制与决策, 2013, 28(2): 264-268.
(Yang D L, Liu S F, Zeng B. Verhulst model of interval grey number based on kernel and information field[J]. Control and Decision, 2013, 28(2): 264-268.)
- [10] 刘解放, 刘思峰, 方志耕. 基于核与灰半径的连续区间灰数预测模型[J]. 系统工程, 2013, 31(2): 61-64.
(Liu J F, Liu S F, Fang Z G. Prediction model of continuous interval grey number based on the kernel and gray radius[J]. Systems Engineering, 2013, 31(2): 61-64.)
- [11] 王大鹏, 汪秉文, 李睿凡. 考虑合成灰数灰度性质的改进区间灰数预测模型[J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(5): 1013-1017.
(Wang D P, Wang B W, Li R F. Improved prediction model of interval grey number based on the characteristics of grey degree of compound grey number [J]. Systems Engineering and Electronics, 2013, 35(5): 1013-1017.)
- [12] 郭晓君, 刘思峰, 方志耕. 基于合成灰数灰度的区间灰数自忆性预测模型[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(5): 76-81.
(Guo X J, Liu S F, Fang Z G. Self-memory prediction model of interval grey number based on grey degree of compound grey number[J]. Systems Engineering and Electronics, 2014, 36(5): 76-81.)
- [13] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 40-46.
(Deng J L. The foundation of grey system [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2002: 40-46.)
- [14] 曾波, 刘思峰, 崔杰. 白化权函数已知的区间灰数预测模型[J]. 控制与决策, 2010, 25(12): 1815-1819.
(Zeng B, Liu S F, Cui J. Prediction model for interval grey number with known weight function[J]. Control and Decision, 2010, 25(12): 1815-1819.)
- [15] Tsaur R C. The development of an interval grey regression model for limited time series forecasting[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(2): 1200-1206.
- [16] 谢乃明, 刘思峰. 考虑概率分布的灰数排序方法[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(4): 169-175.
(Xie N M, Liu S F. On comparing grey numbers with their probability distributions[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2009, 29(4): 169-175.)
- [17] Zhang K. Random simulation method for accuracy test of grey prediction model[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2013, 3(1): 26-34.
- [18] 寇进忠. 随机性方法与灰色性方法的互补问题[J]. 系统辩证学学报, 1998, 6(2): 81-83.
(Kou J Z. Complementarity problem of random method and gray method[J]. J of Systemic Dialectics, 1998, 6(2): 81-83.)
- [19] 曾波, 刘思峰. 一种基于区间灰数几何特征的灰数预测模型[J]. 系统工程学报, 2011, 26(2): 174-180.
(Zeng B, Liu S F. Prediction model of interval grey number based on its geometrical characteristics[J]. J of Systems Engineering, 2011, 26(2): 174-180.)
- [20] 孟伟, 刘思峰, 曾波. 区间灰数的标准化及其预测模型的构建与应用研究[J]. 控制与决策, 2012, 27(5): 773-776.
(Meng W, Liu S F, Zeng B. Standardization of interval grey number and research on its prediction modeling and application[J]. Control and Decision, 2012, 27(5): 773-776.)

(责任编辑: 齐 霖)