

基于策略迭代的连续时间系统的随机线性二次最优控制

王涛^{1,2}, 张化光¹

(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004; 2. 沈阳师范大学 计算机与数学基础教学部, 沈阳 110034)

摘要: 针对模型参数部分未知的随机线性连续时间系统, 通过策略迭代算法求解无限时间随机线性二次(LQ)最优控制问题. 求解随机LQ最优控制问题等价于求随机代数Riccati方程(SARE)的解. 首先利用伊藤公式将随机微分方程转化为确定性方程, 通过策略迭代算法给出SARE的解序列; 然后证明SARE的解序列收敛到SARE的解, 而且在迭代过程中系统是均方可镇定的; 最后通过仿真例子表明策略迭代算法的可行性.

关键词: 随机代数Riccati方程; 随机微分方程; 策略迭代; 最优控制

中图分类号: TP273+.1

文献标志码: A

Stochastic linear quadratic optimal control for continuous-time systems based on policy iteration

WANG Tao^{1,2}, ZHANG Hua-guang¹

(1. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. Department of Computer and Mathematics Teaching, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China. Correspondent: WANG Tao, E-mail: wtnuhai@163.com)

Abstract: The stochastic linear quadratic(LQ) optimal control problem is solved for stochastic linear continuous-time systems with the partly unknown parameter by using the policy iteration approach. The feasibility of the stochastic LQ optimal control problem is equivalent to the solvability of the stochastic algebra Riccati equation(SARE). Firstly, the stochastic differential equation is converted into the deterministic equation by using Itô formula, and the solution sequence of SARE is obtained by using the policy iteration approach. Then, convergence analysis is presented to prove that the solution sequence of SARE reaches the solution of SARE, and the proof of mean square stability of the systems in the process of iteration is also given. Finally, a simulation example is given to illustrate the feasibility of the policy iteration approach.

Keywords: stochastic algebra Riccati equation; stochastic differential equation; policy iteration; optimal control

0 引言

确定性系统的线性二次(LQ)最优控制问题由Kalman^[1]首次提出, 随后得到了迅速发展^[2-4]. 文献[5]采用策略迭代算法估计模型参数部分未知的连续时间系统的最优控制; 文献[6]针对模型参数完全未知的连续时间系统, 通过在线策略迭代算法求得无限时间LQ最优控制; 文献[7]通过一个新型的递归神经网络辨识器和单网络求解模型参数完全未知的非线性连续时间系统的近似最优控制.

随机LQ最优控制问题由Wonham^[8]开创. 文献[9]给出了一般化Riccati方程(GRE), 同时证明了有限时间随机LQ最优控制问题的可解性等价于GRE的

可解性. 文献[10]通过迭代算法求解有限时间随机LQ最优控制问题, 并给出了最优控制可解性的充分条件. 文献[11]采用迭代算法研究了连续型随机系统的变结构控制律. 文献[12]讨论了无限时间随机LQ最优控制, 给出了随机代数Riccati方程(SARE), 通过线性矩阵不等式求解SARE. 文献[13]利用拉格朗日乘子定理给出了带有约束条件的有限时间随机LQ最优控制存在的充要条件. 文献[14]通过克罗内克代数和 H -表示技术讨论了非线性时滞随机系统的稳定性.

本文通过策略迭代算法求解模型参数部分未知的随机LQ最优控制问题. 在迭代过程中构造SARE

收稿日期: 2014-05-30; 修回日期: 2014-12-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61034005); 国家863计划项目(2012AA040104); 辽宁省自然科学基金项目(201202201).

作者简介: 王涛(1979-), 男, 讲师, 博士生, 从事近似动态规划最优控制、神经网络控制的研究; 张化光(1959-), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能自适应控制、非线性递归神经网络的稳定性分析等研究.

的解序列和控制增益矩阵序列, 并证明了该解序列收敛到 SARE 的解, 同时系统仍是均方可镇定的. 最后通过仿真实例表明了算法的有效性.

1 问题陈述和转化

1.1 问题陈述

设随机线性连续时间系统的模型为

$$\begin{cases} dx(t) = \\ [Ax(t) + Bu(t)]dt + [Cx(t) + Du(t)]d\omega(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

其中: A, B, C, D 为常数矩阵, 且 $A, C \in R^{n \times n}$, $B, D \in R^{n \times m}$; $x(t) \in R^n$ 为系统的随机状态变量, $x(0)$ 为系统的初始状态; $u(t) \in R^m$ 为系统的控制输入; $\omega(t)$ 为定义在带有信息流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ 上的一维布朗运动, $\omega(0) = 0$; $\mathcal{F}_t = \sigma\{\omega(t) | 0 \leq t < \infty\}$.

任何一个控制过程都必须有一个度量其效果好坏的准则——值函数. 设系统 (1) 的值函数为

$$J(x_0, u(\cdot)) = E\left\{ \int_0^\infty (x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t))dt \right\}. \quad (2)$$

其中: Q, R 为常数矩阵, 且 $Q = Q' \geq 0, R = R' > 0$, $E(\cdot)$ 表示数学期望.

本文主要讨论如何确定控制 $u(t)$ 使系统的值函数 (2) 达到最小值, 同时使系统 (1) 均方可镇定, 为此引出以下定义.

定义 1^[12] 如果存在反馈控制 $u(t) = Kx(t)$ (K 是常数矩阵) 使系统 (1) 的状态 $x(t)$ 在初始条件 $x(0)$ 下满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} E(x'(t)x(t)) = 0$, 则称反馈控制 $u(t) = Kx(t)$ 是均方镇定的, 称 K 为均方镇定的控制增益矩阵.

定义 2^[12] 如果系统 (1) 存在均方镇定的反馈控制, 则称系统 (1) 是均方可镇定的.

本文假定系统 (1) 是均方可镇定的且可观的. 由于系统均方可镇定性概念在本文起到重要作用, 下面给出系统均方可镇定性定理.

引理 1^[12] 若系统 (1) 是均方可镇定的, 则:

1) 反馈控制 $u(t) = Kx(t)$ 是均方镇定的当且仅当存在正定矩阵 X , 使得

$$\begin{aligned} (A + BK)'X + X(A + BK) + \\ (C + DK)'X(C + DK) < 0. \end{aligned}$$

2) 对于任意矩阵 Y , 存在均方镇定的控制增益矩阵 K , 使得

$$\begin{aligned} (A + BK)'X + X(A + BK) + \\ (C + DK)'X(C + DK) + Y = 0 \end{aligned}$$

有唯一解, 且当 $Y > 0 (Y \geq 0)$ 时, $X > 0 (X \geq 0)$.

求解无限时间随机 LQ 最优控制问题的一个有效方法是求解如下 SARE 的解 P_* ^[8]:

$$\begin{cases} J(P) = \\ A'P + PA + C'PC + Q - \\ (PB + C'PD)(R + D'PD)^{-1}(B'P + D'PC) = 0, \\ R + D'PD > 0. \end{cases} \quad (3)$$

系统的最优值函数为 $\min J(x_0, u(\cdot)) = x_0'P_*x_0$, 最优控制为

$$u^*(t) = -(R + D'P_*D)^{-1}(B'P_* + D'P_*C)x(t).$$

当 $C = D = 0$ 时, 随机 LQ 最优控制问题转化为确定性 LQ 最优控制问题, 对应的 SARE 转化为代数 Riccati 方程 $A'P + PA + Q - PBR^{-1}B'P = 0$.

为了说明策略迭代算法, 下面给出 SARE 的等价形式. 令 $K = -(R + D'PD)^{-1}(B'P + D'PC)$, 代入式 (3), 可以得到 SARE 的一个等价形式

$$\begin{cases} J(P) = \\ (A + BK)'P + P(A + BK) + \\ (C + DK)'P(C + DK) + Q + K'RK = 0, \\ R + D'PD > 0. \end{cases} \quad (4)$$

注 1 因为系统 (1) 是均方可镇定的, 而 $Q = Q' \geq 0, R = R' > 0$, 所以 $Q + K'RK \geq 0$. 由引理 1 易知, SARE 存在唯一的半正定解 P_* .

1.2 问题转化

下面通过伊藤公式将随机 LQ 最优控制问题转化为确定性问题. 考虑一般的均方镇定的线性反馈控制 $u(t) = Kx(t)$, 将其代入随机微分方程 (1), 得到如下闭环系统:

$$\begin{aligned} dx(t) = \\ (A + BK)x(t)dt + (C + DK)x(t)d\omega(t). \end{aligned} \quad (5)$$

对 $f(t, x(t)) = x(t)x'(t)$ 应用伊藤公式, 得到

$$\begin{aligned} d(x(t)x'(t)) = \\ [(A + BK)x(t)x'(t) + x(t)x'(t)(A + BK)' + \\ (C + DK)x(t)x'(t)(C + DK)']dt + \\ [(C + DK)x(t)x'(t)(C + DK)']d\omega(t). \end{aligned} \quad (6)$$

令 $X(t) = E(x(t)x'(t))$, 对式 (6) 两端同时积分后取期望, 再求得

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A + BK)X(t) + X(t)(A + BK)' + \\ (C + DK)X(t)(C + DK)', \\ X(0) = X_0 = E(x(0)x'(0)). \end{cases} \quad (7)$$

其中: $X(t)$ 为确定性系统的状态变量, $X(0)$ 为系统 (7) 的初始状态.

系统的值函数(2)转化为

$$J(X_0, K) = \text{tr} \left\{ \int_0^\infty (Q + K'RK)X(t)dt \right\}. \quad (8)$$

随机LQ最优控制问题(1)、(2)转化为确定性最优控制问题(7)、(8).

2 策略迭代算法的推导及收敛性证明

无限时间随机LQ最优控制问题需要SARE的解,下面在系统模型中参数A未知的情况下,通过策略迭代算法求解SARE.在迭代过程中构造SARE的解序列,并且证明该解序列收敛到SARE的解 P_* ,同时在此过程中系统(1)是均方可镇定的.

2.1 策略迭代算法的推导

给定均方镇定的控制 $u(t) = Kx(t)$,则有

$$J(X(t), K) = \text{tr} \left\{ \int_t^\infty (Q + K'RK)X(s)ds \right\} = \text{tr} \{PX(t)\}. \quad (9)$$

其中P为如下方程的唯一解:

$$\begin{aligned} (A + BK)'P + P(A + BK) + \\ (C + DK)'P(C + DK) + Q + K'RK = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

系统的值函数(8)可以转化为

$$J(X(t), K) = \text{tr} \left\{ \int_t^{t+T} (Q + K'RK)X(s)ds \right\} + J(X(t+T), K). \quad (11)$$

由式(9)可知

$$\text{tr} \{PX(t)\} = \text{tr} \left\{ \int_t^{t+T} (Q + K'RK)X(s)ds \right\} + \text{tr} \{PX(t+T)\}. \quad (12)$$

下面给出策略迭代算法:给定均方镇定的初始控制 $u(t) = K_1x(t)$,有

$$\text{tr} \{P_i X(t)\} = \text{tr} \left\{ \int_t^{t+T} (Q + K_i'RK_i)X(s)ds \right\} + \text{tr} \{P_i X(t+T)\}, \quad (13)$$

$$K_{i+1} = -(R + D'P_i D)^{-1}(B'P_i + D'P_i C). \quad (14)$$

注2 通过策略迭代算法(13)、(14)求解无限时间随机LQ最优控制问题完全摆脱了系统模型(1)的参数矩阵A.

2.2 策略迭代算法收敛性证明

设值函数和控制增益矩阵按(13)、(14)迭代,由此可以得到SARE的解序列 $\{P_i\}_{i=1}^\infty$ 和控制增益矩阵序列 $\{K_i\}_{i=1}^\infty$.下面证明当 $i \rightarrow \infty$ 时,SARE的解序列 $\{P_i\}_{i=1}^\infty$ 收敛到SARE的解 P_* ,控制增益矩阵序列 $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ 是均方镇定的.

引理2 设反馈控制 $u(t) = K_i x(t)$ 是均方镇定的,则方程(13)的可解性等价于下式可解性:

$$\begin{aligned} (A + BK_i)'P_i + P_i(A + BK_i) + \\ (C + DK_i)'P_i(C + DK_i) + Q + K_i'RK_i = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

证明 给定均方镇定的控制增益矩阵 K_i ,对 $f(t, x(t)) = x'(t)P_i x(t)$ 应用伊藤公式,得到

$$\begin{aligned} d(x(t)'P_i x(t)) = \\ [x'(t)(A + BK_i)'P_i x(t) + x'(t)P_i(A + BK_i)x(t) + \\ x'(t)(C + DK_i)'P_i(C + DK_i)x(t)]dt + \\ [x'(t)(C + DK_i)'P_i x(t) + \\ x'(t)P_i(C + DK)x(t)]d\omega(t). \end{aligned}$$

等式两端同时积分后取期望得

$$\begin{aligned} E(x'(t+T)P_i x(t+T)) - E(x'(t)P_i x(t)) = \\ E \left\{ \int_t^{t+T} x'(s)(-Q - K_i'RK_i)x(s)ds \right\}. \end{aligned}$$

两端同时取迹,化简得

$$\text{tr} \{P_i X(t)\} = \text{tr} \left\{ \int_t^{t+T} (Q + K_i'RK_i)X(s)ds \right\} + \text{tr} \{P_i X(t+T)\}.$$

由式(15)解的唯一性可知,方程(13)的可解性等价于方程(15)的可解性,所以策略迭代算法(13)、(14)等价于迭代算法(14)、(15). \square

记 $A_i = A + BK_i$, $C_i = C + DK_i$,式(15)简化为 $A_i'P_i + P_i A_i + C_i'P_i C_i + Q + K_i'RK_i = 0$. (16)

定理1 设反馈控制 $u(t) = K_i x(t)$ 是均方镇定的,则由式(14)所确定的反馈控制 $u(t) = K_{i+1} x(t)$ 仍是均方镇定的.

证明 设

$$M_* = B'P_* + D'P_* C, N_* = R + D'P_* D,$$

其中 P_* 是SARE的解,SARE可简化为

$$A'P_* + P_* A + C'P_* C + Q - M_*'N_*^{-1}M_* = 0. \quad (17)$$

将式(16)两侧同减(17),化简得

$$\begin{aligned} A_i'(P_i - P_*) + (P_i - P_*)A_i + C_i'(P_i - P_*)C_i = \\ - (N_* K_i + M_*)'N_*^{-1}(N_* K_i + M_*), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} A_{i+1}'(P_i - P_*) + (P_i - P_*)A_{i+1} + \\ C_{i+1}'(P_i - P_*)C_{i+1} = \\ - (N_* K_{i+1} + M_*)'N_*^{-1}(N_* K_{i+1} + M_*) - \\ (K_{i+1} - K_i)'(R + D'P_i D)(K_{i+1} - K_i). \end{aligned} \quad (19)$$

因为 $N_* > 0$,由式(18)和引理1可知 $P_i > P_*$,所以 $R + D'P_i D > R + D'P_* D > 0$.由式(19)和引理1可知反馈控制 $u(t) = K_{i+1} x(t)$ 是均方镇定的. \square

定理2 由迭代算法(14)、(15)所确定的SARE的解序列 $\{P_i\}_{i=1}^\infty$ 收敛到SARE的解 P_* .

证明 由式(16)可知

$$\begin{aligned} A_{i-1}'P_{i-1} + P_{i-1}A_{i-1} + C_{i-1}'P_{i-1}C_{i-1} + \\ Q + K_{i-1}'RK_{i-1} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

将式(16)与(20)作差, 化简得

$$A'_i(P_{i-1} - P_i) + (P_{i-1} - P_i)A_i + C'_i(P_{i-1} - P_i)C_i = -(K_i - K_{i-1})'(R + D'P_{i-1}D)(K_i - K_{i-1}). \quad (21)$$

由定理1的证明可知 $P_{i-1} > P_*$, 则

$$R + D'P_{i-1}D > R + D'P_*D > 0.$$

由式(21)和引理1可知, $P_{i-1} - P_i > 0$, 即 $P_{i-1} > P_i > P_*$, 所以由迭代算法(14)、(15)所确定的 $\{P_i\}_{i=1}^\infty$ 是单调递减且有下界的序列.

令 $\lim_{i \rightarrow \infty} P_i = P_\infty$, 则有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = K_\infty = -(R + D'P_\infty D)^{-1}(B'P_\infty + D'P_\infty C).$$

在式(15)两侧取极限, 有

$$(A + BK_\infty)'P_\infty + P_\infty(A + BK_\infty) + (C + DK_\infty)'P_\infty(C + DK_\infty) + Q + K'_\infty RK_\infty = 0. \quad (22)$$

将 K_∞ 代入(22), 化简得

$$A'P_\infty + P_\infty A + C'P_\infty C + Q - (P_\infty B + C'P_\infty D) \times (R + D'P_\infty D)^{-1}(B'P_\infty + D'P_\infty C) = 0. \quad (23)$$

由SARE解的唯一性可知 $P_\infty = P_*$. \square

3 策略迭代算法的实现和系统仿真

在策略迭代过程中, 因为模型(1)的参数矩阵 A 的信息包含在系统状态 $X(t)$ 和 $X(t+T)$ 中, 所以矩阵 A 可以是未知的. 下面在矩阵 A 未知的条件下具体讨论策略迭代算法的实现, 并给出一个仿真实例.

3.1 策略迭代算法的实现

因为要对迭代算法(13)中 P_i 的值进行计算, 所以引入以下两个算子 $P \rightarrow \hat{P}, X \rightarrow \hat{X}$, 其中

$$\hat{P} = [p_{11} \ p_{12} \ \cdots \ p_{1n} \ p_{22} \ \cdots \ p_{nm}],$$

$$\hat{X} = [x_{11} \ 2x_{12} \ \cdots \ 2x_{1n} \ x_{22} \ \cdots \ x_{nn}].$$

由此可知

$$\text{tr}\{P_i X(t+T)\} = \hat{P}'_i \hat{X}(t+T),$$

$$\text{tr}\{P_i X(t)\} = \hat{P}'_i \hat{X}(t). \quad (24)$$

将式(24)代入(13), 化简得

$$\hat{P}'_i (\hat{X}(t) - \hat{X}(t+T)) = \text{tr}\left\{ \int_t^{t+T} (Q + K'_i RK_i) X(s) ds \right\}. \quad (25)$$

在式(25)中, 将 $\hat{X}(t) - \hat{X}(t+T)$ 作为回归向量, \hat{P}_i 作为未知的参数向量, 等号右端作为目标函数, 记为

$$d(\hat{X}, K_i) = \text{tr}\left\{ \int_t^{t+T} (Q + K'_i RK_i) X(s) ds \right\}. \quad (26)$$

系统(7)在时间区间 $[t, t+T]$ 内的状态值 $X(t)$ 可以通过引入克罗内克积将状态方程(7)转化为线性常微分方程获得, 未知参数向量 \hat{P}_i 可以通过最小二乘

法获得. 由于 \hat{P}_i 中含有 $n(n+1)/2$ 个未知参数, 至少建立 $n(n+1)/2$ 个方程. 记 $N = n(n+1)/2$, 则 \hat{P}_i 的最小二乘估计为

$$\hat{P}_i = (\tilde{X}\tilde{X}')^{-1}\tilde{X}Y. \quad (27)$$

其中

$$\tilde{X} = [\hat{X}^1(t) - \hat{X}^1(t+T) \ \cdots \ \hat{X}^N(t) - \hat{X}^N(t+T)],$$

$$Y = [d(\hat{X}^1, K_i) \ \cdots \ d(\hat{X}^N, K_i)]'.$$

策略迭代算法的实现如图1所示.

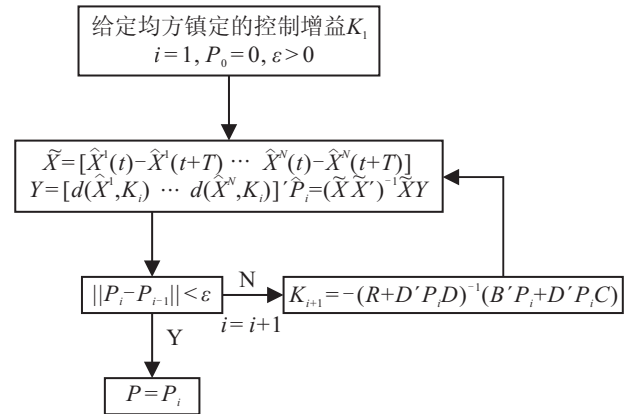


图1 策略迭代算法流程

3.2 系统仿真

通过仿真实例^[12]表明所提出的策略迭代算法的有效性. 设随机微分方程(1)的参数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -0.7617 & 0.2547 \\ 1.4740 & -0.6834 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1.4028 \\ 0.3269 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.1527 & 0.0029 \\ -0.0945 & -0.3586 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.7014 \\ 0.1634 \end{bmatrix}.$$

系统值函数(2)中的参数矩阵选为

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1.$$

选取时间间隔 $T = 0.1$ s, 给定初始镇定的控制增益矩阵 $K_1 = [-1.3388 \ -1.7186]$, 系统(6)的初始状态 $X(0) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

将策略迭代算法进行了20个循环, 得到SARE的解序列曲线如图2所示. 系统在第4次循环后得到的状态曲线如图3所示.

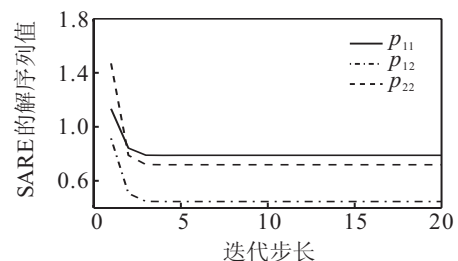


图2 SARE的解序列

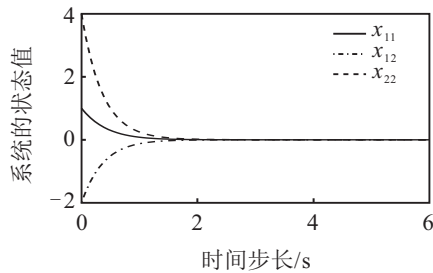


图3 系统的状态曲线

由图2可知, SARE的解序列在第4次迭代时已收敛到SARE的解, 且在更新的控制作用下, 系统(1)仍是均方可镇定的, 如图3所示。

4 结 论

无限时间随机线性二次最优控制问题的可解性等价于SARE的可解性。由于SARE的约束条件, 使得SARE不易求解, 虽然在参考文献中已给出相应的求解方法, 但是要求模型参数必须都是已知的, 而本文讨论的是在系统模型参数部分自由的条件下, 通过策略迭代算法求解SARE。在迭代过程中构造SARE的解序列, 并证明了解序列的收敛性, 且在控制增益矩阵更新中的系统仍是均方可镇定的。最后通过仿真实例表明了迭代算法的有效性。通过在线策略迭代算法求得模型参数完全未知的连续时间系统的LQ最优控制是下一步的研究方向。

参考文献(References)

- [1] Kalman R E. Contribution to the theory of optimal control[J]. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 1960, 5(2): 102-119.
- [2] Zhang H G, Liu D R, Luo Y H, et al. Adaptive dynamic programming for control-algorithms and stability[M]. London: Springer-Verlag, 2013: 223-255.
- [3] Werbos P J. "Approximate dynamic programming for real-time control and neural modeling" in handbook of intelligent control[M]. New York: Van Nostrand Reinhold, 1992: 493-525.
- [4] Murray J J, Cox C J, Lendaris G G, et al. Adaptive dynamic programming[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 2002, 32(2): 140-153.

- [5] Vrabie D, Pastravanu O, Abu-Khalaf M, et al. Adaptive optimal control for continuous-time linear systems based on policy iteration[J]. Automatica, 2009, 45(2): 477-484.
- [6] Jiang Y, Jiang Z P. Computational adaptive optimal control for continuous-time linear systems with completely unknown dynamics[J]. Automatica, 2012, 48(10): 2699-2704.
- [7] 崔黎黎, 刘杰, 张勇. 基于单网络ADP的一类未知非线性系统的近似最优控制[J]. 控制与决策, 2013, 28(9): 1423-1426.
(Cui L L, Liu J, Zhang Y. Near-optimal control of a class of unknown nonlinear systems based on single network ADP[J]. Control and Decision, 2013, 28(9): 1423-1426.)
- [8] Wonham W M. On a matrix riccati equation of stochastic control[J]. SIAM J on Control, 1968, 6(2): 312-326.
- [9] Rami M A, Moore J B, Zhou X Y. Indefinite stochastic linear quadratic control and generalized differential riccati equation[J]. SIAM J on Control, 2001, 40(4): 1296-1311.
- [10] Chen S P, Li X J, Zhou X Y. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs[J]. SIAM J on Control, 1998, 36(5): 1685-1702.
- [11] 刘永清, 邓飞其. 大型动力系统的理论与应用[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1998: 45-47.
(Liu Y Q, Deng F Q. Theory and application of large-scale dynamic systems[M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1998: 45-47.)
- [12] Mustapha A R, Zhou X Y. Linear matrix inequalities, riccati equations and indefinite stochastic linear quadratic controls[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(6): 1131-1143.
- [13] 黄玉琳, 张维海. 约束随机线性二次最优控制的研究[J]. 自动化学报, 2006, 32(2): 246-254.
(Huang Y L, Zhang W H. Study on stochastic linear quadratic optimal control with constraint[J]. Acta Automatica Sinica, 2006, 32(2): 246-254.)
- [14] Zhao X Y, Deng F Q. Moment stability of nonlinear stochastic systems with time-delays based on H -representation technique[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2014, 59(3): 814-819.

(责任编辑: 郑晓蕾)