

多目标联合检测与估计的误差界

连峰, 王婷婷, 韩崇昭

(西安交通大学 电子与信息工程学院, 西安 710049)

摘要: 在随机有限集框架下提出了当杂波和漏检存在时基于最优子模式分配距离的多目标联合检测与估计(JDE)误差界. 此处的JDE是指同时估计目标个数和存活目标状态. 算例1展示了该误差界随传感器检测概率和杂波密度的变化趋势; 算例2利用多假设跟踪, 概率假设密度(PHD)和势PHD滤波器对该误差界的有效性进行了验证.

关键词: 误差界; 多目标跟踪; 联合检测与估计; 随机有限集

中图分类号: TP274

文献标志码: A

Error bounds for joint detection and estimation of multiple targets

LIAN Feng, WANG Ting-ting, HAN Chong-zhao

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China. Correspondent: LIAN Feng, E-mail: lianfeng1981@mail.xjtu.edu.cn)

Abstract: Within the random finite set framework, the error bound for joint detection and estimation(JDE) of multiple targets is proposed based on the optimal sub-pattern assignment distance in the presence of clutter and missed detection. The JDE here refers to estimating the number of the targets and their existing states. Example 1 shows the variation of the bound with the probability of detection and clutter density. Example 2 verifies the effectiveness of the bound by using the multiple hypothesis tracking, probability hypothesis density(PHD), and cardinalized PHD filters.

Keywords: error bounds; multiple targets tracking; joint detection and estimation; random finite set

0 引言

误差界是指一个算法理论上所能达到的最小估计误差,它是衡量算法性能的重要依据.对于单目标状态估计问题, Tichavsky等^[1]采用递推后验克拉美罗下界(PCRLB)来衡量其均方估计误差.随后PCRLB又被推广到杂波或漏检存在^[2-3]以及目标机动^[4]等场景.然而,PCRLB没有考虑目标个数估计(也即检测)问题,故其不能作为多目标联合检测和估计(JDE)的误差界,此处的JDE是指同时估计目标个数与存活目标状态.最近, Rezaeian等^[5]在随机有限集(RFS)框架下提出了单目标JDE的误差界. Tong等^[6]在无杂波但有漏检的条件下给出了该界的递推形式,并将其扩展到无杂波且无漏检时的多目标场景.但对于杂波和漏检同时存在时的多目标JDE问题,其误差界的研究难度将显著增大,目前尚未见到相关结论报道.

本文通过将多目标状态和杂波分别建模为多

Bernoulli RFS和Poisson RFS,并假定采用最大后验概率(MAP)检测器和无偏估计器,获得了杂波和漏检同时存在时基于最优子模式分配(OSPA)距离^[7]的多目标JDE误差界.仿真实验展示了该误差界随传感器检测概率和杂波密度的变化趋势,并利用多假设跟踪(MHT)滤波器^[8],概率假设密度(PHD)滤波器^[9]和势PHD(CPHD)^[10]滤波器3种常用的多目标JDE算法对该误差界的有效性进行了验证.

1 问题描述

记单目标状态为 L 维矢量 $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_L]^T \in \mathcal{X}$,其中 \mathcal{X} 表示单目标状态空间.多目标状态集合记为 X ,其可建模为由 N 个Bernoulli RFS $X^{(t)}$ 构成的多Bernoulli RFS,即

$$X = \bigcup_{t=1}^N X^{(t)}, \quad (1)$$

其中 N 表示可能出现的最大目标数. X 的概率密

收稿日期: 2014-07-07; 修回日期: 2014-12-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61473217); 国家973计划项目(2013CB329405); 陕西省自然科学基金项目(2014JQ8333).

作者简介: 连峰(1981-),男,副教授,从事信息融合、目标跟踪等研究; 韩崇昭(1943-),男,教授,博士生导师,从事估计与滤波、信息融合等研究.

度^[11]为

$$\begin{cases} \pi(X) = \pi(\emptyset) \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_{|X|} \leq N} \prod_{t=1}^{|X|} \frac{r_{j_t} f_{j_t}(\mathbf{x}_t)}{1 - r_{j_t}}, \\ \pi(\emptyset) = \prod_{t=1}^N (1 - r_t). \end{cases} \quad (2)$$

其中: $|X|$ 为 X 的势, $r_t \in [0, 1]$ 为 $X^{(t)} \neq \emptyset$ 的概率, $f_t(\mathbf{x}_t)$ 为 \mathbf{x}_t 的概率密度, j_t 为第 j_t 个元素的存活概率和分布密度, $1 < j_t < N$.

记单个传感器观测为 $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$, 其中 \mathcal{Z} 为观测空间. 传感器观测集合记为 Z , 它由目标产生的测量和杂波测量构成, 即

$$Z = Z_\emptyset(\mathbf{x}_1) \cup \dots \cup Z_\emptyset(\mathbf{x}_{|X|}) \cup Z_C. \quad (3)$$

其中: $Z_\emptyset(\mathbf{x}_t)$ 为目标 \mathbf{x}_t 产生的测量集, 其或者以检测概率 $p_D(\mathbf{x}_t) \in [0, 1]$ 计算时为 $\{\mathbf{z}_i\}$, 相应的单目标单测量似然函数为 $g(\mathbf{z}_i|\mathbf{x}_t)$, 或者以漏检概率 $q(\mathbf{x}_t) = 1 - p_D(\mathbf{x}_t)$ 计算时为 \emptyset ; Z_C 为杂波集, 假设其为一个 Poisson RFS, 强度为

$$v(\mathbf{z}) = \lambda f_C(\mathbf{z}), \quad (4)$$

λ 为平均杂波数, $f_C(\cdot)$ 为杂波分布的概率密度.

记 $X_n = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \in \mathcal{X}_n$ 和 $Z_m = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m\} \in \mathcal{Z}_m$ 分别表示 $|X| = n$ 和 $|Z| = m$, 记 $X_0 = Z_0 = \emptyset$. RFS 框架下的多目标 JDE 问题是指根据测量集合 Z 获得多目标状态集合估计 $\hat{X}(Z)$. 本文的目的是推导得到该问题的误差界.

2 多目标 JDE 误差界

RFS 框架下多目标 JDE 的均方误差可定义为

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathbb{E}[e^2(X, \hat{X}(Z))] = \\ &= \int \int f(X, Z) e^2(X, \hat{X}(Z)) \delta X \delta Z = \\ &= \int \int \gamma(Z|X) f(X) e^2(X, \hat{X}(Z)) \delta X \delta Z, \end{aligned} \quad (5)$$

其中: $\mathbb{E}[\cdot]$ 为取期望, $e(X, \hat{X}(Z))$ 为集合 X 和 $\hat{X}(Z)$ 之间的误差, $f(X, Z)$ 为 X 和 Z 的联合密度, $\gamma(Z|X) = f(Z|X)$ 为总的传感器测量似然函数, $\int \delta Z$ 为集合积分, 其定义如下^[9]:

$$\begin{aligned} &= \int f(Z) \delta Z \triangleq \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{Z}_n} f(Z_n) d\mathbf{z}_1 \dots d\mathbf{z}_n = \\ &= f(\emptyset) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{Z}_n} f(Z_n) d\mathbf{z}_1 \dots d\mathbf{z}_n. \end{aligned} \quad (6)$$

既然 $e(X, \hat{X}(Z))$ 为集合间的误差, 故它不能利用衡量矢量间误差的欧式距离进行度量. 本文采用阶数 $p=2$ 的 OSPA 距离^[7] 定义 $e(X, \hat{X}(Z))$, 即

$$e^2(X, \hat{X}(Z)) =$$

$$\begin{cases} \left(\min_{\tau \in \Pi_{\max(|\hat{X}(Z)|, |X|)}} \sum_{t=1}^{\min(|\hat{X}(Z)|, |X|)} \min(c^2, \|\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{\tau(t)}(Z)\|_2^2) + c^2 |\hat{X}(Z)| - |X| \right) / \\ \max(|\hat{X}(Z)|, |X|), |\hat{X}(Z)| + |X| > 0; \\ 0, |\hat{X}(Z)| = |X| = 0. \end{cases} \quad (7)$$

其中: $c > 0$ 为截断误差, Π_n 为集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的全排列, $\max(\cdot)$ 和 $\min(\cdot)$ 分别为取最大值和最小值运算, $\|\cdot\|_2$ 为取 2 范数. 由式 (7) 可以看出, OSPA 距离实际上是将 $\hat{X}(Z)$ 中的元素与 X 中距离最近的元素分别相匹配, 没有获得匹配的估计反映了两个集合间的势误差.

令映射

$$\theta_{|X|, |Z|} : \{1, \dots, |X|\} \rightarrow \{0, 1, \dots, |Z|\} \quad (8)$$

为考虑漏检和杂波时多目标状态集 X 到测量集 Z 的关联假设函数, 它描述了两者的对应关系. $\theta_{|X|, |Z|}$ 满足若 $\theta_{|X|, |Z|}(t) = \theta_{|X|, |Z|}(t') > 0$, 则 $t = t'$, $t = 1, 2, \dots, |X|$, 其中 $\theta_{|X|, |Z|}(t) = 0$ 为第 t 个目标没有产生测量, 该测量为杂波. $\theta_{|X|, |Z|}$ 反映了漏检和杂波同时存在时点目标跟踪的两个基本假设, 即: 1) 每个点目标至多产生 1 个测量; 2) 每个测量至多源于 1 个点目标或杂波.

对于任意有限集 Z 和任意实值函数 $h(\cdot)$, 定义

$$h^Z = \begin{cases} \prod_{\mathbf{z} \in Z} h(\mathbf{z}), & Z \neq \emptyset; \\ 1, & Z = \emptyset. \end{cases} \quad (9)$$

根据文献 [11], 给定式 (3) 所示的测量模型, 传感器测量似然函数 $\gamma(Z|X)$ 可写为

$$\gamma(Z|X) = e^{-\lambda v^Z} \sum_{\theta_{|X|, |Z|}} \prod_{t=1}^{|X|} G(\mathbf{z}_{\theta_{|X|, |Z|}(t)} | \mathbf{x}_t), \quad (10)$$

其中记

$$G(\mathbf{z}_{\theta_{|X|, |Z|}(t)} | \mathbf{x}_t) = \begin{cases} \frac{(1 - q(\mathbf{x}_t)) g(\mathbf{z}_{\theta_{|X|, |Z|}(t)} | \mathbf{x}_t)}{v(\mathbf{z}_{\theta_{|X|, |Z|}(t)})}, & \theta_{|X|, |Z|}(t) > 0; \\ q(\mathbf{x}_t), & \theta_{|X|, |Z|}(t) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

为单目标单测量广义似然函数.

为了获得多目标 JDE 误差界, 需要给出如下两点假设:

1) 采用 MAP 检测器估计目标个数. 即给定测量集 Z , 多目标状态估计集合 $\hat{X}(Z)$ 的势 \hat{n} 通过最大化后验概率 $P(|X| = n|Z)$ 得到

$$\hat{n} = \arg \max_n P(|X| = n|Z). \quad (12)$$

2) 状态估计器是无偏的. 此时可利用如下的信息不等式^[12]: 若 $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ 上的联合概率密度 $f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 满

足正则条件且 $\partial^2 \log f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) / \partial x_i \partial x_j$ 存在, 则如下不等式成立:

$$\int_{\mathcal{Z}} \int_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x}, \mathbf{z})(x_l - \hat{x}_l(\mathbf{z}))^2 d\mathbf{x} d\mathbf{z} \geq [J^{-1}]_{l,l}. \quad (13)$$

其中: $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ 为由 \mathbf{z} 获得的 \mathbf{x} 的无偏估计; x_l 和 $\hat{x}_l(\mathbf{z})$ 分别为 \mathbf{x} 和 $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ 的第 l 个分量, $l = 1, 2, \dots, L$, L 为 \mathbf{x} 的维数; J 为 $L \times L$ 维 Fisher 信息矩阵, 矩阵中的元素分别为

$$[J]_{i,j} = -E_f \left[\frac{\partial^2 \log f(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial x_i \partial x_j} \right] =$$

$$\sigma^2 \geq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{\hat{n}=0}^N \frac{\Omega_{n,m}}{m!n! \max(n, \hat{n})} \left(\sum_{t=1}^{\min(n, \hat{n})} \min \left(c^2 \omega_{\hat{n},n,m}, \sum_{l=1}^L [J_{t, \hat{n}, n, m}^{-1}]_{l,l} \right) + c^2 \omega_{\hat{n},n,m} |n - \hat{n}| \right). \quad (15)$$

其中

$$[J_{t, \hat{n}, n, m}]_{i,j} = \frac{-1}{\omega_{\hat{n},n,m}^2} \int_{\mathcal{Z}_{\hat{n},m}} \int_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n) \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n)}{\partial x_{i,t} \partial x_{j,t}} d\mathbf{x}_t d\mathbf{z}_1 \cdots d\mathbf{z}_m; \quad (16)$$

$$\omega_{\hat{n},n,m} = \frac{\pi(\emptyset) e^{-\lambda}}{\Omega_{n,m}} \int_{\mathcal{Z}_{\hat{n},m}} \nu^{Z_m} \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_n \leq N} \sum_{\theta_{n,m}} D_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(1)}, \dots, \mathbf{z}_{\theta_{n,m}(n)}) d\mathbf{z}_1 \cdots d\mathbf{z}_m; \quad (17)$$

$$\mathcal{Z}_{\hat{n},m} = \{Z_m \in \mathcal{Z}_m : \arg \max_n \{\beta_n(Z_m)\} = \hat{n}\}; \quad (18)$$

$$\beta_n(Z_m) = \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_n \leq N} \prod_{t=1}^n \frac{r_{j_t}}{1 - r_{j_t}} \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_n \leq N} \sum_{\theta_{n,m}} D_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(1)}, \dots, \mathbf{z}_{\theta_{n,m}(n)}); \quad (19)$$

$$f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n) = \pi(\emptyset) \frac{e^{-\lambda} \nu^{Z_m}}{\Omega_{n,m}} \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_n \leq N} \sum_{\theta_{n,m}} \frac{D_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(1)}, \dots, \mathbf{z}_{\theta_{n,m}(n)})}{H_{j_t}(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(t)})} f_{j_t}(\mathbf{x}_t) G(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(t)} | \mathbf{x}_t); \quad (20)$$

$$\Omega_{n,m} = \pi(\emptyset) e^{-\lambda} \lambda^m \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_n \leq N} \sum_{\theta_{n,m}} \prod_{t=1}^n \frac{r_{j_t}}{1 - r_{j_t}} K_{j_t}; \quad (21)$$

$$K_{j_t} = \begin{cases} \int_{\mathcal{X}} \frac{(1 - q(\mathbf{x}_t)) f_{j_t}(\mathbf{x}_t) d\mathbf{x}_t}{\lambda}, & \theta_{n,m}(t) > 0; \\ \int_{\mathcal{X}} q(\mathbf{x}_t) f_{j_t}(\mathbf{x}_t) d\mathbf{x}_t, & \theta_{n,m}(t) = 0; \end{cases} \quad (22)$$

$$D_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(1)}, \dots, \mathbf{z}_{\theta_{n,m}(n)}) = \prod_{t=1}^n \frac{r_{j_t}}{1 - r_{j_t}} H_{j_t}(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(t)}); \quad (23)$$

$$H_{j_t}(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(t)}) = \int_{\mathcal{X}} f_{j_t}(\mathbf{x}_t) G(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(t)} | \mathbf{x}_t) d\mathbf{x}_t. \quad (24)$$

在式(16)~(24)中, $\pi(\emptyset)$ 和 $G(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(t)} | \mathbf{x}_t)$ 分别如式(2)和(11)所示; $J_{t, \hat{n}, n, m}$ 为给定测量个数为 m 、多目标真实个数为 n 、估计个数为 \hat{n} 时第 t 个目标所对应的 Fisher 信息矩阵; $J_{t, \hat{n}, n, m}$ 和 $\omega_{\hat{n},n,m}$ 的计算公式中积分区域 $\mathcal{Z}_{\hat{n},m}$ 表示根据 MAP 准则将多目标个数估计为 \hat{n} 时所对应的测量空间, $\mathcal{Z}_{0,m}, \mathcal{Z}_{1,m}, \dots, \mathcal{Z}_{N,m}$ 构成了 \mathcal{Z}_m 的一个个数为 $N + 1$ 的划分; $f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n)$ 为给定条件 $\mathbf{x}_t \in X_n$ 时 (\mathbf{x}_t, Z_m) 的联合概率密度, $\Omega_{n,m}$ 为其归一化因子.

根据信息不等式, 当且仅当条件概率密度 $f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n)$ ($t = 1, 2, \dots, \min(n, \hat{n})$) 满足高斯分布时, 式(15)取 ‘=’ 号.

$$- \int_{\mathcal{Z}} \int_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial x_i \partial x_j} d\mathbf{x} d\mathbf{z}, \quad i, j = 1, 2, \dots, L. \quad (14)$$

当且仅当条件概率密度 $f(\mathbf{x} | \mathbf{z})$ 满足高斯分布时, 式(13)取 ‘=’ 号.

定理 1 若多目标状态集合和测量集合分别满足式(1)所示的多 Bernoulli 模型和式(3)所示的观测模型, 则该多目标联合 MAP 检测与无偏估计的误差界为

$$\sigma^2 \geq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{\hat{n}=0}^N \frac{\Omega_{n,m}}{m!n! \max(n, \hat{n})} \left(\sum_{t=1}^{\min(n, \hat{n})} \min \left(c^2 \omega_{\hat{n},n,m}, \sum_{l=1}^L [J_{t, \hat{n}, n, m}^{-1}]_{l,l} \right) + c^2 \omega_{\hat{n},n,m} |n - \hat{n}| \right). \quad (15)$$

$$[J_{t, \hat{n}, n, m}]_{i,j} = \frac{-1}{\omega_{\hat{n},n,m}^2} \int_{\mathcal{Z}_{\hat{n},m}} \int_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n) \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n)}{\partial x_{i,t} \partial x_{j,t}} d\mathbf{x}_t d\mathbf{z}_1 \cdots d\mathbf{z}_m; \quad (16)$$

$$\omega_{\hat{n},n,m} = \frac{\pi(\emptyset) e^{-\lambda}}{\Omega_{n,m}} \int_{\mathcal{Z}_{\hat{n},m}} \nu^{Z_m} \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_n \leq N} \sum_{\theta_{n,m}} D_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(1)}, \dots, \mathbf{z}_{\theta_{n,m}(n)}) d\mathbf{z}_1 \cdots d\mathbf{z}_m; \quad (17)$$

$$\mathcal{Z}_{\hat{n},m} = \{Z_m \in \mathcal{Z}_m : \arg \max_n \{\beta_n(Z_m)\} = \hat{n}\}; \quad (18)$$

$$\beta_n(Z_m) = \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_n \leq N} \prod_{t=1}^n \frac{r_{j_t}}{1 - r_{j_t}} \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_n \leq N} \sum_{\theta_{n,m}} D_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(1)}, \dots, \mathbf{z}_{\theta_{n,m}(n)}); \quad (19)$$

$$f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n) = \pi(\emptyset) \frac{e^{-\lambda} \nu^{Z_m}}{\Omega_{n,m}} \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_n \leq N} \sum_{\theta_{n,m}} \frac{D_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(1)}, \dots, \mathbf{z}_{\theta_{n,m}(n)})}{H_{j_t}(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(t)})} f_{j_t}(\mathbf{x}_t) G(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(t)} | \mathbf{x}_t); \quad (20)$$

$$\Omega_{n,m} = \pi(\emptyset) e^{-\lambda} \lambda^m \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_n \leq N} \sum_{\theta_{n,m}} \prod_{t=1}^n \frac{r_{j_t}}{1 - r_{j_t}} K_{j_t}; \quad (21)$$

$$K_{j_t} = \begin{cases} \int_{\mathcal{X}} \frac{(1 - q(\mathbf{x}_t)) f_{j_t}(\mathbf{x}_t) d\mathbf{x}_t}{\lambda}, & \theta_{n,m}(t) > 0; \\ \int_{\mathcal{X}} q(\mathbf{x}_t) f_{j_t}(\mathbf{x}_t) d\mathbf{x}_t, & \theta_{n,m}(t) = 0; \end{cases} \quad (22)$$

$$D_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(1)}, \dots, \mathbf{z}_{\theta_{n,m}(n)}) = \prod_{t=1}^n \frac{r_{j_t}}{1 - r_{j_t}} H_{j_t}(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(t)}); \quad (23)$$

$$H_{j_t}(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(t)}) = \int_{\mathcal{X}} f_{j_t}(\mathbf{x}_t) G(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(t)} | \mathbf{x}_t) d\mathbf{x}_t. \quad (24)$$

证明 首先利用式(12)所示的 MAP 检测准则获得不同目标数估计所对应的测量空间.

给定测量集 Z_m , 由 Bayes 公式可得

$$P(|X| = n | Z_m) = \frac{P(|X| = n) P(Z_m | |X| = n)}{P(Z_m)}. \quad (25)$$

其中

$$P(|X| = n) = \int_{\mathcal{X}_n} \pi(X_n) d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_n, \quad (26)$$

$$P(Z_m | |X| = n) =$$

$$\int_{\mathcal{X}_n} \pi(X_n) \gamma(Z_m | X_n) d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_n. \quad (27)$$

将式(2)和(10)代入(26)和(27), 并对 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ 积分后可得

$$P(|X| = n) = \pi(\emptyset) \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_n \leq N} \prod_{t=1}^n \frac{r_{j_t}}{1 - r_{j_t}}, \quad (28)$$

$$P(Z_m | |X| = n) = \pi(\emptyset) e^{-\lambda \nu Z_m} \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_n \leq N} \sum_{\theta_{n,m}} D_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(1)}, \dots, \mathbf{z}_{\theta_{n,m}(n)}), \quad (29)$$

其中 $D_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(1)}, \dots, \mathbf{z}_{\theta_{n,m}(n)})$ 如式 (23) 所示.

将式 (28) 和 (29) 代入 (25), 可得

$$P(|X| = n | Z_m) = \frac{\pi^2(\emptyset) e^{-\lambda \nu Z_m}}{P(Z_m)} \beta_n(Z_m), \quad (30)$$

其中 $\beta_n(Z_m)$ 如式 (19) 所示.

对于 MAP 检测器, 若满足

$$\hat{n} = \arg \max_n \{P(|X| = n | Z_m)\} = \arg \max_n \{\beta_n(Z_m)\} \Leftrightarrow Z_m \in \mathcal{Z}_{\hat{n}, m}, \quad (31)$$

则判定 $|\hat{X}| = \hat{n}$.

利用式 (6) 所示的集合积分定义, 可将式 (5) 写为

$$\sigma^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{m!n!} \int_{\mathcal{Z}_m} \int_{\mathcal{X}_n} \gamma(Z_m | X_n) \pi(X_n) \cdot e^2(X_n, \hat{X}(Z_m)) d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_n d\mathbf{z}_1 \cdots d\mathbf{z}_m. \quad (32)$$

再根据式 (31) 所示的 MAP 检测准则, 将式 (32) 中的积分区域 \mathcal{Z}_m 划分为 $\mathcal{Z}_{0,m}, \mathcal{Z}_{1,m}, \dots, \mathcal{Z}_{N,m}$, 则式 (32) 又可重新写为

$$\sigma^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{\hat{n}=0}^N \frac{1}{m!n!} \int_{\mathcal{Z}_{\hat{n}, m}} \int_{\mathcal{X}_n} \gamma(Z_m | X_n) \cdot \pi(X_n) e^2(X_n, \hat{X}_{\hat{n}}(Z_m)) d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_n d\mathbf{z}_1 \cdots d\mathbf{z}_m. \quad (33)$$

令 $f(X_n, Z_m)$ 表示 (X_n, Z_m) 的联合概率密度, 有

$$f(X_n, Z_m) = \frac{1}{\Omega_{n,m}} \gamma(Z_m | X_n) \pi(X_n), \quad (34)$$

其中归一化因子

$$\Omega_{n,m} = \int_{\mathcal{Z}_m} \int_{\mathcal{X}_n} \pi(X_n) \gamma(Z_m | X_n) d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_n d\mathbf{z}_1 \cdots d\mathbf{z}_m. \quad (35)$$

将式 (2) 和 (10) 分别代入 (34) 和 (35), 并对式 (35) 中的 $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ 积分后可得到 $\Omega_{n,m}$ 如式 (21) 所示, 并有

$$f(X_n, Z_m) = \frac{\pi(\emptyset) e^{-\lambda \nu Z_m}}{\Omega_{n,m}} \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_n \leq N} \sum_{\theta_{n,m}} \prod_{t=1}^n \frac{r_{j_t}}{1 - r_{j_t}} f_{j_t}(\mathbf{x}_t) G(\mathbf{z}_{\theta_{n,m}(t)} | \mathbf{x}_t). \quad (36)$$

根据式 (34) 和 (7) 所示的 OSPA 定义, 式 (33) 变为

$$\sigma^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{\hat{n}=0}^N \frac{\Omega_{n,m}}{m!n! \max(\hat{n}, n)} \int_{\mathcal{Z}_{\hat{n}, m}} \int_{\mathcal{X}_n} f(X_n, Z_m) \cdot \left(\min_{\tau \in \Pi_{\max(\hat{n}, n)}} \sum_{t=1}^{\min(\hat{n}, n)} \min(c^2, \|\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{\tau(t)}(Z_m)\|_2^2) + c^2 |n - \hat{n}| \right) d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_n d\mathbf{z}_1 \cdots d\mathbf{z}_m. \quad (37)$$

记

$$\omega_{\hat{n}, n, m} = \int_{\mathcal{Z}_{\hat{n}, m}} \int_{\mathcal{X}_n} f(X_n, Z_m) d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_n d\mathbf{z}_1 \cdots d\mathbf{z}_m \quad (38)$$

为密度 $f(X_n, Z_m)$ 在空间 $\mathcal{X}_n \times \mathcal{Z}_{\hat{n}, m}$ 上的积分值. 将式 (36) 代入 (38), 并对 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ 积分后可得 $\omega_{\hat{n}, n, m}$ 如式 (17) 所示.

记

$$\tau^{\min} = \arg \min_{\tau \in \Pi_{\max(\hat{n}, n)}} \left\{ \sum_{t=1}^{\min(\hat{n}, n)} \min(c^2, \|\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{\tau(t)}(Z_m)\|_2^2) \right\} \quad (39)$$

为使得 $\sum_{t=1}^{\min(\hat{n}, n)} \min(c^2, \|\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{\tau(t)}(Z_m)\|_2^2)$ 最小时所对应的 $\Pi_{\max(\hat{n}, n)}$ 中的序列, 则根据式 (38) 和 (39), (37) 可写为

$$\sigma^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{\hat{n}=0}^N \frac{\Omega_{n,m}}{m!n! \max(\hat{n}, n)} \left(\sum_{t=1}^{\min(\hat{n}, n)} \min(c^2 \omega_{\hat{n}, n, m}, \int_{\mathcal{Z}_{\hat{n}, m}} \int_{\mathcal{X}_n} f(X_n, Z_m) \|\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{\tau^{\min}(t)}(Z_m)\|_2^2 d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_n d\mathbf{z}_1 \cdots d\mathbf{z}_m) + c^2 |n - \hat{n}| \omega_{\hat{n}, n, m} \right). \quad (40)$$

令 $f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n)$ 表示给定条件 $\mathbf{x}_t \in X_n$ 时 (\mathbf{x}_t, Z_m) 的联合概率密度, 其可通过对 $f(X_n, Z_m)$ 中的 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_{t+1}, \dots, \mathbf{x}_n$ 积分后获得

$$f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n) = \int_{\mathcal{X}_{n-1}} f(X_n, Z_m) d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_{t-1} d\mathbf{x}_{t+1} \cdots d\mathbf{x}_n. \quad (41)$$

将式 (36) 代入 (41), 积分后可得 $f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n)$ 如 (20) 所示.

根据式 (41) 可将 (40) 中的积分项重新写为

$$\int_{\mathcal{Z}_{\hat{n}, m}} \int_{\mathcal{X}_n} f(X_n, Z_m) \|\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{\tau^{\min}(t)}(Z_m)\|_2^2 d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_n d\mathbf{z}_1 \cdots d\mathbf{z}_m =$$

$$\int_{\mathcal{Z}_{\hat{n},m}} \int_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n) [(x_{1,t} - \hat{x}_{1,\tau^{\min}(t)}(Z_m))^2 + \dots + (x_{L,t} - \hat{x}_{L,\tau^{\min}(t)}(Z_m))^2] d\mathbf{x}_t dz_1 \dots dz_m. \quad (42)$$

对密度 $f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n)$ 应用信息不等式, 可得

$$\int_{\mathcal{Z}_{\hat{n},m}} \int_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n) (x_{l,t} - \hat{x}_{l,\tau^{\min}(t)}(Z_m))^2 d\mathbf{x}_t dz_1 \dots dz_m \geq [J_{t,\hat{n},n,m}^{-1}]_{l,l}, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (43)$$

其中

$$[J_{t,\hat{n},n,m}]_{i,j} = \frac{-1}{\omega_{t,\hat{n},n,m}^2} \int_{\mathcal{Z}_{\hat{n},m}} \int_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n) \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n)}{\partial x_{i,t} \partial x_{j,t}} d\mathbf{x}_t dz_1 \dots dz_m, \quad (44)$$

$$\omega_{t,\hat{n},n,m} = \int_{\mathcal{Z}_{\hat{n},m}} \int_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n) d\mathbf{x}_t dz_1 \dots dz_m. \quad (45)$$

$\omega_{t,\hat{n},n,m}$ 为密度 $f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n)$ 在空间 $\mathcal{X}_n \times \mathcal{Z}_{\hat{n},m}$ 上的积分值. 将式 (41) 代入 (45), 并结合 (38) 可得

$$\omega_{t,\hat{n},n,m} = \omega_{\hat{n},n,m}. \quad (46)$$

根据信息不等式, 当且仅当条件概率密度 $f(\mathbf{x}_t, Z_m | \mathbf{x}_t \in X_n)$ 满足高斯分布时, 式 (43) 取 ‘=’ 号. 最终, 将式 (43) 代入 (42) 和 (40) 即可得 (15). \square

需要说明的是, 定理 1 涉及到对 $\theta_{n,m}$ 包含的所有可能的关联假设求和, 而该关联假设的数量随 n 和 m 的增长而迅速增多. 因此, 为了降低本文的计算代价, 通常需要采用一些近似的测量集合划分方法^[13].

3 算例及分析

算例 1 假设 2 维监控区域 $\mathcal{A} = [-A/2, A/2] \times [-A/2, A/2]$ 内存在多个目标, 每个目标的状态均可表示为 $\mathbf{x} = [x, y]^T$, 其中 x 和 y 分别表示 X 轴和 Y 轴的位移. 多目标状态集合为式 (1) 所示的多 Bernoulli RFS, 密度参数集合为 $\{(r_t, f_t(\cdot))\}_{t=1}^N$, 其中

$$f_t(\mathbf{x}_t) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \mathbf{x}_{0,t}, Q_t), \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (47)$$

$\mathcal{N}(\cdot; \mathbf{x}_{0,t}, Q_t)$ 为高斯分布的概率密度函数, $\mathbf{x}_{0,t}$ 和 Q_t 分别为其均值和协方差矩阵.

单目标单测量似然函数

$$g(\mathbf{z} | \mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{z}; \mathbf{h}(\mathbf{x}), R). \quad (48)$$

其中: $\mathbf{h}(\cdot)$ 为观测函数, R 为测量噪声协方差矩阵.

假设传感器检测概率和漏检概率为

$$p_D(\mathbf{x}_t) = p_D, \quad q(\mathbf{x}_t) = q = 1 - p_D, \quad t = 1, 2, \dots, N.$$

假设 Poisson 杂波强度为 $v(\mathbf{z}) = \lambda \mathcal{U}(\mathbf{z}; \mathcal{A})$, 其中 $\mathcal{U}(\cdot; \mathcal{A})$ 表示监控区域内均匀分布的概率密度函数, $\mathcal{U}(\cdot; \mathcal{A}) = 1/A^2$.

在本例中, 假定监控范围为 $A = 100$; 最大可能目标数为 $N = 8$; 目标产生概率分别为 $r_1 = r_2 = 0.8$, $r_3 = r_4 = 0.6$, $r_5 = r_6 = 0.4$, $r_7 = r_8 = 0.2$; 状态协方差矩阵为

$$Q_1 = Q_2 = \begin{bmatrix} 49 & 10 \\ 10 & 49 \end{bmatrix},$$

$$Q_3 = Q_4 = \begin{bmatrix} 36 & 10 \\ 10 & 36 \end{bmatrix},$$

$$Q_5 = Q_6 = \begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 25 \end{bmatrix},$$

$$Q_7 = Q_8 = \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix};$$

传感器观测函数和观测噪声协方差矩阵分别为

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan \frac{y}{x} \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 25 & \\ & 0.01 \end{bmatrix};$$

OSPA 距离的截断误差为 $c^2 = 200$.

根据上述场景和参数, 利用定理 1 即可获得建议的多目标 JDE 误差界. 需要说明的是: $[J_{t,\hat{n},n,m}]_{i,j}$ 计算公式中的求偏导数运算可利用软件 Mathematica 获得, 且 $[J_{t,\hat{n},n,m}]_{i,j}$ 和 $\omega_{\hat{n},n,m}$ 的计算公式中均包含积分运算, 没有解析表达式, 需要采用数值积分法求解.

图 1 展示了在不同 p_D 下建议的多目标 JDE 误差界随 λ 变化的曲线.

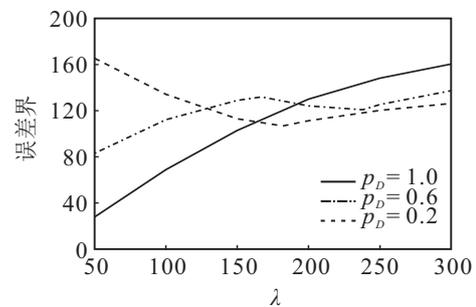


图 1 不同 p_D 下建议的多目标 JDE 误差界随 λ 变化曲线

图 1 反映了当 p_D 一定时, 多目标 JDE 误差界是随 λ 变化的非线性曲线.

1) 对于 $p_D = 1$, 建议的误差界随 λ 的增大而增大. 这是由于: 当 $p_D = 1$ 时, 目标丢失概率很小, 但由于杂波和测量噪声的影响, 会产生虚假目标估计和估计误差; 并且杂波密度越大产生虚假目标估计的可能性越高, 个数也越多, 从而导致该界随 λ 的增大而增大.

2) 对于 $p_D = 0.2$, 建议的误差界先随 λ 的增大而减小, 直到 λ 大于约 180 时, 其变为随 λ 的增大而增大. 这是由于: 当 p_D 较小时, 目标丢失概率通常很大, 当 λ 由 50 增大到约 180 时, 杂波密度的增大反而会在一定程度上降低目标丢失的可能性, 导致该界随 λ 的增大而减小; 但当 λ 过大时, 例如本例中 λ 大于约 180 时, 由于杂波而产生的虚假目标估计占据主导作用, 导致其又随 λ 的增大而增大.

3) 对于 $p_D = 0.6$, 建议的误差界先随 λ 的增大而增大, 直到 λ 大于约 170 小于约 240 时, 其变为随 λ 的增大而减小, 但到 λ 大于约 240 时, 其重新变为随 λ 的增大而增大. 这是由于: 当 $p_D = 0.6$ 左右时, 由于漏检和杂波的共同作用, 丢失目标和虚假目标存在的可能性均较大. 已知漏检存在时杂波密度的增大能同时产生两个相反的作用: 降低目标丢失的可能性以及增加虚假目标估计和估计误差. 当 λ 由约 170 增大到约 240 时, 前者占据主导作用, 导致该界随 λ 的增大而减小; 否则, 后者占据主导作用, 导致该界随 λ 的增大而增大.

此外, 由图 1 还可看出, 对于给定不同的 λ , 建议的多目标 JDE 误差界并不总是随 p_D 而单调减. 对于较小的 λ , 该界随 p_D 的增大而减小, 但随着 λ 的增大, 较大 p_D 所对应的误差界逐渐超越较小 p_D 所对应的误差界. 这是由于: 当 λ 较小时 (如本例中 λ 小于约 130), 相比由杂波引起的虚假目标, 由漏检引起的丢失目标占主导作用. 此时 p_D 越大, 目标丢失误差越小, 故该界随 p_D 单调减. 但随着 λ 的继续增加 (如本例中 λ 大于约 190), 由虚假目标引起的误差逐渐占据主导作用, 此时 p_D 越大反而会造成虚假目标估计越多, 最终导致该界变为随 p_D 单调增.

算例 2 本例利用 MHT^[8], PHD^[9] 和 CPHD^[10] 3 种常用的多目标 JDE 算法对建议的误差界进行验证. 目前该误差界仅关注于静态多目标 JDE 问题, 因此在上述 3 种算法中, 令多目标初始参数与算例 1 相同, 每个目标状态的时间演化模型设为

$$\mathbf{x}_{t,k} = \mathbf{x}_{t,k-1}, t = 1, 2, \dots, N, \quad (49)$$

相应的存活概率设为

$$p_{S,k|k-1}(\mathbf{x}_{t,k}|\mathbf{x}_{t,k-1}) = 1, t = 1, 2, \dots, N. \quad (50)$$

保持算例 1 的仿真场景不变, 图 2 给出了建议的误差界与上述 3 种算法稳态误差 (该误差由 500 次 Monte Carlo 仿真实验获得的平均 OSPA 距离度量) 的比较结果.

由图 2 可以看出:

1) 对于不同的杂波密度和检测概率, MHT, PHD 和 CPHD 的平均 OSPA 误差曲线均接近于建议的误

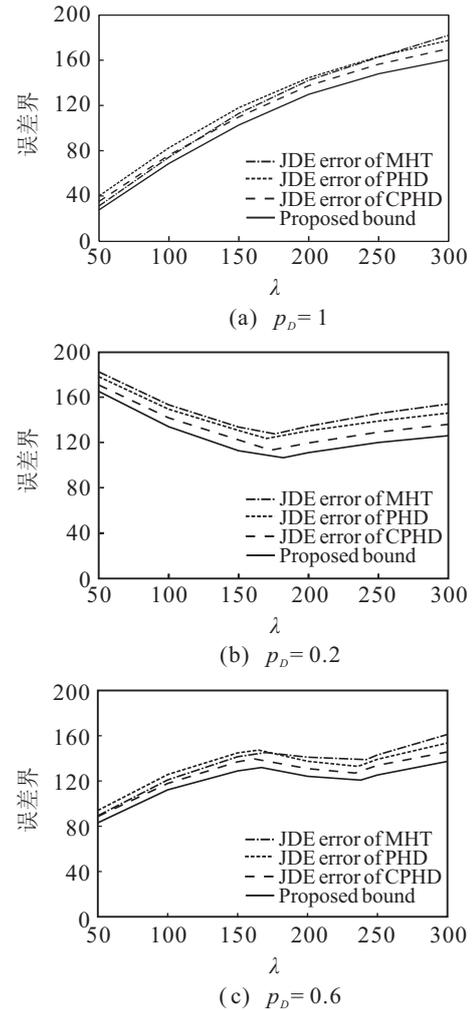


图 2 MHT, PHD, CPHD 的平均 OSPA 距离与建议的多目标 JDE 误差界随 λ 的变化曲线

差界. 给定检测概率, 杂波密度越大, 或给定杂波密度, 检测概率越低, 3 者的稳态误差均超过建议的误差界越多, 但 3 者中的最优值与该界相比, 相对误差均在约 8% 以内.

2) 当检测概率较高, 杂波密度较低时 (例如本例中的 $p_D = 1, \lambda \leq 100$), MHT 的性能最优, 其最接近于建议的误差界, CPHD 次之, PHD 最差. 这是由于在此场景下, MHT 中的数据关联部分较为容易, 其所引起的额外误差相对较小. 而 PHD 和 CPHD 本身均有一定的近似 (例如, PHD 假设多目标状态集合为一个泊松 RFS; CPHD 假设多目标状态集合为一个聚类 RFS), 且它们的粒子滤波实现中由于聚类还会引入一定的额外误差, 所不同的是 CPHD 相比 PHD 具有更加稳定的目标个数估计, 因此它的性能优于后者.

3) 当检测概率较低或杂波密度较高时 (例如本例中的 $p_D = 0.6, \lambda \leq 200$ 或 $p_D = 0.2, \lambda \leq 50$), CPHD 的性能最优, 最接近于建议的误差界, MHT 最差, PHD 略优于 MHT. 这是由于在此场景下, MHT 中的数据关联部分较为复杂, 导致其错误关联率较高, 性能迅速下降. 而 CPHD 不需要进行数据关联, 故其

此时具有较明显的优势. PHD 尽管也不需要数据进行关联, 但是当杂波较密集或检测概率较低时其目标个数估计的波动较大, 导致相应的 OSPA 距离高于 CPHD, 略低于 MHT.

综上所述, 本文建议的误差界能够正确反映这 3 个多目标 JDE 算法可能达到的最优性能, 它可作为衡量该类算法性能的一个有效指标.

4 结 论

当杂波和漏检同时存在时, 本文在 RFS 框架下推导获得了基于 OSPA 距离的多目标 JDE 误差界, 并通过 2 个算例展示了该误差界的应用. 今后的工作主要集中在以下两点:

1) 结合多目标运动模型进一步研究本文误差界的递推形式;

2) 将本文结论推广到扩展目标或群目标^[14]JDE 问题.

参考文献(References)

- [1] Tichavsky P, Muravchik C, Nehorai A. Posterior Cramér-Rao bounds for discrete time nonlinear filtering[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1998, 46(5): 1701-1722.
- [2] Hernandez M, Farina A, Ristic B. PCRLB for tracking in cluttered environments: Measurement sequence conditioning approach[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2006, 26(2): 680-704.
- [3] Hernandez M, Ristic B, Farina A, et al. A comparison of two Cramér-Rao bounds for nonlinear filtering with $P_d < 1$ [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2004, 59(2): 2361-2370.
- [4] Hernandez M, Benavoli A, Graziano A, et al. Performance measures and MHT for tracking move-stop-move targets with MTI sensors[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2011, 47(2): 996-1025.
- [5] Rezaeian M, Vo B N. Error bounds for joint detection and estimation of a single object with random finite set observation[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2010, 58(3): 1943-1506.
- [6] Tong H S, Zhang H, Meng H D, et al. The recursive form of error bounds for RFS state and observation with $P_d < 1$ [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2013, 61(10): 2632-2646.
- [7] Schuhmacher D, Vo B T, Vo B N. A consistent metric for performance evaluation of multi-object filters[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2008, 86(8): 3447-3457.
- [8] 范炳艺, 李建勋, 刘坦. 面向目标的概率多假设跟踪算法[J]. 航空学报, 2010, 31(12): 2373-2378.
(Fan B Y, Li J X, Liu T. Target oriented probabilistic multi-hypothesis tracker algorithm[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2010, 31(12): 2373-2378.)
- [9] Mahler R. Multi-target Bayes filtering via first-order multi-target moments[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2003, 39(4): 1152-1178.
- [10] Mahler R. PHD filters of higher order in target number[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(3): 1523-1543.
- [11] Mahler R. Statistical multisource multitarget information fusion[M]. Norwood: Artech House, 2007: 420-421.
- [12] Poor V. An Introduction to signal detection and estimation[M]. New York: Springer-Verlag, 1994: 169-186.
- [13] Granstrom K, Lundquist C, Orguner O. Extended target tracking using a Gaussian-Mixture PHD filter[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2012, 48(4): 3268-3286.
- [14] 连峰, 韩崇昭, 刘伟峰, 等. 基于 SMC-PHDF 的部分可分辨的群目标跟踪算法[J]. 自动化学报, 2010, 36(5): 731-741.
(Lian F, Han C Z, Liu W F, et al. Tracking partly resolvable group targets using SMC-PHDF[J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(5): 731-741.)

(责任编辑: 孙艺红)