

## 基于ELM的一类MIMO仿射非线性系统的鲁棒自适应控制

李军, 乃永强

(兰州交通大学 自动化与电气工程学院, 兰州 730070)

**摘要:** 针对一类多输入多输出(MIMO)仿射非线性动态系统, 提出一种基于极限学习机(ELM)的鲁棒自适应神经控制方法. ELM随机确定单隐层前馈网络(SLFNs)的隐含层参数, 仅需调整网络的输出权值, 能以极快的学习速度获得良好的推广性. 在所提出的控制方法中, 利用ELM逼近系统的未知非线性项, 针对ELM网络的权值、逼近误差及外界扰动的未知上界值分别设计参数自适应律, 通过Lyapunov稳定性分析可以保证闭环系统所有信号半全局最终一致有界. 仿真结果表明了该控制方法的有效性.

**关键词:** 鲁棒自适应神经控制; 极限学习机; 单隐层前馈网络; 多输入多输出; 仿射非线性系统

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## Robust adaptive control for a class of MIMO affine nonlinear systems using extreme learning machine

LI Jun, NAI Yong-qiang

(School of Automation and Electrical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China.

Correspondent: LI Jun, E-mail: lijun691201@mail.lzjtu.cn)

**Abstract:** Based on the extreme learning machine(ELM), a robust adaptive neural control method for a class of multiple-input-multiple-output(MIMO) affine nonlinear dynamic systems is presented. ELM for single-hidden layer feedforward networks(SLFNs), which randomly chooses hidden node parameters and analytically determines the output weights of SLFNs, shows good generalized performance at extremely fast learning speed. The proposed control scheme utilizes the ELM to approximate the plant's unknown nonlinear terms. Meanwhile, output weights of ELM, unknown upper bound values of approximation errors and external disturbances can be online estimated through parameter adaptive laws by using Lyapunov stability analysis, so that semi-global uniform ultimate boundedness of all signals in the closed-loop system can be guaranteed. Finally, simulation results show the effectiveness of the proposed adaptive ELM control.

**Keywords:** adaptive robust neural control; extreme learning machine; single-hidden layer feedforward networks; multiple-input-multiple-output; affine nonlinear systems

### 0 引言

自适应神经控制<sup>[1-2]</sup>或自适应模糊控制<sup>[3-4]</sup>在对非线性系统的参数变化、未建模动态以及外界干扰等方面具有更加优越的性能, 尤其是结合反馈线性化的自适应控制方法在多变量非线性系统中已得到了广泛应用<sup>[5-9]</sup>. 针对未知动态的不确定性MIMO仿射非线性系统, 文献[10]中给出了一种由前馈的模糊补偿器及鲁棒的误差反馈补偿器组合的自适应模糊控制方法; 文献[11]提出了一种动态神经网络自适应跟踪控制方法; 文献[12-13]分别提出了自适应动态输

出反馈神经控制方法; 文献[14]提出一种模糊自适应滑模控制方法; 文献[15]提出了模糊系统与神经网络相结合的控制方法. 由于神经网络与模糊逻辑系统具有通用逼近特性, 且具有良好的学习和自适应能力, 在上述文献中, RBF神经网络或模糊逻辑系统用于逼近非线性系统的不确定部分, 采用Lyapunov综合法设计参数的在线自适应调节律, 以保证控制系统的闭环稳定性. 但是, 在网络结构与参数的确定上, 如RBF网络的隐含层节点参数确定或模糊系统的隶属函数构造上, 以往的方法大多利用先验知识确定, 有时会

收稿日期: 2014-06-23; 修回日期: 2014-10-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51467008); 甘肃省高等学校基本科研业务费专项资金项目(620026).

作者简介: 李军(1969—), 男, 教授, 博士, 从事计算智能、机器学习、系统建模控制等研究; 乃永强(1987—), 男, 硕士生, 从事智能控制与非线性系统控制的研究.

影响闭环系统的跟踪精度和控制效果,存在一定的不足.

极限学习机 (ELM) 是由 Huang 等<sup>[16]</sup>提出的用于单隐层前馈网络 (SLFNs) 的快速学习算法,其特点是随机选择 SLFNs 的隐含层节点及相应的节点参数,在训练过程中仅需调节网络的输出权值. 针对单输入单输出 (SISO) 仿射非线性系统,文献 [17] 给出了基于 ELM 的直接自适应神经控制方法,取得了较好效果.

鉴于 ELM 在学习速度和参数选择方面的优点,针对一类不确定性 MIMO 仿射非线性系统,本文提出一种基于 ELM 的自适应神经控制方法,同时考虑了引入鲁棒控制项以进一步降低对未知建模动态的逼近误差,并放松对有界参数取值的要求. 最后通过实例仿真,并与 RBF 网络自适应控制方法进行比较,验证了所提出控制方法的有效性.

## 1 问题描述

考虑如下的 MIMO 仿射非线性动态系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^{(n_1)} = f_1(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p g_{1j}(\mathbf{x})u_j + d_1(\mathbf{x}, t), \\ \vdots \\ \dot{x}_p^{(n_p)} = f_p(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p g_{pj}(\mathbf{x})u_j + d_p(\mathbf{x}, t), \\ y_1 = x_1, \dots, y_p = x_p. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{x} = [x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(n_1-1)}, \dots, x_p, \dot{x}_p, \dots, x_p^{(n_p-1)}]^T \in \mathbf{R}^n$  为可测状态变量,且  $n = n_1 + \dots + n_p$ ;  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_p]^T \in \mathbf{R}^p$ ,  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_p]^T \in \mathbf{R}^p$  分别为控制输入向量和输出向量;  $x_i^{(n_i)} = d^{n_i}x_i/dt^{n_i}$ ,  $f_i(\mathbf{x}), g_{ij}(\mathbf{x})$  为光滑未知非线性连续函数;  $d_i(\mathbf{x}, t)$  表示未知外界扰动;  $i, j = 1, 2, \dots, p$ .

令  $\mathbf{x}^{(n)} = [x_1^{(n_1)}, \dots, x_p^{(n_p)}]^T$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x})]^T$ ,  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\mathbf{G}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{G}_p(\mathbf{x})]$ , 且  $\mathbf{G}_i(\mathbf{x}) = [g_{1i}(\mathbf{x}), \dots, g_{pi}(\mathbf{x})]^T$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = [d_1(\mathbf{x}, t), \dots, d_p(\mathbf{x}, t)]^T$ , 则式 (1) 的矩阵形式为

$$\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{D}(\mathbf{x}, t). \quad (2)$$

通过设计控制律  $\mathbf{u}(t)$  可以保证闭环系统的所有变量均有界,而且使系统的输出能够跟踪给定的期望轨迹  $\mathbf{y}_d(t) = [y_{d1}(t), \dots, y_{dp}(t)]^T$ . 非线性系统 (1) 满足如下假设:

**假设 1**<sup>[7]</sup> 若  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  为正定矩阵,则存在实数  $\sigma_0 > 0$  使得  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \geq \sigma_0 \mathbf{I}_{p \times p}$  成立,其中  $\mathbf{I}_{p \times p}$  表示单位矩阵.

**假设 2** 对于未知外界扰动  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ ,存在实向量  $\bar{\mathbf{d}} > \mathbf{0}$ ,使得  $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ ,满足  $|\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)| \leq \bar{\mathbf{d}}$ .

**假设 3** 期望轨迹  $y_{d_i}(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) 有界,

且存在  $n_i$  阶导数,其各阶导数均可微有界.

假设 1 是一个具有可控性的充分条件,以确保  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  为正定化矩阵的要求. 因此,式 (1) 可表示为静态状态反馈的线性化系统形式. 这种假设限制了所考虑的一类 MIMO 仿射非线性系统,但许多实际的物理系统,诸如倒立摆、质量-弹簧-阻尼系统、机器人等,其动力学特性均满足假设 1<sup>[10]</sup>.

定义跟踪误差为

$$e_i(t) = y_{d_i}(t) - y_i(t), \quad (3)$$

并定义滤波跟踪误差为

$$s_i(t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda_i \right)^{n_i-1} e_i(t) = \sum_{k=0}^{n_i-1} C_{n_i-1}^k \lambda_i^{n_i-1-k} e_i^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^{n_i-1} c_{ik} e_i^{(k-1)}(t) + e_i^{(n_i-1)}(t). \quad (4)$$

其中:  $c_{ik} = C_{n_i-1}^{k-1} \lambda_i^{n_i-k}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_i - 1$ ,  $\lambda_i > 0$ .

令  $v_i(t) = y_{d_i}^{(n_i)}(t) + c_{in_i-1} e_i^{(n_i-1)}(t) + \dots + c_{i1} \dot{e}_i(t)$ , 则有

$$\dot{s}_i(t) = v_i(t) - f_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^p g_{ij}(\mathbf{x})u_j - d_i(\mathbf{x}, t). \quad (5)$$

令  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_p(t)]^T$ ,  $\mathbf{v}(t) = [v_1(t), \dots, v_p(t)]^T$ , 则式 (5) 的矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} - \mathbf{D}(\mathbf{x}, t). \quad (6)$$

若非线性函数  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  和  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  已知,为实现控制目标,可设计如下的控制律:

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x})(-\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} + \mathbf{K}_0 \mathbf{s}). \quad (7)$$

其中: 对角矩阵  $\mathbf{K}_0 = \text{diag}[k_{0i}]$ ,  $k_{0i} > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ .

若  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  和  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  未知,则可应用 ELM 网络对其分别逼近,在此基础上,设计鲁棒的自适应神经控制器. 显然由式 (4) 和 (5) 可知,当  $s_i(t) \rightarrow 0$  时,  $e_i(t)$  及其  $n_i - 1$  阶导数都一致收敛于零.

## 2 基于 ELM 的自适应神经控制器设计

### 2.1 ELM

与 SLFNs 学习算法的理解不同,ELM 本质上独立于训练数据,随机确定隐含层节点,即其隐含层的节点及其参数均无需调整,它是 SLFNs 的推广和延伸. ELM 不仅能趋向于达到最小的训练误差,而且具有最小的输出权值范数.

#### 2.1.1 SLFNs

对于含有  $L$  个隐含层节点,  $m$  个输出节点的 SLFNs,其网络输出的数学描述为

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^L \theta_i k_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^L \theta_i k(\mathbf{x}; \mathbf{w}_i, b_i),$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \theta_i \in \mathbf{R}^m. \quad (8)$$

其中:  $\mathbf{w}_i, b_i$  为网络隐含层节点的参数,  $\theta_i$  为连接第  $i$  个隐含层节点与网络输出层节点的输出权值向量,  $k_i(\mathbf{x})$  为第  $i$  个隐含层节点的输出函数  $k(\mathbf{x}; \mathbf{w}_i, b_i)$ .

当隐含层节点为可加性节点时,  $k(\mathbf{x}; \mathbf{w}_i, b_i) = k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_i + b_i)$ ,  $\mathbf{w}_i \in \mathbf{R}^n, b_i \in \mathbf{R}$ ; 当为RBF节点时,  $k(\mathbf{x}; \mathbf{w}_i, b_i) = k(b_i \|\mathbf{x} - \mathbf{w}_i\|)$ ,  $\mathbf{w}_i \in \mathbf{R}^n, b_i \in \mathbf{R}^+$ . 其中  $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{x}$  表示  $\mathbf{w}_i$  和  $\mathbf{x}$  的内积.

### 2.1.2 ELM的学习过程

对于任意给定的  $N$  组数据  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_i) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ ,  $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}]^T, \mathbf{t}_i = [t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{im}]^T$ , 则含有  $L$  个隐含层节点的SLFNs的函数模型为

$$f(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^L \theta_i k(\mathbf{x}_j; \mathbf{w}_i, b_i) = \mathbf{o}_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (9)$$

并且SLFNs能以零误差逼近训练样本, 即  $\sum_{j=1}^N \|\mathbf{o}_j - \mathbf{t}_j\| = 0$ , 于是存在  $\theta_i, \mathbf{w}_i, b_i$ , 使得

$$\sum_{i=1}^L \theta_i k(\mathbf{x}_j; \mathbf{w}_i, b_i) = \mathbf{t}_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

以矩阵形式表示为

$$\mathbf{K}\mathbf{B} = \mathbf{T}. \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(\mathbf{x}_1; \mathbf{w}_1, b_1) & \cdots & k(\mathbf{x}_1; \mathbf{w}_L, b_L) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k(\mathbf{x}_N; \mathbf{w}_1, b_1) & \cdots & k(\mathbf{x}_N; \mathbf{w}_L, b_L) \end{bmatrix}_{N \times L},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \theta_1^T \\ \vdots \\ \theta_L^T \end{bmatrix}_{L \times m}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_N^T \end{bmatrix}_{N \times m}.$$

这里:  $\mathbf{K}$  为隐含层节点的输出矩阵, 其第  $i$  列表示与输入  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$  相关的第  $i$  个隐含层节点的输出向量; 第  $i$  行表示与输入  $\mathbf{x}_i$  相关的隐含层特征映射, 即  $\mathbf{x}_i : \mathbf{h}(\mathbf{x}_i)$ , 且  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_i) = [k(\mathbf{x}_i; \mathbf{w}_1, b_1), \dots, k(\mathbf{x}_i; \mathbf{w}_L, b_L)]$ .

如果激活函数  $k(\mathbf{x}_j; \mathbf{w}_i, b_i)$  在任意区间上无限可微, 且SLFNs隐含层节点及节点参数可以随机产生, 则由文献[18]可知, 当隐含层节点数目  $L$  小于样本  $N$

时, SLFNs 仍能以极小的训练误差逼近训练样本. 此时矩阵  $\mathbf{K}$  并非方阵, 从而存在  $\hat{\theta}_i, \hat{\mathbf{w}}_i, \hat{b}_i$ , 使得

$$\|\mathbf{K}(\hat{\mathbf{w}}_1, \dots, \hat{\mathbf{w}}_L, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_L)\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{T}\| = \min_{\theta_i, \mathbf{w}_i, b_i} \|\mathbf{K}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_L, b_1, \dots, b_L)\mathbf{B} - \mathbf{T}\|. \quad (12)$$

因此, 式(12)成为线性系统. 与使用梯度下降算法训练所有网络权值的SLFNs方法不同, ELM基本学习算法就是求解式(12)的线性方程组  $\mathbf{K}\mathbf{B} = \mathbf{T}$  的最小二乘解, 即使用最小二乘方法求解输出层权值.

### 2.2 自适应神经控制器设计

为设计控制律(7), 可以采用ELM网络分别对  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  和  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  中的元素  $f_i(\mathbf{x})$  和  $g_{ij}(\mathbf{x})$  进行逼近, 此时  $m=1$ , 式(11)中的矩阵  $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{L \times m}$  成为  $L \times 1$  的列向量  $\theta$ . 因此, 用于逼近  $f_i(\mathbf{x})$  和  $g_{ij}(\mathbf{x})$  的ELM网络为

$$\hat{f}_i(\mathbf{x}, \theta_{f_i}) = \mathbf{h}_{f_i}(\mathbf{x})\theta_{f_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p;$$

$$\hat{g}_{ij}(\mathbf{x}, \theta_{g_{ij}}) = \mathbf{h}_{g_{ij}}(\mathbf{x})\theta_{g_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, p. \quad (13)$$

其中:  $\theta_{f_i} \in \mathbf{R}^{L \times 1}$  和  $\theta_{g_{ij}} \in \mathbf{R}^{L \times 1}$  为网络输出权值向量,  $\mathbf{h}_{f_i}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{1 \times L}$  和  $\mathbf{h}_{g_{ij}}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{1 \times L}$  为网络隐含层节点的输出向量.

最优逼近的权值向量  $\theta_{f_i}^*, \theta_{g_{ij}}^*$  分别为

$$\theta_{f_i}^* = \arg \min_{\theta_{f_i}} \{ \sup_{\mathbf{x} \in D} |f_i(\mathbf{x}) - \hat{f}_i(\mathbf{x}, \theta_{f_i})| \},$$

$$\theta_{g_{ij}}^* = \arg \min_{\theta_{g_{ij}}} \{ \sup_{\mathbf{x} \in D} |g_{ij}(\mathbf{x}) - \hat{g}_{ij}(\mathbf{x}, \theta_{g_{ij}})| \}. \quad (14)$$

定义  $\tilde{\theta}_{f_i} = \theta_{f_i}^* - \theta_{f_i}, \tilde{\theta}_{g_{ij}} = \theta_{g_{ij}}^* - \theta_{g_{ij}}$ . 假设紧集合  $D$  足够大, 则对于所有  $\mathbf{x} \in D$ , 能够保证最小逼近误差有界.

进一步, 若  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  的估计为  $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \Theta_F)$ ,  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  的估计为  $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \Theta_G)$ ,  $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \Theta_G)$  的第  $i$  行表示为  $\hat{G}_i(\mathbf{x}, \Theta_{g_i})$ , 则  $\hat{G}_i(\mathbf{x}, \Theta_{g_i}) = \mathbf{H}_{g_i}(\mathbf{x})\theta_{g_i}$ . 其中:  $\mathbf{H}_{g_i}(\mathbf{x}) = [h_{g_{i1}}(\mathbf{x}), \dots, h_{g_{ip}}(\mathbf{x})]$ ,  $\Theta_{g_i} = \text{diag}[\theta_{g_{i1}}, \dots, \theta_{g_{ip}}]$ . 于是  $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \Theta_F), \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \Theta_G)$  可表示为

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \Theta_F) = \mathbf{H}_F(\mathbf{x})\Theta_F,$$

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \Theta_G) = \mathbf{H}_G(\mathbf{x})\Theta_G. \quad (15)$$

其中:  $\mathbf{H}_F(\mathbf{x}) = \text{diag}[h_{f_1}(\mathbf{x}), \dots, h_{f_p}(\mathbf{x})]$ ,  $\Theta_F = [\theta_{f_1}, \dots, \theta_{f_p}]^T$ ,  $\mathbf{H}_G(\mathbf{x}) = \text{diag}[\mathbf{H}_{g_1}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{H}_{g_p}(\mathbf{x})]$ ,  $\Theta_G = [\theta_{g_1}, \dots, \theta_{g_p}]^T$ .

ELM网络的最小逼近误差为

$$\varepsilon_F(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \Theta_F^*),$$

$$\varepsilon_G(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \Theta_G^*). \quad (16)$$

实际工程中, 最小逼近误差的上界通常无法确定, 因而未知. 即  $|\varepsilon_F(\mathbf{x})| \leq \bar{\varepsilon}_F, |\varepsilon_G(\mathbf{x})| \leq \bar{\varepsilon}_G, \forall \mathbf{x} \in D$ . 其中: 向量  $\bar{\varepsilon}_F \geq \mathbf{0}$ , 矩阵  $\bar{\varepsilon}_G \geq \mathbf{0}$ .

在式(7)的基础上, 结合(15), 自适应控制律应为

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{G}}^{-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_G)(-\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_F) + \mathbf{v} + \mathbf{K}_0 \mathbf{s}). \quad (17)$$

由于  $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_G)$  是通过在线估计  $\boldsymbol{\Theta}_G$  而得到, 非奇异性很难保证. 由文献[9]可知, 假定  $\|\mathbf{H}_G(\mathbf{x})\| \leq \zeta_{MG}$ ,  $\|\boldsymbol{\Theta}_G\| \leq \theta_{MG}$ , 且  $\zeta_{MG} > 0$ ,  $\theta_{MG} > 0$ , 当  $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_G)$  的谱半径满足  $\rho(\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_G)) \leq \bar{\rho}(\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_G)) = \zeta_{MG}\theta_{MG}$  时, 则存在  $\kappa > 0$ , 使得  $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_G) + (\bar{\rho}(\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_G)) + \kappa)\mathbf{I}_{p \times p}$  非奇异. 因此, 自适应控制律修正为

$$\mathbf{u} = (\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_G) + \tau \mathbf{I}_{p \times p})^{-1}(-\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_F) + \mathbf{v} + \mathbf{K}_0 \mathbf{s}), \quad (18)$$

其中  $\tau = (\bar{\rho}(\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_G)) + \kappa)$ .

此外, 考虑减弱系统的外界扰动及最小逼近误差, 需要引入鲁棒控制项  $\mathbf{u}_r$ . 由于实际中的  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_F$ 、 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_G$  和  $\bar{\mathbf{d}}$  的取值未知, 可通过设计相应的参数自适应律进行在线调整. 若  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_F$ 、 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_G$ 、 $\bar{\mathbf{d}}$  的估计量为  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_F$ 、 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_G$ 、 $\hat{\mathbf{d}}$ , 则综合分析, 基于 ELM 的鲁棒自适应控制律及相应的参数自适应调节律由如下定理给出.

**定理 1** 考虑式(2)的一类 MIMO 非线性系统, 若满足假设 1~假设 3, 则具有鲁棒性能的控制律可设计为

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_r, \quad (19)$$

$$\mathbf{u}_c = (\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_G) + \tau \mathbf{I}_{p \times p})^{-1}(-\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_F) + \mathbf{v} + \mathbf{K}_0 \mathbf{s}), \quad (20)$$

$$\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}^T}{\sigma_0 \|\mathbf{s}\|^2} (\tanh(\bar{\mathbf{s}}/\omega_f) \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_F + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_G \circ \tanh(\mathbf{S}\mathbf{u}_c^T/\omega_g) \mathbf{u}_c + \tanh(\bar{\mathbf{s}}/\omega_d) \hat{\mathbf{d}} + \tanh(\mathbf{S}\mathbf{u}_0/\omega_0)), \quad (21)$$

$$\mathbf{u}_0 = \tau (\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_G) + \tau \mathbf{I}_{p \times p})^{-1}(-\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_F) + \mathbf{v} + \mathbf{K}_0 \mathbf{s}). \quad (22)$$

其中:  $\tanh(\bar{\mathbf{s}}/\omega_f) = \text{diag}[\tanh(s_i/\omega_f)]$ ,  $\mathbf{S} = \text{diag}[s_i]$ ,  $\tanh(\bar{\mathbf{s}}/\omega_d) = \text{diag}[\tanh(s_i/\omega_d)]$ , 运算符“ $\circ$ ”定义为  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_G \circ \tanh(\mathbf{S}\mathbf{u}_c^T/\omega_g) = [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{g_{ij}} \tanh(s_i u_{cj}/\omega_g)]$ .

ELM 网络的输出权值向量  $\boldsymbol{\theta}_{f_i}$  和  $\boldsymbol{\theta}_{g_{ij}}$  以及参数  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{f_i}$ 、 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{g_{ij}}$ 、 $\hat{\mathbf{d}}_i$  的自适应调节律设计如下:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{f_i} = \begin{cases} -\gamma_{f_i} \mathbf{h}_{f_i}^T(\mathbf{x}) s_i - \gamma_{f_i} \sigma_{f_i} \boldsymbol{\theta}_{f_i}, & \text{if } \|\boldsymbol{\theta}_{f_i}\| < \theta_{Mf_i}, \text{ or} \\ \|\boldsymbol{\theta}_{f_i}\| = \theta_{Mf_i} \text{ and } \mathbf{h}_{f_i}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\theta}_{f_i} s_i \geq 0; \\ -\gamma_{f_i} \mathbf{h}_{f_i}^T(\mathbf{x}) s_i - \gamma_{f_i} \sigma_{f_i} \boldsymbol{\theta}_{f_i} + \gamma_{f_i} \frac{\mathbf{h}_{f_i}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\theta}_{f_i} s_i}{\|\boldsymbol{\theta}_{f_i}\|^2} \boldsymbol{\theta}_{f_i}, \\ \text{if } \|\boldsymbol{\theta}_{f_i}\| = \theta_{Mf_i} \text{ and } \mathbf{h}_{f_i}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\theta}_{f_i} s_i < 0; \end{cases} \quad (23)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{g_{ij}} = \begin{cases} -\gamma_{g_{ij}} \mathbf{h}_{g_{ij}}^T(\mathbf{x}) s_i u_{cj} - \gamma_{g_{ij}} \sigma_{g_{ij}} \boldsymbol{\theta}_{g_{ij}}, \\ \text{if } \|\boldsymbol{\theta}_{g_{ij}}\| < \theta_{Mg_{ij}}, \text{ or} \\ \|\boldsymbol{\theta}_{g_{ij}}\| = \theta_{Mg_{ij}} \text{ and } \mathbf{h}_{g_{ij}}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\theta}_{g_{ij}} s_i u_{cj} \geq 0; \\ -\gamma_{g_{ij}} \mathbf{h}_{g_{ij}}^T(\mathbf{x}) s_i u_{cj} - \gamma_{g_{ij}} \sigma_{g_{ij}} \boldsymbol{\theta}_{g_{ij}} + \\ \gamma_{g_{ij}} \frac{\mathbf{h}_{g_{ij}}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\theta}_{g_{ij}} s_i u_{cj}}{\|\boldsymbol{\theta}_{g_{ij}}\|^2} \boldsymbol{\theta}_{g_{ij}}, \\ \text{if } \|\boldsymbol{\theta}_{g_{ij}}\| = \theta_{Mg_{ij}} \text{ and } \mathbf{h}_{g_{ij}}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\theta}_{g_{ij}} s_i u_{cj} < 0; \end{cases} \quad (24)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{f_i} = \eta_{f_i} (s_i \tanh(s_i/\omega_f) - \vartheta_{f_i} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{f_i}); \quad (25)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{g_{ij}} = \eta_{g_{ij}} (s_i u_{cj} \tanh(s_i u_{cj}/\omega_g) - \vartheta_{g_{ij}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{g_{ij}}); \quad (26)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{d}}}_i = \eta_{d_i} (s_i \tanh(s_i/\omega_d) - \vartheta_{d_i} \hat{\mathbf{d}}_i). \quad (27)$$

其中:  $\gamma_{f_i}$ 、 $\gamma_{g_{ij}}$ 、 $\sigma_{f_i}$ 、 $\sigma_{g_{ij}}$ 、 $\eta_{f_i}$ 、 $\eta_{g_{ij}}$ 、 $\eta_{d_i}$ 、 $\vartheta_{f_i}$ 、 $\vartheta_{g_{ij}}$ 、 $\vartheta_{d_i}$ 、 $\omega_f$ 、 $\omega_g$ 、 $\omega_d$ 、 $\theta_{Mf_i}$ 、 $\theta_{Mg_{ij}}$  均为大于 0 的设计参数, 且  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{f_i} \in \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_F$ ,  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{g_{ij}} \in \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_G$ ,  $\hat{\mathbf{d}}_i \in \hat{\mathbf{d}}$ . 则式(19)可以保证闭环系统的所有信号一致有界, 且跟踪误差及各阶导数渐近收敛于零, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i^{(k)} = 0$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, p$ ,  $k = 0, 1, \dots, n_i - 1$ .

**证明** 将式(19)代入(6), 并考虑(20), 得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{x}) - (\mathbf{G}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_G)) \mathbf{u}_c - \\ &\quad \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_G) \mathbf{u}_c - \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_r - \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \\ &\quad -\mathbf{K}_0 \mathbf{s} - (\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_F^*) - \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_F)) - \\ &\quad (\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_G^*) - \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Theta}_G)) \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_0 - \\ &\quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_r - \boldsymbol{\varepsilon}_F(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_G(\mathbf{x}) \mathbf{u}_c - \mathbf{D}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (28)$$

对式(28)两边同乘以  $\mathbf{s}^T$ , 有

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} &= \\ &= -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{s} - \sum_{i=1}^p \mathbf{h}_{f_i}(\mathbf{x}) \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_i} s_i - \\ &\quad \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \mathbf{h}_{g_{ij}}(\mathbf{x}) \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{g_{ij}} s_i u_{cj} + \mathbf{s}^T \mathbf{u}_0 - \mathbf{s}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_r - \\ &\quad \mathbf{s}^T \boldsymbol{\varepsilon}_F(\mathbf{x}) - \mathbf{s}^T \boldsymbol{\varepsilon}_G(\mathbf{x}) \mathbf{u}_c - \mathbf{s}^T \mathbf{D}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (29)$$

考虑假设 1 及式(21), 可得

$$\begin{aligned} -\mathbf{s}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_r &\leq \\ -\mathbf{s}^T (\tanh(\bar{\mathbf{s}}/\omega_f) \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_F + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_G \circ \tanh(\mathbf{S}\mathbf{u}_c^T/\omega_g) \mathbf{u}_c + \\ \tanh(\bar{\mathbf{s}}/\omega_d) \hat{\mathbf{d}} + \tanh(\mathbf{S}\mathbf{u}_0/\omega_0)). \end{aligned} \quad (30)$$

选取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{1}{\gamma_{f_i}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_i}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{1}{\gamma_{g_{ij}}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{g_{ij}}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{g_{ij}} +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{1}{\eta_{f_i}} \tilde{\varepsilon}_{f_i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{1}{\eta_{g_{ij}}} \tilde{\varepsilon}_{g_{ij}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{1}{\eta_{d_i}} \tilde{d}_i^2. \tag{31}$$

其中:  $\tilde{\varepsilon}_{f_i} = \bar{\varepsilon}_{f_i} - \hat{\varepsilon}_{f_i}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{g_{ij}} = \bar{\varepsilon}_{g_{ij}} - \hat{\varepsilon}_{g_{ij}}$ ,  $\tilde{d}_i = \bar{d}_i - \hat{d}_i$ .

对  $V$  求导, 结合式(29)和(30), 并由假设2知  $|\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)| \leq \bar{\mathbf{d}}$ , 及考虑到  $|\varepsilon_F(\mathbf{x})| \leq \bar{\varepsilon}_F$ ,  $|\varepsilon_G(\mathbf{x})| \leq \bar{\varepsilon}_G$ , 得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{s} - \sum_{i=1}^p \mathbf{h}_{f_i}(\mathbf{x}) \tilde{\theta}_{f_i}^T \mathbf{s}_i - \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \mathbf{h}_{g_{ij}}(\mathbf{x}) \tilde{\theta}_{g_{ij}}^T \mathbf{s}_i u_{c_j} + \sum_{i=1}^p \bar{\varepsilon}_{f_i} |s_i| - \\ & \sum_{i=1}^p \hat{\varepsilon}_{f_i} s_i \tanh(s_i / \omega_f) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \bar{\varepsilon}_{g_{ij}} |s_i| |u_{c_j}| - \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \hat{\varepsilon}_{g_{ij}} s_i u_{c_j} \tanh(s_i u_{c_j} / \omega_g) + \sum_{i=1}^p \bar{d}_i |s_i| - \\ & \sum_{i=1}^p \hat{d}_i s_i \tanh(s_i / \omega_d) + \sum_{i=1}^p |s_i| |u_{0i}| - \\ & \sum_{i=1}^p \tanh(s_i u_{0i} / \omega_0) - \sum_{i=1}^p \frac{1}{\gamma_{f_i}} \tilde{\theta}_{f_i}^T \dot{\theta}_{f_i} - \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{1}{\gamma_{g_{ij}}} \tilde{\theta}_{g_{ij}}^T \dot{\theta}_{g_{ij}} - \sum_{i=1}^p \frac{1}{\eta_{f_i}} \tilde{\varepsilon}_{f_i} \dot{\varepsilon}_{f_i} - \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{1}{\eta_{g_{ij}}} \tilde{\varepsilon}_{g_{ij}} \dot{\varepsilon}_{g_{ij}} - \sum_{i=1}^p \frac{1}{\eta_{d_i}} \tilde{d}_i \dot{d}_i. \end{aligned} \tag{32}$$

另外, 由文献[19]可知

$$0 \leq |z| - z \tanh(z / \omega) \leq \omega. \tag{33}$$

其中:  $z \in \mathbf{R}$ ;  $\omega > 0$ ;  $\iota$  是一个常数且满足  $\iota = e^{-(\iota+1)}$ , 即  $\iota = 0.2785$ . 此时, 有如下不等式成立:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \bar{\varepsilon}_{f_i} |s_i| - \sum_{i=1}^p \hat{\varepsilon}_{f_i} s_i \tanh(s_i / \omega_f) \leq \\ & \sum_{i=1}^p 0.2785 \bar{\varepsilon}_{f_i} \omega_f + \sum_{i=1}^p \bar{\varepsilon}_{f_i} s_i \tanh(s_i / \omega_f), \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \bar{\varepsilon}_{g_{ij}} |s_i| |u_{c_j}| - \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \hat{\varepsilon}_{g_{ij}} s_i u_{c_j} \tanh(s_i u_{c_j} / \omega_g) \leq \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p 0.2785 \bar{\varepsilon}_{g_{ij}} \omega_g + \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \bar{\varepsilon}_{g_{ij}} s_i u_{c_j} \tanh(s_i u_{c_j} / \omega_g), \\ & \sum_{i=1}^p \bar{d}_i |s_i| - \sum_{i=1}^p \hat{d}_i s_i \tanh(s_i / \omega_d) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p 0.2785 \bar{d}_i \omega_d + \sum_{i=1}^p \bar{d}_i s_i \tanh(s_i / \omega_d), \\ & \sum_{i=1}^p |s_i| |u_{0i}| - \sum_{i=1}^p \tanh(s_i u_{0i} / \omega_0) \leq \\ & \sum_{i=1}^p 0.2785 \omega_0. \end{aligned} \tag{34}$$

将式(23)~(27)和(34)代入(32), 有

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{s} + \sum_{i=1}^p \sigma_{f_i} \tilde{\theta}_{f_i}^T \theta_{f_i} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sigma_{g_{ij}} \tilde{\theta}_{g_{ij}}^T \theta_{g_{ij}} + \\ & \sum_{i=1}^p \vartheta_{f_i} \tilde{\varepsilon}_{f_i} \hat{\varepsilon}_{f_i} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \vartheta_{g_{ij}} \tilde{\varepsilon}_{g_{ij}} \hat{\varepsilon}_{g_{ij}} + \\ & \sum_{i=1}^p \vartheta_{d_i} \tilde{d}_i \hat{d}_i + \sum_{i=1}^p 0.2785 \bar{\varepsilon}_{f_i} \omega_f + \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p 0.2785 \bar{\varepsilon}_{g_{ij}} \omega_g + \sum_{i=1}^p 0.2785 \bar{d}_i \omega_d + \\ & \sum_{i=1}^p 0.2785 \omega_0 - \sum_{i=1}^p I_{f_i} \frac{\mathbf{h}_{f_i}(\mathbf{x}) \theta_{f_i}^T \mathbf{s}_i}{\|\theta_{f_i}\|^2} \tilde{\theta}_{f_i}^T \theta_{f_i} - \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p I_{g_{ij}} \frac{\mathbf{h}_{g_{ij}}(\mathbf{x}) \theta_{g_{ij}}^T \mathbf{s}_i u_{c_j}}{\|\theta_{g_{ij}}\|^2} \tilde{\theta}_{g_{ij}}^T \theta_{g_{ij}}. \end{aligned} \tag{35}$$

其中: 当式(23)和(24)的第1个条件满足时,  $I_{f_i}$  和  $I_{g_{ij}}$  为0, 否则为1.

如果  $I_{f_i} = I_{g_{ij}} = 1$ , 则由于  $\theta_{f_i}^{*T} \theta_{f_i}^* \leq \theta_{M f_i}^2 = \theta_{f_i}^T \theta_{f_i}$ ,  $\theta_{g_{ij}}^{*T} \theta_{g_{ij}}^* \leq \theta_{M g_{ij}}^2 = \theta_{g_{ij}}^T \theta_{g_{ij}}$ ,  $\tilde{\theta}_{f_i}^T \tilde{\theta}_{f_i} \geq 0$ ,  $\tilde{\theta}_{g_{ij}}^T \tilde{\theta}_{g_{ij}} \geq 0$ , 可得

$$\tilde{\theta}_{f_i}^T \theta_{f_i} = \frac{1}{2} \theta_{f_i}^{*T} \theta_{f_i}^* - \frac{1}{2} \theta_{f_i}^T \theta_{f_i} - \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{f_i}^T \tilde{\theta}_{f_i} \leq 0,$$

同理有  $\tilde{\theta}_{g_{ij}}^T \theta_{g_{ij}} \leq 0$ .

由  $\mathbf{h}_{f_i}(\mathbf{x}) \theta_{f_i}^T \mathbf{s}_i < 0$ ,  $\mathbf{h}_{g_{ij}}(\mathbf{x}) \theta_{g_{ij}}^T \mathbf{s}_i u_{c_j} < 0$ , 可推出

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p I_{f_i} \frac{\mathbf{h}_{f_i}(\mathbf{x}) \theta_{f_i}^T \mathbf{s}_i}{\|\theta_{f_i}\|^2} \tilde{\theta}_{f_i}^T \theta_{f_i} \geq 0, \\ & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p I_{g_{ij}} \frac{\mathbf{h}_{g_{ij}}(\mathbf{x}) \theta_{g_{ij}}^T \mathbf{s}_i u_{c_j}}{\|\theta_{g_{ij}}\|^2} \tilde{\theta}_{g_{ij}}^T \theta_{g_{ij}} \geq 0. \end{aligned} \tag{36}$$

进一步, 考虑到完全平方公式, 有如下不等式成立:

$$\begin{aligned} & \sigma_{f_i} \tilde{\theta}_{f_i}^T \theta_{f_i} \leq -\frac{\sigma_{f_i}}{2} \|\tilde{\theta}_{f_i}\|^2 + \frac{\sigma_{f_i}}{2} \|\theta_{f_i}^*\|^2, \\ & \sigma_{g_{ij}} \tilde{\theta}_{g_{ij}}^T \theta_{g_{ij}} \leq -\frac{\sigma_{g_{ij}}}{2} \|\tilde{\theta}_{g_{ij}}\|^2 + \frac{\sigma_{g_{ij}}}{2} \|\theta_{g_{ij}}^*\|^2, \\ & \vartheta_{f_i} \tilde{\varepsilon}_{f_i} \hat{\varepsilon}_{f_i} \leq -\frac{\vartheta_{f_i}}{2} \tilde{\varepsilon}_{f_i}^2 + \frac{\vartheta_{f_i}}{2} \bar{\varepsilon}_{f_i}^2, \\ & \vartheta_{g_{ij}} \tilde{\varepsilon}_{g_{ij}} \hat{\varepsilon}_{g_{ij}} \leq -\frac{\vartheta_{g_{ij}}}{2} \tilde{\varepsilon}_{g_{ij}}^2 + \frac{\vartheta_{g_{ij}}}{2} \bar{\varepsilon}_{g_{ij}}^2, \\ & \vartheta_{d_i} \tilde{d}_i \hat{d}_i \leq -\frac{\vartheta_{d_i}}{2} \tilde{d}_i^2 + \frac{\vartheta_{d_i}}{2} \bar{d}_i^2. \end{aligned} \tag{37}$$

将式(36)和(37)代入(35), 有

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{s} - \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_{f_i}}{2} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_i}\|^2 - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{\sigma_{g_{ij}}}{2} \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{g_{ij}}\|^2 - \\ & \sum_{i=1}^p \frac{\vartheta_{f_i}}{2} \tilde{\varepsilon}_{f_i}^2 - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{\vartheta_{g_{ij}}}{2} \tilde{\varepsilon}_{g_{ij}}^2 - \sum_{i=1}^p \frac{\vartheta_{d_i}}{2} \tilde{d}_i^2 + \\ & \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_{f_i}}{2} \|\boldsymbol{\theta}_{f_i}^*\|^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{\sigma_{g_{ij}}}{2} \|\boldsymbol{\theta}_{g_{ij}}^*\|^2 + \\ & \sum_{i=1}^p \frac{\vartheta_{f_i}}{2} \bar{\varepsilon}_{f_i}^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{\vartheta_{g_{ij}}}{2} \bar{\varepsilon}_{g_{ij}}^2 + \sum_{i=1}^p \frac{\vartheta_{d_i}}{2} \bar{d}_i^2 + \\ & \sum_{i=1}^p 0.2785 \bar{\varepsilon}_{f_i} \omega_f + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p 0.2785 \bar{\varepsilon}_{g_{ij}} \omega_g + \\ & \sum_{i=1}^p 0.2785 \bar{d}_i \omega_d + \sum_{i=1}^p 0.2785 \omega_0 \leq \\ & -\chi V + \mu. \end{aligned} \tag{38}$$

其中:  $\chi, \mu$  定义为

$$\begin{aligned} \chi = & \min(\lambda_{\min}(\mathbf{K}_0), \min_{i=1, \dots, p}(\sigma_{f_i} \gamma_{f_i}), \\ & \min_{i,j=1, \dots, p}(\sigma_{g_{ij}} \gamma_{g_{ij}}), \min_{i=1, \dots, p}(\vartheta_{f_i} \eta_{f_i}), \\ & \min_{i,j=1, \dots, p}(\vartheta_{g_{ij}} \eta_{g_{ij}}), \min_{i=1, \dots, p}(\vartheta_{d_i} \eta_{d_i})), \\ \mu = & \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_{f_i}}{2} \|\boldsymbol{\theta}_{f_i}^*\|^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{\sigma_{g_{ij}}}{2} \|\boldsymbol{\theta}_{g_{ij}}^*\|^2 + \\ & \sum_{i=1}^p \frac{\vartheta_{f_i}}{2} \bar{\varepsilon}_{f_i}^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{\vartheta_{g_{ij}}}{2} \bar{\varepsilon}_{g_{ij}}^2 + \sum_{i=1}^p \frac{\vartheta_{d_i}}{2} \bar{d}_i^2 + \\ & \sum_{i=1}^p 0.2785 \bar{\varepsilon}_{f_i} \omega_f + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p 0.2785 \bar{\varepsilon}_{g_{ij}} \omega_g + \\ & \sum_{i=1}^p 0.2785 \bar{d}_i \omega_d + \sum_{i=1}^p 0.2785 \omega_0. \end{aligned}$$

式(38)两边分别乘以  $e^{\chi t}$ , 有

$$\left(\frac{d}{dt}\right)(V(t)e^{\chi t}) \leq e^{\chi t} \mu, \tag{39}$$

在  $[0, t]$  内, 对式(39)积分, 可得

$$0 \leq V(t) \leq \left(V(0) - \frac{\mu}{\chi}\right)e^{-\chi t} + \frac{\mu}{\chi} \leq V(0) + \frac{\mu}{\chi}. \tag{40}$$

因此  $V(t) \leq V(0)$ , 即  $V(t)$  为非递增有界函数. 式(40)表明, 闭环系统的所有信号半全局一致最终有界, 即  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_i}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{g_{ij}}, \tilde{\varepsilon}_{f_i}, \tilde{\varepsilon}_{g_{ij}}, \tilde{d}_i, s_i(t)$  及  $\dot{s}_i(t)$  半全局一致最终有界, 从而  $\boldsymbol{\theta}_{f_i}, \boldsymbol{\theta}_{g_{ij}}, \hat{\varepsilon}_{f_i}, \hat{\varepsilon}_{g_{ij}}, \hat{d}_i$  半全局一致最终有界.  $\square$

### 3 仿真研究

被控对象为平面运动的二自由度刚性机械臂, 其动态方程为<sup>[20]</sup>

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \right\}.$$

其中

$$\begin{aligned} M_{11} &= a_1 + 2a_3 \cos q_2 + 2a_4 \sin q_2, \\ M_{21} &= M_{12} = a_2 + a_3 \cos q_2 + a_4 \sin q_2, \\ M_{22} &= a_2, \quad h = a_3 \sin q_2 - a_4 \cos q_2, \\ a_1 &= I_1 + m_1 l_{c1}^2 + I_e + m_e l_{ce}^2 + m_e l_1^2, \\ a_2 &= I_e + m_e l_{ce}^2, \quad a_3 = m_e l_1 l_{ce} \cos \delta_e, \\ a_4 &= m_e l_1 l_{ce} \sin \delta_e. \end{aligned}$$

参数  $m_1 = 1, m_e = 2, l_1 = 1, l_{c1} = 0.5, l_{ce} = 0.6, I_1 = 0.12, I_e = 0.25, \delta_e = 30^\circ$ . 令  $\mathbf{x} = [q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2]^T, \mathbf{y} = [q_1, q_2]^T, \mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$ .

参照式(2), 该MIMO仿射非线性系统的  $\mathbf{G}(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$  分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} g_{11}(\mathbf{x}) & g_{12}(\mathbf{x}) \\ g_{21}(\mathbf{x}) & g_{22}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1}, \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \\ & -\mathbf{M}^{-1} \left( \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \right), \\ \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= -\mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \\ & -\mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} 0.2 \sin q_1 \cos q_2 + 0.04 \cos(0.3t) \\ 0.1 \cos q_1 \sin q_2 + 0.03 \cos(0.2t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因矩阵  $\mathbf{M}$  正定, 故  $\mathbf{M}^{-1}$  也是正定的.

机械臂的初始状态选择为  $\mathbf{x}(0) = [0.5, 0, 0.25, 0]^T$ . 控制的目标是使  $q_1$  和  $q_2$  分别跟踪期望轨迹  $y_{d1} = \sin t$  和  $y_{d2} = \cos t$ .

假定  $\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{G}(\mathbf{x})$  完全未知, 在具有未知逼近误差和未知外界扰动上界的情况下进行仿真, 同时待调节参数的初始值均设定为零, 以反映不依赖于系统任何先验知识的事实. 仿真中, 逼近  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  的ELM网络的输入为  $q_1(t), \dot{q}_1(t), q_2(t), \dot{q}_2(t)$ , 逼近  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  的ELM网络的输入为  $q_1(t), q_2(t)$ .

选择设计参数为:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 20, \mathbf{K}_0 = \text{diag}\{100, 100\}, c_{11} = c_{21} = 20, \gamma_{f_i} = \gamma_{g_{ij}} = 10, \sigma_{f_i} = \sigma_{g_{ij}} = 50, \eta_{f_i} = \eta_{g_{ij}} = \eta_{d_i} = 0.0001, \vartheta_{f_i} = \vartheta_{g_{ij}} = \vartheta_{d_i} = 0.001, i, j = 1, 2, \omega_f = \omega_g = \omega_d = 10, \sigma_0 = 2$ . ELM网络的隐含层节点分别考虑RBF节点及可加性节点, 即  $k(\mathbf{x}; \mathbf{w}, b) = \exp(-\|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|^2/b)$  及  $k(\mathbf{x}; \mathbf{w}, b) = 1/(1 +$

$\exp(-(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b))$ ), 隐含层节点个数均选取为  $L = 10$ , 隐含层节点参数  $(\mathbf{w}, b)$  分别在  $[-1, 1]$  及  $[0, 1]$  之间随机确定. 用于比较的RBF网络自适应控制方法中, 其隐含层节点个数也选取10, 高斯基函数参数中心矢量值按均匀分布在网络输入值范围内的值选取, 范围为  $[-2, 2]$ , 基宽的取值为0.1.

图1和图2给出了基于控制律(19)的条件下, 关节1与关节2的位置跟踪曲线. 可以看出, 采用不同节点的ELM自适应神经控制方法取得了较好的跟踪控制效果.

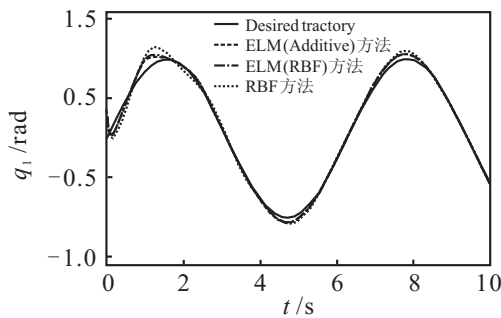


图1 关节1位置跟踪

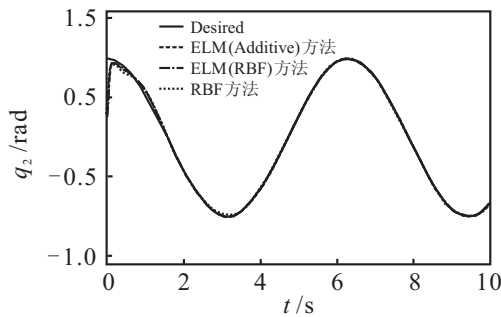


图2 关节2位置跟踪

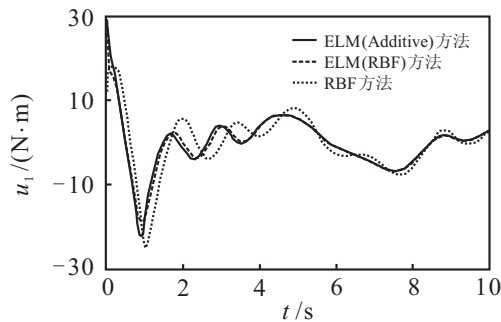


图3 关节1控制输入

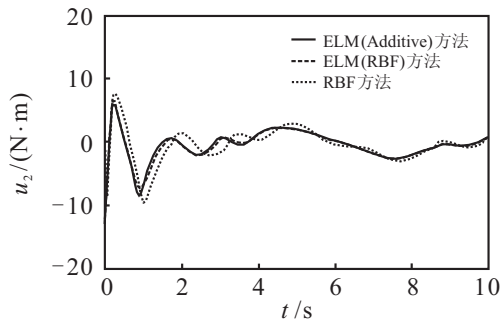


图4 关节2控制输入

图3和图4给出了在整个控制过程中, 其控制输入信号变化的曲线. 可以看出, ELM控制方法呈现出很好的平滑有界状态.

图5和图6还给出了关节1和关节2的位置跟踪误差曲线. 同时, 为进一步从数值上比较差异, 不同控制方法的位置跟踪均方根误差(RMSE)也在表1中列出. 从图5、图6及表1的结果可以看出, 基于ELM的鲁棒自适应控制方法, 其RMSE明显较小, 这充分验证了其良好的跟踪性能以及方法的有效性.

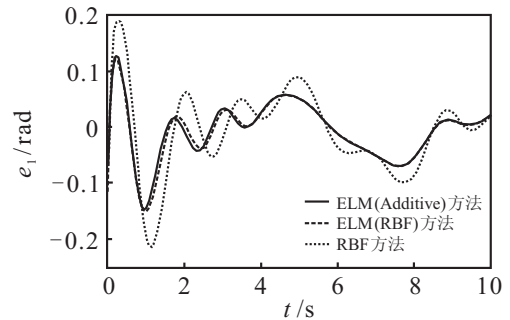


图5 关节1位置跟踪误差

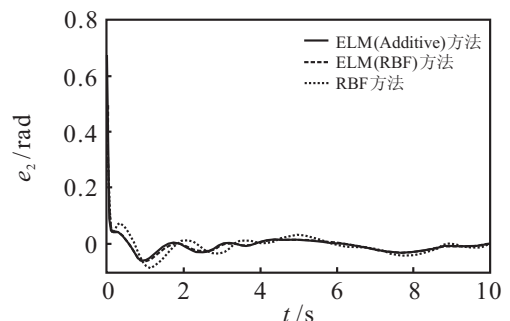


图6 关节2位置跟踪误差

表1 不同控制方法的评价指标比较

控制方法	RMSE	
	关节1	关节2
ELM(Additive)方法	0.0484	0.0439
ELM(RBF)方法	0.0485	0.0374
RBF方法	0.0702	0.0477

### 4 结论

针对一类不确定性MIMO仿射非线性系统, 本文提出了一种基于ELM的鲁棒自适应神经控制方法. 采用该方法设计的自适应控制器由ELM控制项和克服逼近误差及外界扰动的鲁棒控制项构成, 同时利用附加的鲁棒控制项进一步“抵消”模型的重构误差和外界扰动. 利用Lyapunov稳定性分析理论设计了相应的参数自适应调节律, 对ELM的网络输出权值、最小逼近误差以及外界扰动的未知确定上界值进行在线自适应调整, 以确保闭环系统的所有信号半全局一致最终有界. 最后通过仿真实例验证了所提

出方法的有效性. 此外, 考虑到Backstepping方法在设计不确定性系统的自适应控制器方面的优势, 把Backstepping方法与ELM结合起来设计自适应控制器, 将是下一步的研究重点.

### 参考文献(References)

- [1] Seshagiri S, Khalil H K. Output feedback control of nonlinear systems using RBF neural networks[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2000, 11(1): 69-79.
- [2] Gao W, Selmic R R. Neural network control of a class of nonlinear systems with actuator saturation[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2006, 17(1): 147-156.
- [3] Wang W Y, Chan M L, Hsu C C J, et al.  $H_\infty$  tracking-based sliding mode control for uncertain nonlinear systems via an adaptive fuzzy-neural approach[J]. IEEE Trans on SMC, Part B: Cybernetics, 2002, 32(4): 483-492.
- [4] Phan P A, Gale T. Two-mode adaptive fuzzy control with approximation error estimator[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15(5): 943-955.
- [5] Huaguang Z, Cai L, Bien Z. A fuzzy basis function vector-based multivariable adaptive controller for nonlinear systems[J]. IEEE Trans on SMC, Part B: Cybernetics, 2000, 30(1): 210-217.
- [6] Li H X, Tong S. A hybrid adaptive fuzzy control for a class of nonlinear MIMO systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2003, 11(1): 24-34.
- [7] Labiod S, Boucherit M S, Guerra T M. Adaptive fuzzy control of a class of MIMO nonlinear systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 151(1): 59-77.
- [8] Ge S S, Wang C. Adaptive neural control of uncertain MIMO nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2004, 15(3): 674-692.
- [9] Chen M, Ge S S, Voon Ee How B. Robust adaptive neural network control for a class of uncertain MIMO nonlinear systems with input nonlinearities[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2010, 21(5): 796-812.
- [10] Chiu C S. Mixed feedforward/feedback based adaptive fuzzy control for a class of MIMO nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2006, 14(6): 716-727.
- [11] Rovithakis G A. Tracking control of multi-input affine nonlinear dynamical systems with unknown nonlinearities using dynamical neural networks[J]. IEEE Trans on SMC, Part B: Cybernetics, 1999, 29(2): 179-189.
- [12] 胡慧, 刘国荣, 刘洞波, 等. 一类不确定非线性MIMO系统的神经网络输出反馈跟踪控制[J]. 控制理论与应用, 2010, 27(3): 382-386.  
(Hu H, Liu G R, Liu D B, et al. Output feedback tracking control for a class of uncertain nonlinear MIMO systems using neural network[J]. Control Theory & Application, 2010, 27(3): 382-386.)
- [13] Kostarigka A K, Rovithakis G A. Adaptive dynamic output feedback neural network control of uncertain MIMO nonlinear systems with prescribed performance[J]. IEEE Trans on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23(1): 138-149.
- [14] Tong S, Li H X. Fuzzy adaptive sliding-mode control for MIMO nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2003, 11(3): 354-360.
- [15] 王艳秋, 王建辉, 顾树生, 等. 自适应模糊神经控制器在MIMO系统中的应用研究[J]. 控制与决策, 2004, 19(5): 577-581.  
(Wang Y Q, Wang J H, Gu S S, et al. Application research of adaptive fuzzy neural controller for MIMO system[J]. Control and Decision, 2004, 19(5): 577-581.)
- [16] Huang G B, Zhu Q Y, Siew C K. Extreme learning machine: A new learning scheme of feedforward neural networks[C]. Proc of the 2004 IEEE Int Joint Conf on Neural Networks. Budapest, 2004: 985-990.
- [17] Rong H J, Zhao G S. Direct adaptive neural control of nonlinear systems with extreme learning machine[J]. Neural Computing and Applications, 2013, 22(3): 577-586.
- [18] Huang G B, Wang D H, Lan Y. Extreme learning machines: A survey[J]. Int J of Machine Learning and Cybernetics, 2011, 2(2): 107-122.
- [19] Polycarpou M M. Stable adaptive neural control scheme for nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(3): 447-451.
- [20] Slotine J J E, Li W. Applied nonlinear control[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1991: 392-433.

(责任编辑: 李君玲)