第 30 卷 第 8 期
Vol. 30 No. 8

控 制 与 决 策
Control and Decision

2015 年 8 月
Aug. 2015

文章编号: 1001-0920 (2015) 08-1509-05 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2014.0873

随机非线性扰动下广义马氏跳变系统的控制器设计

王国良, 耿清思, 张 鹏

(辽宁石油化工大学 信息与控制工程学院，辽宁 抚顺 113001)

摘 要: 针对实际系统中非线性扰动以一定概率存在的情况, 讨论广义马氏跳变系统的控制问题. 首先, 运用Bernoulli变量描述系统中非线性扰动的存在与否, 建立相应的数学模型, 得到在上述一般条件下系统的随机容许性与解的存在唯一性条件. 然后, 以LMI形式给出模态依赖和模态独立控制器的存在条件. 与现有结果相比, 所得结果考虑了非线性扰动的存在概率, 具有较小的保守性. 最后, 通过数值例子验证了所得结果的有效性和优越性.

关键词: 广义马氏跳变系统；非线性扰动；线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Generalized stabilization of singular Markovian jump systems with stochastic nonlinear perturbation

WANG Guo-liang, *GENG Qing-si*, *ZHANG Peng*

(School of Information and Control Engineering，Liaoning Shihua University，Fushun 113001，China．Correspondent: WANG Guo-liang，E-mail：gliangwang@aliyun.com)

Abstract: The generalized stabilization problem of singular Markovian jump systems(SMJSs) with stochastic nonlinear perturbation is discussed, where the existence of nonlinear perturbation belongs to some probability. By exploiting the Bernoulli variable to describe whether the nonlinear perturbation exists or not, a kind of model for such systems is firstly established. Based on the obtained criteria, new sufficient conditions for the existence of both mode-dependent and mode-independent controllers are given as strict linear matrix inequalities(LMIs). Different from the existing results, several general conditions on stochastic admissibility depending on such a probability are developed, where the uniqueness and sufficiency of solution is also guaranteed. Because of such a probability considered, the corresponding results are less conservative. Finally, numerical examples illustrate the utility and superiority of the presented results.

Keywords: singular Markovian jump systems；nonlinear perturbation；linear matrix inequality

0 引 言

在实际中, 许多系统常常遇到内部元件发生故障及环境突变而导致系统内部结构发生随机变化的现象. 这种突变现象可以用马尔科夫过程进行准确描述, 其相应的系统称为马尔科夫跳变系统, 简称马氏跳变系统[1-7]. 另一方面, 广义系统是比正常系统更具一般性的系统, 可以很好地描述许多实际系统, 如经济系统、电力系统、网络系统等众多领域. 近几十年来, 广义系统理论得到了飞速发展, 产生了许多非常有价值的成果. 当广义系统的结构和参数发生突变时, 其原有确定系统的描述方式便存在局限性. 此时, 采用广义马氏跳变系统可对其进行很好的描述. 近年来, 这类系统已逐渐成为控制领域中的研究热点之一, 得到了众多学者的广泛关注[8-13].

特别地, 当所研究的系统为广义系统时, 上述文献所涉及的系统都是线性广义系统. 当广义系统存在非线性扰动时, 相关的理论结果不多. 文献 [14] 讨论了确定广义系统在非线性扰动条件下的稳定性问题, 给出了系统解的存在唯一性充分条件. 在上述文献基础上, 文献 [15] 进一步考虑了奇异摄动系统在含有非线性扰动时的相关问题. 当所研究的系统含有跳变参数时, 文献 [16] 讨论了非线性马氏奇异摄动系统的鲁棒稳定性问题. 通过分析上述文献, 可以看出所讨论的广义系统中非线性扰动始终作用于系统. 然而, 现

收稿日期: 2014-06-04；**修回日期:** 2014-08-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61104066, 61374043, 61473140)；中国博士后科学基金项目(2012M521086)；辽宁省高等学校优秀人才支持计划项目(LJQ2013040).

作者简介: 王国良(1981−), 男, 副教授, 博士, 从事广义马尔科夫系统的分析与控制等研究；耿清思(1992−), 男, 本科生, 从事广义马尔科夫系统的研究.

实中的许多系统, 比如网络控制系统, 由于网路诱导时滞、数据包丢失、传输数据错序等因素, 使得系统中的数据是以一定的概率获得(既不时时可得, 也不始终得不到). 因此, 研究系统中的数据在满足上述一般情况下的相关问题具有一定的理论价值和实际应用意义. 当广义系统中非线性扰动不始终作用于系统, 而是以一定概率存在时, 如何对其进行分析是一个需要首先解决的问题. 目前, 还没有相关文献对此相关问题进行报道.

本文研究非线性扰动以一定概率作用于广义马氏跳变系统时的控制问题. 首先运用Bernoulli随机变量对非线性扰动存在与否进行合理描述, 建立相应的非线性广义马氏跳变系统模型. 基于所得模型, 讨论了广义马氏跳变系统的非线性扰动在上述一般条件下系统的随机容许性问题和解的存在唯一性问题. 可以看出, 所得结果与非线性扰动的存在概率密切相关. 与完全忽略非线性扰动存在概率的方法相比, 本文所得结果具有较小的保守性, 能够更有效地解决实际中出现的问题, 实际应用范围更广泛. 在所得结果基础上, 进一步给出了模态依赖控制器和模态独立控制器的线性矩阵不等式求解条件. 最后通过数值例子验证了所得结果的有效性和优越性.

1 问题描述

考虑如下一类带有时变非线性扰动的广义马氏跳变系统:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t)=A(\eta_t)x(t)+\alpha(t)f(t,x(t),\eta_t)+B(\eta_t)u(t), \\ x(0)=\phi(0). \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t)\in \boldsymbol{R}^n$ 为状态向量, $u(t)\in \boldsymbol{R}^m$ 为控制输入; $A(\eta_t)$ 和 $B(\eta_t)$ 分别为适当维数的系统矩阵; 奇异矩阵 $E\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, 满足 $\mathrm{rank}(E)=r<n$.

马尔科夫过程 $\{\eta_t, t\geqslant 0\}$ 在离散集合 $\boldsymbol{S}=\{1,2,\cdots,N\}$ 内取值, 其转移概率定义如下:

$$\boldsymbol{P}\{\eta_{t+h}=j|\eta_t=i\}=\begin{cases}\pi_{ij}h+o(h),\ j\neq i; \\ 1+\pi_{ii}h+o(h),\ j=i.\end{cases} \tag{2}$$

其中: $\lim\limits_{h\to 0^+}(o(h)/h)=0$, λ_{ij} 为转移速率, 当 $i\neq j$ 时, $\pi_{ij}>0$ 且 $\pi_{ii}=-\sum\limits_{j\neq i}\pi_{ij}$. 对于任意 $\eta_t=i\in\boldsymbol{S}$, 非线性扰动 $f_i(t,x)$ 满足 $f_i(t,0)=0, \forall t\geqslant 0$ 和如下李普希兹条件:

$$\|f_i(t,x)-f_i(t,\tilde{x})\|\leqslant \gamma_i\|F_i(x-\tilde{x})\|, \tag{3}$$

$\gamma_i>0$, $x(t)\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, $\tilde{x}(t)\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$. 与文献[14-16]不同, 本文中的非线性扰动是以一定概率存在于系统(1), 可采用Bernoulli变量 $\alpha(t)$ 对其进行描述. 具体定义如下:

$$\alpha(t)=\begin{cases}1,\ \text{系统(1)存在非线性扰动}; \\ 0,\ \text{系统(1)没有非线性扰动}.\end{cases} \tag{4}$$

式(1)中Bernoulli随机变量与 η_t 相互独立并且均满足如下统计特性:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{P}\{\alpha(t)=1\}=\alpha, \\ &\boldsymbol{P}\{\alpha(t)=0\}=1-\alpha, \\ &\boldsymbol{P}\{(\alpha(t)-\alpha)^2\}=\alpha(1-\alpha).\end{aligned} \tag{5}$$

为了方便讨论, 令 $A(\eta_t)=A_i$, 其余类似.

本文的目的是设计如下模态依赖控制器:

$$u(t)=K_ix(t), \tag{6}$$

其中 K_i 为待确定的控制增益. 基于式(4)和(5), 定义如下系统:

$$\begin{cases}E\dot{x}(t)=A(\eta_t)x(t)+\alpha f(t,x(t),\eta_t)+B(\eta_t)u(t), \\ x(0)=\phi(0).\end{cases} \tag{7}$$

定义 1 当 $u(t)=0$ 时, 称系统(1)的解在 $[0,+\infty)$ 上存在且唯一, 如果系统(7)在 $[0,+\infty)$ 上存在且唯一的解.

定义 2[8-9] 当 $u(t)=0$ 时, 称系统(1)是正则、无脉冲的, 如果满足如下条件:

1) $\det(sE-A_i)\neq 0$ 成立, $\forall i\in\boldsymbol{S}$;

2) $\det(sE-A_i)=\mathrm{rank}(E)$ 成立, $\forall i\in\boldsymbol{S}$.

注 1 $R^{n\times m}$ 表示 $n\times m$ 维的矩阵, $\deg(f(x))$ 表示 $f(x)$ 多项式的次数, $\det(\cdot)$ 表示行列式的值, $*$ 表示对称矩阵块中相应位置的转置, $\mathrm{rank}(M)$ 表示矩阵 M 的秩, $M^\star=M+M^{\mathrm{T}}$.

2 主要内容

定理 1 给定参数 $\gamma_i>0$, 系统(1)存在控制器(6)使相应闭环系统随机容许且在 $[0,+\infty)$ 上存在唯一解. 如果存在矩阵 $\tilde{P}_i>0$, $\tilde{Q}_i$, Y_i, 标量 $\tau>0$, 对所有 $i\in\boldsymbol{S}$ 满足如下条件:

$$\begin{bmatrix}\varOmega_{i1} & \sqrt{\alpha}X_i & \gamma_iX_i^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}} & \varPhi_{i1} \\ * & -\tau I & 0 & 0 \\ * & * & -\dfrac{1}{\tau}I & 0 \\ * & * & * & \varPhi_{i2}\end{bmatrix}<0. \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}&\varOmega_{i1}=(A_iX_i+B_iY_i)^\star+\pi_{ii}E\tilde{P}_jE^{\mathrm{T}}, \\ &\varPhi_{i1}=[\pi_{i1}X_i^{\mathrm{T}}E_R,\cdots,\pi_{i(i-1)}X_i^{\mathrm{T}}E_R, \\ &\qquad \pi_{i(i+1)}X_i^{\mathrm{T}}E_R,\cdots,\pi_{iN}X_i^{\mathrm{T}}E_R], \\ &\varPhi_{i2}=-\mathrm{diag}\{E_R^{\mathrm{T}}\tilde{P}_iE_R,\cdots,E_R^{\mathrm{T}}\tilde{P}_{i-1}E_R, \\ &\qquad E_R^{\mathrm{T}}\tilde{P}_{i+1}E_R,\cdots,E_R^{\mathrm{T}}\tilde{P}_NE_R\}, \\ &X_i=\tilde{P}_iE^{\mathrm{T}}+V\tilde{Q}_iU.\end{aligned}$$

矩阵 $U\in\boldsymbol{R}^{(n-r)\times n}$ 和 $V\in\boldsymbol{R}^{n\times(n-r)}$ 分别满足 $UE=0$ 和 $EV=0$, 奇异矩阵 E 分解为 $E=E_LE_R^{\mathrm{T}}$, 这里 $E_L\in\boldsymbol{R}^{n\times r}$ 和 $E_R\in\boldsymbol{R}^{n\times r}$ 分别为列满秩矩阵. 则模态依赖控制器(6)的控制增益求解如下:

$$K_i = Y_i X_i^{-1}. \tag{9}$$

证明　基于 $X_i=\tilde{P}_iE^{\mathrm{T}}+V\tilde{Q}_iU$, 由文献 [12] 可知

$$P_i = X_i^{-1} = \hat{P}_iE + U^{\mathrm{T}}\hat{Q}_iV^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

其中 $\hat{P}_i = \hat{P}_i^{\mathrm{T}}$, $|\hat{Q}_i| \neq 0$, 并且

$$X_i^{\mathrm{T}}(E^{\mathrm{T}}P_j)X_i = X_i^{\mathrm{T}}E_RE_L^{\mathrm{T}}\hat{P}_jE_LE_R^{\mathrm{T}}X_i = X_i^{\mathrm{T}}E_R(E_R^{\mathrm{T}}\tilde{P}_jE_R)^{-1}E_R^{\mathrm{T}}X_i. \tag{11}$$

从而在条件 (9) 前提下, 条件 (8) 蕴含

$$\begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{i1} & \sqrt{\alpha}X_i \\ * & -\tau I \end{bmatrix} < 0. \tag{12}$$

其中

$$\bar{\Omega}_{i1} = \Omega_{i1} + \tau\gamma_i^2X_i^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}}F_iX_i + \sum_{j\neq i}\pi_{ij}X_i^{\mathrm{T}}(E^{\mathrm{T}}P_j)X_i,$$

等价于

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_{i1} & \sqrt{\alpha}P_i^{\mathrm{T}} \\ * & -\tau I \end{bmatrix} < 0, \tag{13}$$

其中 $\tilde{\Omega}_{i1} = (A_iX_i + B_iY_i)^{\star} + \sum_{j\in \boldsymbol{S}}\pi_{ij}E^{\mathrm{T}}P_j$. 与此同时, 可知下式恒成立:

$$E^{\mathrm{T}}P_i = P_i^{\mathrm{T}}E \geqslant 0. \tag{14}$$

如果式 (8) 和 (9) 同时成立, 则称由控制器 (6) 形成的闭环系统随机容许并且在 $[0, +\infty)$ 上存在唯一解.

首先证明系统的正则、无脉冲特性.

既然 $\mathrm{rank}(E) = r < n$, 总存在非奇异矩阵 $M = [\ M_1^{\mathrm{T}}\ \ M_2^{\mathrm{T}}\ ]^{\mathrm{T}}$, $N = [\ N_1\ \ N_2\ ]$, 使得

$$MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ M\bar{A}_iN = \begin{bmatrix} \bar{A}_{i1} & \bar{A}_{i2} \\ \bar{A}_{i3} & \bar{A}_{i4} \end{bmatrix},$$

$$M^{-T}P_iN = \begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} \\ P_{i3} & P_{i4} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

将式 (14) 两边分别乘以 N^{T} 和 N, 可得

$$N^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}M^{-T}P_iN = N^{\mathrm{T}}P_i^{\mathrm{T}}M^{-1}MEN \geqslant 0, \tag{16}$$

从而可知 $P_{i2} = 0$. 同理, 不等式 (13) 中 $\tilde{\Omega}_{i1}$ 两边分别左乘 N^{T}, 右乘 N, 可得

$$(\bar{A}_{i4}^{\mathrm{T}}P_{i4})^{\star} + \tau\gamma_i^2N_2^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}}F_iN_2 < 0, \tag{17}$$

于是可知 $\bar{A}_{i4}$ 非奇异, 即矩阵对 $(E, \bar{A}_i)$ 正则、无脉冲.

下面证明解的存在唯一性问题. 设 $t_0 = 0$, 定义 Stopping Time 为 $t_{k+1}=\inf\{t>t_k : \eta_t\neq\eta_{t_k}\}, \forall k\geqslant 0$, 则 $\forall k\geqslant 0$, $\eta_t=\eta_{t_k}$ 对 $\forall t\in[t_k, t_{k+1})$ 恒成立, 且 $t_k\to\infty$, 当 $k\to\infty$. 首先证明 $\eta_t=i$ 时, 系统 (1) 在区间 $[t_0, t_1)$ 上有唯一解. 由于系统正则无脉冲, 存在非奇异矩阵满足

$$\tilde{M} = [\ \tilde{M}_1^{\mathrm{T}}\ \ \tilde{M}_2^{\mathrm{T}}\ ]^{\mathrm{T}},\ \tilde{N} = [\ \tilde{N}_1\ \ \tilde{N}_2\ ], \tag{18}$$

使得

$$\tilde{M}E\tilde{N} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \tilde{M}\bar{A}_i\tilde{N} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{i1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{M}^{\mathrm{T}}P_i\tilde{N} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{i1} & \tilde{P}_{i2} \\ \tilde{P}_{i3} & \tilde{P}_{i4} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

其中 $\tilde{P}_{i2} = 0$ 可由式 (14) 推出. 式 (13) 左右两边分别乘以 $\mathrm{diag}\{\tilde{N}^{\mathrm{T}}, I\}$ 及其转置, 可得

$$(\tilde{P}_{i4})^{\star} + \tau\gamma_i^2\tilde{N}_2^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}}F_i\tilde{N}_2 + \tau^{-1}\tilde{P}_{i4}^{\mathrm{T}}\tilde{P}_{i4} < 0, \tag{20}$$

等价于

$$\tau\gamma_i^2\tilde{N}_2^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}}F_i\tilde{N}_2 - \tau I_{n-r} + (\tau I_{n-r} + \tilde{P}_{i4})^{\mathrm{T}}\tau^{-1}(\tau I_{n-r} + \tilde{P}_{i4}) < 0, \tag{21}$$

从而有

$$\gamma_i^2\tilde{N}_2^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}}F_i\tilde{N}_2 - I_{n-r} < 0. \tag{22}$$

对于 $\forall i \in S$, 存在充分小正数 $\kappa > 0$ 使得

$$\|F_i\tilde{N}_2\| < \frac{1}{\gamma_i\sqrt{1+\kappa}}. \tag{23}$$

令 $\hat{M} = [\tilde{M}_1^{\mathrm{T}}\ \ \hat{M}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 有 $\hat{M}_2 = (\tilde{M}_2\tilde{M}_2^{\mathrm{T}})^{-1/2}\tilde{M}_2$, $\hat{x}(t) = [\hat{x}_1^{\mathrm{T}}(t)\ \ \hat{x}_2^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}} = \tilde{N}^{-1}x(t)$, 可知

$$\hat{M}E\tilde{N} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \hat{M}\bar{A}_i\tilde{N} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{i1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \tag{24}$$

此时闭环系统 (7) 等价于

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1(t) &= \tilde{A}_{i1}\hat{x}_1(t) + \alpha\tilde{M}_1f_i(t, \tilde{N}_1\hat{x}_1(t) + \tilde{N}_2\hat{x}_2(t)),\\ 0 &= \hat{x}_2(t) + \alpha\hat{M}_2f_i(t, \tilde{N}_1\hat{x}_1(t) + \tilde{N}_2\hat{x}_2(t)).\end{aligned} \tag{25}$$

由于 $\|\hat{M}_2\| = 1$, 当 $\forall\hat{x}_2(t), \hat{y}_2(t) \in R^{n-r}$ 时, 有

$$\|\hat{M}_2f_i(t, \tilde{N}_1\hat{x}_1 + \tilde{N}_2\hat{x}_2) - \hat{M}_2f_i(t, \tilde{N}_1\hat{x}_1 + \tilde{N}_2\hat{y}_2)\| \leqslant \gamma_i\|F_i\tilde{N}_2(\hat{x}_2(t) - \hat{y}_2(t))\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\kappa}}\|x_2(t) - \hat{y}_2(t)\|. \tag{26}$$

由不动点原理可知, 对于任意给定的 $\hat{x}_1(t)$, 可知式 (25) 中第 2 个方程有唯一解 $\hat{x}_2(t)=\Phi(\hat{x}_1, t)$. 式 (25) 中第 1 个方程解的存在唯一性问题可参见文献 [14]. 所以, 系统在给定初始条件 x_0 下在区间 $[t_0, t_1)$ 上有唯一解. 同理可证, 系统在 $[t_1, t_2)$ 上有唯一解, 最终证明在 $[0, +\infty)$ 上有唯一解.

最后, 证明闭环系统稳定性. 闭环系统 (1) 等价于

$$E\dot{x}(t) = A(\eta_t)x(t) + \alpha f(t, x(t), \eta_t) + B(\eta_t)u(t) + (\alpha(t) - \alpha)f(t, x(t), \eta_t). \tag{27}$$

对于系统 (27), 定义 Lyapunov 函数

$$V(x(t), t) = x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}P_ix(t). \tag{28}$$

对上述函数求取无穷算子, 并结合 S-procedure, 可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}V(t) = \\ &\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[\mathcal{E}V(x(t+\Delta), \eta_{t+\Delta}, t+\Delta) - \\ &V(x(t), \eta_t = i)] = \\ &x^{\mathrm{T}}(t)\Big[(\bar{A}_i^{\mathrm{T}}P_i)^{\star} + \sum_{j\in\boldsymbol{S}}\pi_{ij}E^{\mathrm{T}}P_j\Big]x(t) + \\ &2\alpha x^{\mathrm{T}}(t)P_i^{\mathrm{T}}f_i(t, x(t)) \leqslant \\ &x^{\mathrm{T}}(t)\Big[(\bar{A}_i^{\mathrm{T}}P_i)^{\star} + \sum_{j\in\boldsymbol{S}}\pi_{ij}E^{\mathrm{T}}P_j\Big]x(t) + \\ &2\alpha x^{\mathrm{T}}(t)P_i^{\mathrm{T}}f_i(t, x(t)) - \tau[f_i^{\mathrm{T}}(t, x(t))\times\end{aligned}$$

$$f_i(t,x(t))-\gamma_i^2x^{\rm T}(t)F^{\rm T}F_ix(t)]=\\ \xi^{\rm T}(t)\begin{bmatrix}\tilde{\Omega}_{i1} & \sqrt{\alpha}P_i^{\rm T}\\ * & -\tau I\end{bmatrix}\xi(t)<0, \quad (29)$$

其中 $\xi(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ f_i(t,x(t))\end{bmatrix}$. 由式 (13) 可知 (29) 成立, 所以, 闭环系统 (1) 是随机稳定的. □

注 2 由定理 1 可以看出, 非线性扰动的存在概率 α 包含其中, 即 $\alpha=1$ 表示非线性扰动始终存在, $\alpha=0$ 表示系统 (1) 没有非线性扰动, 从而可以说定理 1 考虑了非线性扰动的存在概率. 与没有考虑存在概率相比, 所得结果具有较小的保守性. 另一方面, 由于待求变量 τ 与 τ^{-1} 同时存在, 从而使不等式 (8) 存在非线性项, 不能直接求解. 然而, 非线性项 τ 与 τ^{-1} 可以利用现有的方法容易求解. 例如, 锥补线性化方法 (即 $\tau\bar{\tau}=1, \bar{\tau}=\tau^{-1}$) 和放缩法 (即 $-\tau^{-1}I\leqslant-2I+\tau$). 由文献 [7] 可知, 锥补线性化方法具有较小的保守性, 但相应的求解过称较复杂.

当系统 (1) 没有跳变参数时, 可得如下系统:

$$\begin{cases}E\dot{x}(t)=Ax(t)+\alpha(t)f(t,x(t))+Bu(t),\\ x(0)=\phi(0).\end{cases} \quad (30)$$

其相应的控制器为

$$u(t)=Kx(t). \quad (31)$$

推论 1 给定参数 $\gamma>0$, 系统 (30) 存在控制器 (31) 使相应闭环系统随机容许且在 $[0,+\infty)$ 上存在唯一解. 如果存在矩阵 $\tilde{P}>0, \tilde{Q}, Y$, 标量 $\tau>0$, 满足如下条件:

$$\begin{bmatrix}\Omega_1 & \sqrt{\alpha}X & \gamma X^{\rm T}F^{\rm T}\\ * & -\tau I & 0\\ * & 0 & -\dfrac{1}{\tau}I\end{bmatrix}, \quad (32)$$

则控制器 (31) 的控制增益为

$$K=YX^{-1}. \quad (33)$$

其中

$$\Omega_1=(AX+BY)^\star,\ X=\tilde{P}E^{\rm T}+V\tilde{Q}U.$$

当系统模态 η_t 不能时时可得时, 模态依赖控制器 (6) 将失效, 取而代之的是模态独立控制器

$$u(t)=Kx(t), \quad (34)$$

即对所有模态 $i\in\boldsymbol{S}$, 选取一个共同的控制器. 但要求相应的 Lyapunov 函数仍然是模态依赖的, 即利用模态依赖的 Lyapunov 函数设计模态独立控制器. 上述方法与直接利用模态独立 Lyapunov 函数求解模态独立控制器相比, 具有更小的保守性.

定理 2 给定参数 $\gamma_i>0$, 系统 (1) 存在模态独立控制器 (34) 使相应闭环系统随机容许且在 $[0,+\infty)$ 上存在唯一解, 如果存在 $\tilde{P}_i>0, \tilde{Q}_i, Y, G$, 标量 $\tau>0$, 对所有 $i\in\boldsymbol{S}$ 满足如下条件:

$$\begin{bmatrix}\varPsi_{i1} & \varPsi_{i2} & \sqrt{\alpha}X_i & \gamma_iX_i^{\rm T}F_i^{\rm T} & \varPhi_{i1}\\ * & -G^\star & 0 & 0 & 0\\ * & * & -\tau I & 0 & 0\\ * & * & * & -\dfrac{1}{\tau}I & 0\\ * & * & * & * & \varPhi_{i2}\end{bmatrix}<0, \quad (35)$$

则模态独立控制器 (34) 的控制增益为

$$K=YG^{-1}. \quad (36)$$

其中: $\varPsi_{i1}=(A_iG+B_iY)^\star+\pi_{i1}E\tilde{P}_jE^{\rm T}$, $\varPsi_{i2}=A_iG+B_iY+X_i^{\rm T}-G^{\rm T}$.

证明 令 $\bar{A}_i=A_i+B_iK$, 由定理 1 可知, 当条件 (8) 成立时, 相应闭环系统是随机容许的且在 $[0,+\infty)$ 上存在唯一解. 由式 (35) 可知, 矩阵 G 非奇异. 结合式 (36), 通过对式 (35) 左右两边分别乘以矩阵

$$\begin{bmatrix}I & A_i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & I\end{bmatrix}$$

及转置, 可知 (35) 蕴含 (8). □

3 仿真算例

例 1 考虑如下广义马氏跳变系统:

Mode 1 $A_1=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0.2\end{bmatrix}$, $B_1=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$;

Mode 2 $A_2=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & 2.2\end{bmatrix}$, $B_2=\begin{bmatrix}3\\ 0.7\end{bmatrix}$.

系统的奇异矩阵为 $E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, 系统的部分非线性项为 $f_1=\begin{bmatrix}\sin x_1(t)\\ \cos x_2(t)\end{bmatrix}$, $f_2=\begin{bmatrix}\sin x_2(t)\\ \cos x_1(t)\end{bmatrix}$. 显然, 上述非线性扰动满足李普希兹条件 (3), 其中 $\gamma_i=1$, 且 $F_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $F_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

假设系统中非线性扰动的存在概率为 $\alpha=0.4$, 由定理 1 可知, 相应模态依赖控制器的控制增益为

$$K_1=[\,-0.0457\ \ -0.0225\,],\ K_2=[\,-1.2752\ \ 0.0075\,].$$

假设初始条件 $x(0)=[\,0.2\ \ -0.35\,]^{\rm T}$, 可得相应闭环系统模态信号选择曲线和状态响应, 如图 1 和图 2 所示, 其中 $*$ 表示当前模态下, 系统没有非线性扰动. 基于仿真结果, 可以看出所设计的控制器是有效的.

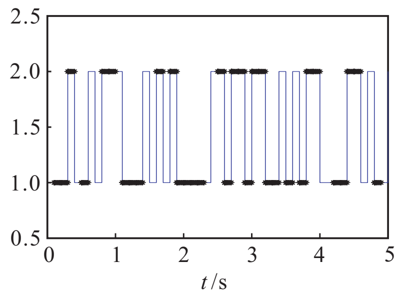

图 1 系统信号选择曲线

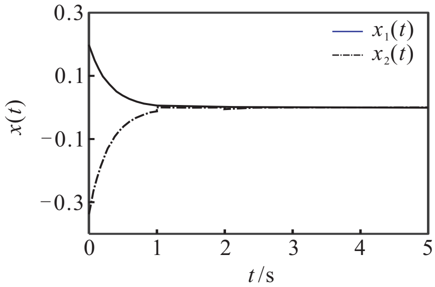

图 2　闭环系统的状态响应曲线

例 2　当控制器$u(t)=0$时, 考虑如下广义系统:

$$A=\begin{bmatrix}-2+d & -0.1\\ 0.8 & -0.5\end{bmatrix},$$

其中d为可变参数. 系统的非线性扰动如下:

$$f=\begin{bmatrix}0.9\cos x_1(t)\\ 0.4\sin x_2(t)\end{bmatrix}.$$

将本文的推论 1 与文献 [14] 的结果进行对比, 所得结果如表 1 所示. 其中表 1 中推论 1 有解时相应概率α的取值范围分别为: 当$d=-1.5$时, $\alpha\in[0,1]$; 当$d=0$时, $\alpha\in[0,1]$; 当$d=1.5$时, $\alpha\in[0,0.82]$. 针对本例, 可以看出本文的算法具有较小的保守性.

表 1　参数d可变时的比较结果

方 法	d		
	−1.5	0	1.5
文献 [14] 方法	有解	有解	无解
推论 1 的方法	有解	有解	有解

4　结　论

本文研究了一类广义马氏跳变系统的非线性扰动以一定概率存在时系统的控制问题. 在采用 Bernoulli 变量描述非线性扰动存在与否的基础上, 建立了相应的数学模型, 得到了系统在非线性扰动满足一定概率条件下的系统随机容许的充分条件, 并证明了系统解的存在唯一性. 在所得结果基础上, 给出了模态依赖控制器和模态独立控制器的LMI求解条件. 最后, 通过数值例子进一步验证了所得结果的有效性和优越性.

参考文献(References)

[1] Krasovskii N M, Lidskii E A. Analytical design of controllers in systems with random attributes[J]. Automation and Remote Control, 1961, 22(1/2/3): 1021-1025, 1141-1146, 1289-1294.

[2] Xu S Y, Chen T W, Lam J. Robust H_∞ filtering for uncertain Markovian jump systems with mode-dependent time-varying delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(5): 900-907.

[3] Zhang L X, Boukas E K. Mode-dependent filtering for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities[J]. Automatica, 2009, 45(6): 1462-1467.

[4] Wu L G, Shi P, Gao H J. State estimation and sliding-mode control of Markovian jump singular systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(5): 1213-1219.

[5] Wang G L, Zhang Q L. Adaptive control of stochastic nonlinear systems with Markovian switching[J]. Int J of Adaptive Control and Signal Processing, 2012, 26(9): 848-860.

[6] 盛立, 杨慧中. 一类离散 Markov 跳变奇异系统的镇定控制[J]. 控制与决策, 2010, 25(8): 1189-1194.
(Sheng L, Yang H Z. Stabilization control of a class of discrete-time Markov jump singular systems[J]. Control and Decision, 2010, 25(8): 1189-1194.)

[7] Wang G L, Zhang Q L, Sreeram V. Robust H_∞ control of norm bounded uncertain systems via Markovian approach[J]. Asian J of Control, 2011, 13(6): 956-965.

[8] Xu S Y, Lam J. Control and filtering of singular systems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006: 12-13.

[9] Boukas E K. Control of singular systems with random abrupt changes[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2008: 196-197.

[10] Boukas E K. On stability and stabilization of continuous-time singular Markovian switching systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2008, 2(10): 884-894.

[11] Xia Y Q, Boukas E K, Shi P, et al. Stability and stabilization of continuous-time singular hybrid systems[J]. Automatica, 2009, 45(9): 1504-1509.

[12] Wang G L, Zhang Q L. Robust control of uncertain singular stochastic systems with Markovian switching via proportional-derivative state feedback[J]. IET Control Theory and Applications, 2012, 6(8): 1089-1096.

[13] Wang G L, Xu S Y. Robust H_∞ filtering for singular time-delayed systems with uncertain Markovian switching probabilities[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2015, 25(3): 376-393.

[14] Lu G P, Ho W C D D. Generalized quadratic stability for continuous-time singular systems with nonlinear perturbation[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(5): 818-823.

[15] Zhou L, Lu G P. Robust stability of singularly perturbed descriptor systems with nonlinear perturbation[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(4): 858-863.

[16] Wang G L, Zhang Q L, Yang C Y. Robust stability of singularly perturbed descriptor systems with uncertain Markovian switchings and nonlinear perturbations[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2014, 35(1): 89-109.

(责任编辑：孙艺红)