

基于梯形模糊隶属函数的复合语言多目标决策

戴文战, 李 昀

(浙江工商大学 信息与电子工程学院, 杭州 310018)

摘要: 对于一些复杂的决策问题, 使用比较语言比单一语言更能准确地表达专家的看法. 据此, 提出一种同时使用单一语言和比较语言的新算法. 根据上下文无关文法将比较语言表达转换为犹豫模糊语言术语集(HFLTS), 并应用有序加权算子(OWA)计算出由梯形隶属函数表示的模糊语言术语集的模糊包络, 有效地简化了基于HFLTS的词计算过程. 最后应用逼近理想解排序(TOPSIS)方法进行决策.

关键词: 犹豫模糊语言术语集; 有序加权算子; 梯形模糊隶属函数; 比较语言表达

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Multi-target decision making method of composite linguistic expressions based on trapezoidal fuzzy membership function

DAI Wen-zhan, LI Yun

(School of Information and Electronic Engineering, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China.

Correspondent: DAI Wen-zhan, E-mail: dwz@zjsu.edu.cn)

Abstract: For some complicated decision problems, it is difficult to express clearly experts thought by only using deterministic linguistic. Therefore according to comparative linguistic expressions, the multi-target decision making method of composite linguistic expressions is presented based on the trapezoidal fuzzy membership function. Firstly, the comparative linguistic expressions are transformed into hesitant fuzzy linguistic term sets(HFLTS) with the use of context-free grammars. Then the fuzzy envelope of HFLTS represented by trapezoidal membership function is calculated by ordered weighted averaging(OWA) operator in order to simplify effectively computing processes of words. Finally, An example of supplier selection is given to illustrate the proposed decision method.

Keywords: hesitant fuzzy linguistic term sets; ordered weighted averaging operator; trapezoidal fuzzy membership function; comparative linguistic expressions

0 引言

现实的大量决策问题常常具有信息的不完备和不确定性. 在这种情况下, 采用模糊语言形式的偏好信息更能体现决策者的真实想法. 采用复合语言表达比单个语言值能够更加精确地表达个人偏好. Ma等^[1]将不同的单一语言值集合于一个新的综合评价体系中以提高语言表达的灵活性, 但没有提供一个规范化的综合评价的语法. Tang等^[2]提出了一种通过描述语言变量之间相似程度的模糊关系描述方法. Dong等^[3]在分析3类语言OWA算子(LOWA, TOWA, EOWA)内在联系基础上, 利用EOWA算子和语言偏离测度构建群体决策共识达成的目标规划模型. 刘俊娟等^[4]以梯形隶属函数为例构建了基于隶属函数的

模糊聚类模型, 拓延了模糊理论的研究空间, 但如何把实物特性有效地融合于已有模型和新建模型中尚需进一步研究. 陈晓红等^[5]结合直觉梯形模糊数, 提出了一种新的直觉梯形模糊TOPSIS方法, 有效解决了直觉模糊环境下的多属性群决策问题.

上述方法采用单个语言值描述决策问题与人们的习惯表达不够接近, 而且也没有为语言偏好提供合适的表达方式, 所以没有被广泛应用. 根据Rodríguez等^[6-8]提出的基于犹豫模糊语言术语集(HFLTS)的比较语言表达, 本文提出的复合语言表达方法不仅提供了一种比单一语言值更加丰富的表达, 而且由于这种表达是基于上下文无关的文法, 更具灵活性, 也更加符合实际. 应用上下文无关文法将比较

收稿日期: 2014-07-20; 修回日期: 2014-10-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61374022).

作者简介: 戴文战(1958—), 男, 教授, 博士生导师, 从事多目标决策、智能控制等研究; 李昀(1989—), 女, 硕士生, 从事模糊多目标决策的研究.

语言表达转换为HFLTS,并应用OWA算子^[9]计算出由梯形隶属函数表示的模糊语言术语集的模糊包络,这种包络计算方法有效地简化了基于HFLTS的词计算过程,最后应用逼近理想解排序(TOPSIS)方法进行了决策排序.

1 模糊多目标决策问题

1.1 问题描述

设有 m 个备选方案 x_1, x_2, \dots, x_m 和 n 个指标 c_1, c_2, \dots, c_n , 方案 x_i 在指标 c_j 下的评价值为 p_{ij} , 其多目标决策矩阵 $P = [p_{ij}]_{m \times n}$ 如下:

$$P = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

其中: 指标 c_j 的权重为 w_j , $\sum_{j=1}^n w_j = 1$. 多目标决策问题是在 $P = [p_{ij}]_{m \times n}$ 和权重 $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ 给定的条件下, 根据一定的准则, 对 m 个备选方案按相对优劣度进行排序.

当面临的决策问题具有高度的信息不确定性和复杂性时, 专家通常选择一个适当的语言术语集 $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ 来表示 p_{ij} . 对于一些复杂的决策问题, 使用比较语言表达比单一语言值表示更能准确地表达专家的看法. 本文在比较语言表达的基础上, 提出了一种基于梯形模糊隶属函数的比较语言多目标决策方法.

1.2 HFLTS 包络计算的理论知识

定义 1 当一个模糊数 $A = T(a, b, c, d)$ 的隶属函数

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & b \leq x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d, \\ 0, & x > d \end{cases}$$

时, 称其为梯形模糊数, 当 $b = c$ 时为特例, 也称三角隶属函数.

定义 2 设函数 OWA: $R^n \rightarrow R$, 若

$$\text{OWA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j,$$

则称函数 OWA 为有序加权平均算子, 也称为 OWA 算子^[9]. 其中: $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 为与函数 OWA 相

关联的加权向量, $w_j \in [0, 1]$, $j \in N$, $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, $N = 1, 2, \dots, n$, b_j 为一组数据 (a_1, a_2, \dots, a_n) 中第 j 大的元素, R 为实数集,

定义 3 假定 F 是具有 $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 有序加权向量的 OWA 算子, 则 F 的 orness 测度为^[9]

$$\text{orness}(W) = \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{n-i}{n-1} \right) = \lambda, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

记 $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ 为语言术语集, 令 $H_s = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_j\}$ 为一个 HFLTS, 即 H_s 为语言术语集 S 的有序有限子集, $s_k \in S$, $k \in \{i, \dots, j\}$. 令 $\text{env}(H_s)$ 表示 H_s 的包络, HFLTS 包络的计算是基于上下文无关文法 $G_H = (V_N, V_T, I, P)$ 的语言表达^[6], 其中 V_N 为非终止符号变量的非空有限集合, V_T 为终止符号的非空有限集, $V_T = \{\text{至多}, \text{至少}, \text{介于}, s_0, \dots, s_g\}$, $I \in V_N$, P 为扩展的巴科斯范式定义的一个产生规则^[10]. 这里“至少”和“至多”分别等价于“大于等于”和“小于等于”. 如果 s_{i+1} 较 s_i 对事物的描述具有正向递近性, 即如果 s_i 的值为 s_i^* , s_{i+1}^* 大于 s_i^* , $i = 0, 1, \dots, g-1$, 则 HFLTS 的转换规则如下:

$$\begin{aligned} f(s_i) &= \{s_i\}; \\ f(\text{至多 } s_i) &= \{s_j | s_j^* \leq s_i^*\}; \\ f(\text{至少 } s_i) &= \{s_j | s_j^* \geq s_i^*\}; \\ f(\text{介于 } s_i \text{ 和 } s_j) &= \{s_k | s_i^* \leq s_k^* \leq s_j^*\}. \end{aligned}$$

其中 $s_i, s_j, s_k \in S$.

2 一个新的 HFLTS 的包络

2.1 基于比较语言“至少 s_i ”的模糊包络

假定所有语言术语 $s_k \in S = \{s_0, \dots, s_g\}$ 都由梯形隶属函数 A^k 定义, $A^k = T(a_L^k, a_M^k, a_M^k, a_R^k)$, $k = 0, 1, \dots, g$, T 为 $H_s = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_j\}$ 中所有语言变量对应的隶属函数边界点构成的集合, 即

$$T = \{a_L^i, a_M^i, a_M^{i+1}, a_R^i, a_M^{i+1}, a_L^{i+2}, a_R^{i+1}, \dots, a_L^j, a_R^{j-1}, a_M^j, a_R^j\}. \quad (1)$$

对 T 的元素进行聚合, 根据模糊划分^[11], 本文假设 $a_R^{k-1} = a_M^k = a_L^{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, g-1$, 因此进行聚合的元素为

$$T = \{a_L^i, a_M^i, a_M^{i+1}, \dots, a_M^j, a_R^j\}. \quad (2)$$

根据 HFLTS 的转换规则, $f(\text{至少 } s_i) = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_g\}$, 相应的待聚合的集合为 $T = \{a_L^i, a_M^i, a_M^{i+1}, \dots, a_M^g, a_R^g\}$.

梯形隶属函数 $A = T(a, b, c, d)$ 表示基于 HFLTS 的比较语言表达式, 故 A 的定义域应与语言术语集 $\{s_i, \dots, s_j\} \in H_s$ 一致, 如图 1 所示(这里令 $s_i^* = i/g$). $s_i = \min H_s$, $s_j = \max H_s$, 选用 \min 算子和 \max 算子

计算 a 和 d , 有

$$a = \min\{a_L^i, a_M^i, a_M^{i+1}, \dots, a_M^j, a_R^j\} = a_L^i, \quad (3)$$

$$d = \max\{a_L^i, a_M^i, a_M^{i+1}, \dots, a_M^j, a_R^j\} = a_R^j. \quad (4)$$

而参数 b 和 c 由余下的元素进行聚合, 得到

$$b = \text{OWA}_{W^s}\{a_M^i, a_M^{i+1}, \dots, a_M^g\}, \quad (5)$$

$$c = \text{OWA}_{W^T}\{a_M^i, a_M^{i+1}, \dots, a_M^j\}. \quad (6)$$

这里的 W^s 和 W^T 分别是计算 b 和 c 时采用的 OWA 有序加权向量, 根据实际情况进行选择. 由式 (3) 和 (4) 易得梯形隶属函数 $A = T(a, b, c, d)$ 的参数 $a = a_L^i, d = a_R^g$.

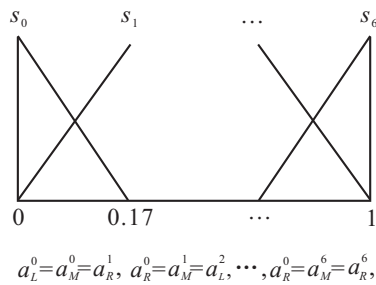


图 1 语言变量与隶属函数点的对应关系

由于组成 HFLTS 的语言术语具有模糊性, 本文采用文献 [12] 提出的两类指数 OWA 算子.

第 1 类 OWA 有序加权向量

$$W^1 = (w_1^1, w_2^1, \dots, w_n^1)^T,$$

其中

$$w_1^1 = \alpha, w_2^1 = \alpha(1 - \alpha),$$

$$w_3^1 = \alpha(1 - \alpha)^2, \dots,$$

$$w_{n-1}^1 = \alpha(1 - \alpha)^{n-2},$$

$$w_n^1 = (1 - \alpha)^{n-1}, \alpha \in [0, 1].$$

第 2 类 OWA 有序加权向量

$$W^2 = (w_1^2, w_2^2, \dots, w_n^2)^T,$$

其中

$$w_1^2 = \alpha^{n-1}, w_2^2 = \alpha^{n-2}(1 - \alpha),$$

$$w_3^2 = \alpha^{n-3}(1 - \alpha), \dots,$$

$$w_{n-1}^2 = \alpha(1 - \alpha), w_n^2 = (1 - \alpha), \alpha \in [0, 1].$$

根据定义 3, 有

$$\text{orness}(W^1) = \sum_{i=1}^n w_i^1 \left(\frac{n-i}{n-1} \right) = \frac{n}{n-1} - \frac{1 - (1 - \alpha)^n}{(n-1)\alpha},$$

$$\text{orness}(W^2) = \frac{\alpha - \alpha^n}{(n-1)(1 - \alpha)}.$$

图 2 为 W^1 和 W^2 的 orness 测度曲线, 可以看出 W^1 和 W^2 关于 n 的 orness 测度的单调性不同. 当应用于本文的比较语言表达时, 差异越大则不同的语言

表达区分越明显, 更利于计算.

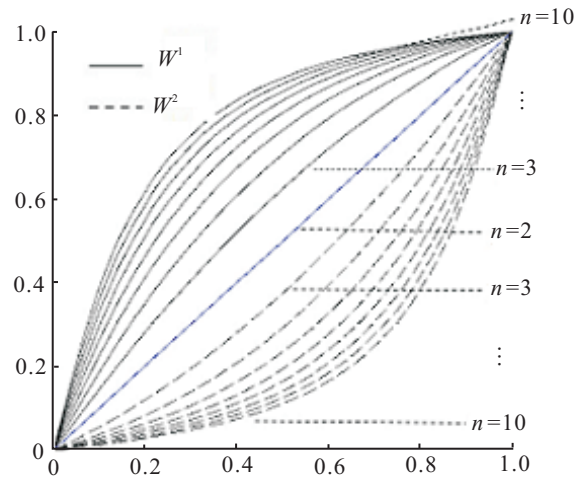


图 2 orness 函数图

为了将不确定性降到最低, 对于比较语言表达式“至少 s_i ”, 若 $s_0 < s_i < s_g$, 则 $0 < i < 1$. 对于给定的语言术语集 $S = \{s_0, \dots, s_g\}$, α 的值由 i 确定, 显然 $0 < \alpha < 1$. 如图 2 所示, 当 $\alpha > 0$ 时, 对于不同 n 值的 orness (W^2) 比 orness (W^1) 的差异大, 即如果选择 W^2 计算两个 HFLTS 的梯形模糊隶属函数 $A = T(a_1, b_1, c_1, d_1)$ 和 $B = T(a_2, b_2, c_2, d_2)$ 的点 b_1 和 b_2 , 则所得到的 $|b_1 - b_2|$ 的值要比选择 W^1 计算两个 HFLTS 的梯形模糊隶属函数 $A = T(a_1, b_1, c_1, d_1)$ 和 $B = T(a_2, b_2, c_2, d_2)$ 所得到的 $|b_1 - b_2|$ 的值大, 故取

$$b = \text{OWA}_{W^2}\{a_M^i, a_M^{i+1}, \dots, a_M^g\},$$

且

$$n = g - i + 1, W^2 = (w_1^2, w_2^2, \dots, w_{g-i+1}^2)^T.$$

其中

$$w_1^2 = \alpha^{g-i}, w_2^2 = \alpha^{g-i-1}(1 - \alpha),$$

$$w_3^2 = \alpha^{g-i-2}(1 - \alpha), \dots,$$

$$w_{g-i}^2 = \alpha(1 - \alpha), w_{g-i+1}^2 = (1 - \alpha).$$

同理, $c = \text{OWA}_{W^2}\{a_M^i, a_M^{i+1}, \dots, a_M^g\}$ 且 $\alpha = 1$, 因此 $c = a_M^g$.

基于比较语言表达式“至少 s_i ”得到的 HFLTS 的模糊包络是一个梯形模糊隶属函数 $T(a_L^i, b, a_M^g, a_R^g)$. 显然, 若 $s_i \rightarrow s_0$, 则 $\alpha \rightarrow 0, b \rightarrow a_M^0 = 0$; 若 $s_i \rightarrow s_g$, 则 $\alpha \rightarrow 1, b \rightarrow a_M^g = 1$; 若 $s_0 < s_i < s_g$, 则 $0 < \alpha < 1, a_M^0 < b < a_M^g$. α 从 0 增加到 1 相当于 s_i 从 s_0 增加到 s_g . 由此可知 α 的值取决于语言变量 s_i 的值.

有关 α 值的计算, 可定义函数 $f_1 : [0, g] \rightarrow [0, 1]$, 则 $\alpha = f_1(i)$, 其中 $i = \text{index}(s_i)$, 满足边界条件 $f_1(0) = 0, f_1(g) = 1$. 为计算简便, 且考虑到边界条件, 令 f_1 为一个特殊的线性函数, 即

$$f_1 = \frac{i}{g}, \alpha = \frac{i}{g}. \quad (7)$$

2.2 基于比较语言“至多 s_i ”的模糊包络

根据 HFLTS 的转换规则, 有 $f(\text{至多 } s_i) = \{s_0, s_1, \dots, s_i\}$.

比较语言表达式“至多 s_i ”得到的 HFLTS 的模糊包络是一个梯形模糊隶属函数 $T(a_L^0, a_M^0, c, a_R^i)$, 如图 3 所示.

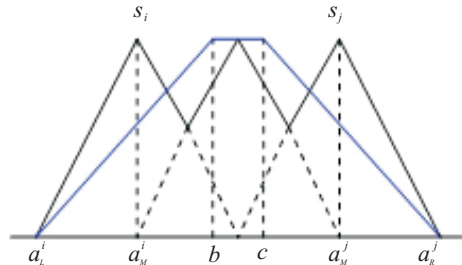


图 3 “介于 s_i 和 s_j ”包络的梯形隶属函数图

由于 $s_0 < s_i < s_g$, 显然 $0 < \alpha < 1$, 由图 2 可知, 当 $\alpha < 1$ 时, 不同 n 值对应的 orness (W^1) 比 orness (W^2) 的差异大, 即若选择 W^1 计算两个 HFLTS 的梯形模糊隶属函数 $A = T(a_1, b_1, c_1, d_1)$ 和 $B = T(a_2, b_2, c_2, d_2)$ 的点 c_1 和 c_2 , 则所得到的 $|c_1 - c_2|$ 的值要比选择 W^2 计算两个 HFLTS 的梯形模糊隶属函数 $A = T(a_1, b_1, c_1, d_1)$ 和 $B = T(a_2, b_2, c_2, d_2)$ 所得到的 $|c_1 - c_2|$ 的值大, 故取

$$c = \text{OWA}_{W^1}\{a_M^0, a_M^1, \dots, a_M^i\},$$

$$W^1 = (w_1^1, w_2^1, \dots, w_n^1)^T,$$

$$w_1^1 = \alpha, w_2^1 = \alpha(1 - \alpha), \dots,$$

$$w_i^1 = \alpha(1 - \alpha)^{i-1}, w_{i+1}^1 = (1 - \alpha)^i.$$

2.3 基于比较语言“介于 s_i 和 s_j ”的模糊包络

$f(\text{介于 } s_i \text{ 和 } s_j) = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_j\}$, 当 $i < j = g$ 时, 表达式与“至少 s_i ”相同; 当 $0 = i < j$ 时, 与“至多 s_i ”相同. 为了避免这两种情况, 给出限制条件 $0 < i < j < g$.

待聚合的集合为 $T = \{a_L^i, a_M^i, a_M^{i+1}, \dots, a_M^j, a_R^j\}$, 相应的模糊包络 $A = T(a_L^i, b, c, a_R^j)$ 如图 3 所示. 与“至少 s_i ”和“至多 s_i ”参数计算不同, 这里 b 和 c 的计算不仅与 OWA 算子有关, 而且受语言变量个数的影响, 因为当 $i + j$ 为奇数时分别用于计算 b 和 c 的聚合元素不相等, 故分以下两种情况讨论:

1) $i + j$ 为奇数, 有:

① 当 $i + 1 = j$ 时, 有 $b = a_M^i, c = a_M^{i+1}$.

② 当 $i + 1 < j$ 时, 有

$$b = \text{OWA}_{W^2}(a_M^i, a_M^{i+1}, \dots, a_M^{(i+j-1)/2}), \quad (8)$$

$$c = \text{OWA}_{W^1}(a_M^j, a_M^{j-1}, \dots, a_M^{(i+j+1)/2}). \quad (9)$$

其中

$$W^2 = (w_1^2, w_2^2, \dots, w_{(j-i+1)/2}^2)^T,$$

$$w_1^2 = \alpha_1^{(j-i-1)/2}, w_2^2 = \alpha_1^{(j-i-3)/2}(1 - \alpha_1), \dots,$$

$$w_{(j-i-1)/2}^2 = \alpha_1(1 - \alpha_1), w_{(j-i+1)/2}^2 = 1 - \alpha_1;$$

$$W^1 = (w_1^1, w_2^1, \dots, w_{(j-i+1)/2}^1)^T,$$

$$w_2^1 = \alpha_2(1 - \alpha_2), \dots,$$

$$w_{(j-i-1)/2}^1 = \alpha_2(1 - \alpha_2)^{(j-i-3)/2},$$

$$w_{(j-i+1)/2}^1 = (1 - \alpha_2)^{(j-i-1)/2}.$$

且有:

③ 当 $\alpha_1 \rightarrow 0$ 时, $b \rightarrow a_M^i$; 当 $\alpha_1 \rightarrow 1$ 时, $b \rightarrow a_M^{(i+j-1)/2}$; 当 $0 < \alpha_1 < 1$ 时, $a_M^i < b < a_M^{(i+j-1)/2}$.

④ 当 $\alpha_2 \rightarrow 0$ 时, $b \rightarrow a_M^{(i+j+1)/2}$; 当 $\alpha_2 \rightarrow 1$ 时, $b \rightarrow a_M^j$; 当 $0 < \alpha_2 < 1$ 时, $a_M^{(i+j+1)/2} < b < a_M^j$.

⑤ $b + c = a_M^{(i+j-1)/2} + a_M^{(i+j+1)/2}$.

2) $i + j$ 为偶数, 有

$$b = \text{OWA}_{W^2}(a_M^i, a_M^{i+1}, \dots, a_M^{(i+j)/2}), \quad (10)$$

$$c = \text{OWA}_{W^1}(a_M^j, a_M^{j-1}, \dots, a_M^{(i+j)/2}). \quad (11)$$

其中

$$W^2 = (w_1^2, w_2^2, \dots, w_{(j-i+2)/2}^2)^T,$$

$$w_1^2 = \alpha_1^{(j-i)/2}, w_2^2 = \alpha_1^{(j-i-2)/2}(1 - \alpha_1), \dots,$$

$$w_{(j-i)/2}^2 = \alpha_1(1 - \alpha_1), w_{(j-i+2)/2}^2 = 1 - \alpha_1;$$

$$W^1 = (w_1^1, w_2^1, \dots, w_{(j-i+2)/2}^1)^T,$$

$$w_2^1 = \alpha_2(1 - \alpha_2), \dots,$$

$$w_{(j-i)/2}^1 = \alpha_2(1 - \alpha_2)^{(j-i-2)/2},$$

$$w_{(j-i+2)/2}^1 = (1 - \alpha_2)^{(j-i)/2}.$$

且有:

① 当 $\alpha_1 \rightarrow 0$ 时, $b \rightarrow a_M^i$; 当 $\alpha_1 \rightarrow 1$ 时, $b \rightarrow a_M^{(i+j)/2}$; 当 $0 < \alpha_1 < 1$ 时, $a_M^i < b < a_M^{(i+j)/2}$.

② 当 $\alpha_2 \rightarrow 0$ 时, $b \rightarrow a_M^{(i+j)/2}$; 当 $\alpha_2 \rightarrow 1$ 时, $b \rightarrow a_M^j$; 当 $0 < \alpha_2 < 1$ 时, $a_M^{(i+j)/2} < b < a_M^j$.

③ $b + c = 2a_M^{(i+j)/2}$.

当 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ 时, 如果 $0 < i < j < g$, 则 $1 \leq j - i < g$.

考虑以下两种特例:

1) $s_j = s_{i+1}$ 时, $j - i = 1$, 只有一个聚合元素 a_M^i , 且 $W^2 = (w_1^2)^T = (\alpha_1)^T, b = \alpha_1 \times a_M^i = a_M^i$, 故 $\alpha_1 = 1$.

2) $s_i \rightarrow s_0, s_j \rightarrow s_g$ 时, $j - i = g\alpha_1 \rightarrow 0$.

为了计算 α_1 的值, 定义函数 $f_2: [1, g] \rightarrow (0, 1]$, 则 $\alpha_1 = f_2(j - i)$, 满足边界条件 $f_1(1) = 1, f_2(g) = 0$. 为了计算简便, 且考虑到边界条件, 本文令

$$f_2(j - i) = \frac{g - (j - i)}{g - 1},$$

有

$$\alpha_1 = \frac{g - (j - i)}{g - 1},$$

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1 = \frac{(j - i) - 1}{g - 1}.$$

3 运用 TOPSIS 法排序

已知多目标决策问题有 m 个备选方案和 n 个指标, 运用 TOPSIS 法^[13]对基于梯形隶属函数的比较语言多目标决策问题的方案进行排序, 一般步骤如下:

1) 根据指标的权重 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T$, 计算加权模糊矩阵 $\tilde{V} = (\tilde{v}_{ij})_{m \times n} = (\tilde{p}_{ij} \cdot w_j)_{m \times n}$.

2) 根据模糊正理想解和负理想解得到各方案的距离.

正理想解

$$\tilde{A}^+ = (T^+(a_1, b_1, c_1, d_1), \dots, T^+(a_n, b_n, c_n, d_n));$$

负理想解

$$\tilde{A}^- = (T^-(a_1, b_1, c_1, d_1), \dots, T^-(a_n, b_n, c_n, d_n)).$$

分别计算各方案与正、负理想解的距离

$$D_i^+ = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n d(\tilde{v}_{ij}, T^+(a_j, b_j, c_j, d_j)),$$

$$D_i^- = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n d(\tilde{v}_{ij}, T^-(a_j, b_j, c_j, d_j)).$$

计算 Minkowski 计算距离^[14]. 设 $A = T(a_1, b_1, c_1, d_1)$, $B = T(a_2, b_2, c_2, d_2)$ 为两个梯形隶属函数, 有

$$d(A, B) =$$

$$\frac{1}{4} (|a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| + |c_1 - c_2| + |d_1 - d_2|).$$

3) 计算每个方案的贴适度

$$C_i = \frac{D_i^-}{D_i^- + D_i^+}.$$

4) 根据每个方案的贴适度进行排序, 选择最优方案.

4 实例分析

某风险投资商对 4 个拟投资项目 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 从市场风险 c_1 、技术风险 c_2 、生产风险 c_3 、管理风险 c_4 四个方面进行综合评估. 已知这 4 个指标的权重向量 $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}^T = (0.3, 0.25, 0.15, 0.3)^T$. 由于项目的复杂性和信息模糊性, 专家组使用比较语言对各侯选项目的原始评价如表 1 所示.

表 1 采用比较语言的评价结果

项目	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	介于一般和好	一般	至少为较好	至少为好
x_2	至少为较好	至少为好	介于一般和较好	介于较差和一般
x_3	至少为好	介于较差和一般	介于较好和好	至少为较好
x_4	介于一般和较好	至少为好	介于较好和好	至多为较差

根据本文提出的基于梯形模糊隶属函数的比较语言多目标决策方法, 决策过程如下:

Step 1 选择语言术语集

$$S = \{s_0, \dots, s_6\} =$$

{很差, 差, 较差, 一般, 较好, 好, 很好}.

根据各个语言变量递进的逻辑关系, 令 $s_i^* = i/g$, $s_0^* = 0, s_1^* = 0.17, s_2^* = 0.33, s_3^* = 0.5, s_4^* = 0.67, s_5^* = 0.83, s_6^* = 1$.

Step 2 将比较语言表达式转换为 HFLTS 和相应的判断矩阵

$$P =$$

$$\begin{bmatrix} \{s_3, s_4, s_5\} & \{s_3\} & \{s_4, s_5, s_6\} & \{s_5, s_6\} \\ \{s_4, s_5, s_6\} & \{s_5, s_6\} & \{s_3, s_4\} & \{s_2, s_3\} \\ \{s_5, s_6\} & \{s_2, s_3\} & \{s_4, s_5\} & \{s_4, s_5, s_6\} \\ \{s_3, s_4\} & \{s_5, s_6\} & \{s_4, s_5\} & \{s_0, s_1, s_2\} \end{bmatrix}.$$

Step 3 计算 HFLTS 的模糊包络.

以 P 矩阵中的 p_{11} 、 p_{21} 、 p_{44} 和 p_{12} 的计算为例说明计算过程, 因为它们分别代表了比较语言表达形式的 4 种典型情况, 即“介于...”、“至少...”、“至多

...”和单一语言描述. 由于 $p_{11} = \{s_3, s_4, s_5\}$ 采用的是比较语言“介于 s_3 和 s_5 ”, 有

$$T = \{a_L^3, a_M^3, a_M^4, a_M^5, a_R^5\},$$

$$A = T(a_1, b_1, c_1, d_1).$$

其中

$$a_1 = \min\{a_L^3, a_M^3, a_M^4, a_M^5, a_R^5\} = a_L^3 = 0.33,$$

$$d_1 = \max\{a_L^3, a_M^3, a_M^4, a_M^5, a_R^5\} = a_R^5 = 1.$$

由于 $i + j = 8$ 是偶数, 应用式(10), 有

$$\alpha_1 = \frac{g - (j - i)}{g - 1} = \frac{4}{5},$$

$$W^2 = (\alpha_1^{(j-i)/2}, \alpha_1^{(j-i-2)/2} (1 - \alpha_1))^T = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)^T,$$

故

$$b_1 = \text{OWA}_{W^2}(a_M^3, a_M^4) =$$

$$\frac{4}{5} \times a_M^4 + \frac{1}{5} \times a_M^3 = \frac{4}{5} \times 0.67 + \frac{1}{5} \times 0.5 \approx 0.64,$$

$$c_1 = 2a_M^{(i+j)/2} - b_1 = 0.70,$$

即 $\tilde{p}_{11} = T(0.33, 0.64, 0.7, 1)$. 同理, 采用的比较语言是“至少 s_4 ”, 有

$$T = \{a_L^4, a_M^4, a_M^5, a_M^6, a_R^6\},$$

$$A = T(a_2, b_2, c_2, d_2).$$

其中

$$a_2 = \min\{a_L^4, a_M^4, a_M^5, a_M^6, a_R^6\} = a_L^4 = 0.5,$$

$$d_2 = \max\{a_L^4, a_M^4, a_M^5, a_M^6, a_R^6\} = a_R^6 = 1,$$

$$c_2 = a_M^g = a_M^6 = 1, \alpha = \frac{i}{g} = \frac{4}{6},$$

$$W^2 = (\alpha^{g-i}, \alpha^{g-i-1}(1-\alpha), \alpha^{g-i-2}(1-\alpha))^T = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right)^T.$$

由式(3)可得

$$b_2 = \text{OWA}_{W^2}\{a_M^i, a_M^{i+1}, \dots, a_M^g\} = \frac{4}{9} \cdot a_M^6 + \frac{2}{9} \cdot a_M^5 + \frac{1}{3} \cdot a_M^4 \approx 0.85,$$

即

$$\tilde{p}_{21} = T(0.5, 0.85, 1, 1).$$

$p_{44} = \{s_0, s_1, s_2\}$ 采用的比较语言是“至多 s_2 ”,

有

$$T(a_L^0, a_M^0, c_3, a_R^2) = T(0, 0, c_3, 0.5), \alpha = \frac{i}{g} = \frac{1}{3},$$

$$W^1 = (\alpha, \alpha(1-\alpha), (1-\alpha)^i)^T = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right)^T,$$

$$c_3 = \text{OWA}_{W^1}\{a_M^0, a_M^1, \dots, a_M^i\} = \frac{1}{3}a_M^2 + \frac{2}{9}a_M^1 + \frac{4}{9}a_M^0 \approx 0.15,$$

即

$$\tilde{p}_{44} = T(0, 0, 0.15, 0.5).$$

$p_{12} = \{s_3\}$ 使用的是单一语言描述, 则模糊包络即为该语言变量本身的梯形模糊隶属函数, 故 $\tilde{p}_{12} = T(0.33, 0.5, 0.5, 0.67)$.

最后得到 HFLTS 的模糊包络

$$\text{env}(H_{s_{ij}}) = \tilde{p}_{ij}, i, j \in \{1, 2, 3, 4\},$$

$$\tilde{P}_{11} = T(0.33, 0.64, 0.7, 1),$$

$$\tilde{P}_{12} = T(0.33, 0.5, 0.5, 0.67),$$

$$\tilde{P}_{13} = T(0.5, 0.85, 1, 1),$$

$$\tilde{P}_{14} = T(0.67, 0.97, 1, 1),$$

$$\tilde{P}_{21} = T(0.5, 0.85, 1, 1),$$

$$\tilde{P}_{22} = T(0.67, 0.97, 1, 1),$$

$$\tilde{P}_{23} = T(0.33, 0.5, 0.67, 0.83),$$

$$\tilde{P}_{24} = T(0.17, 0.33, 0.5, 0.67),$$

$$\tilde{P}_{31} = T(0.67, 0.97, 1, 1),$$

$$\tilde{P}_{32} = T(0.17, 0.33, 0.5, 0.67),$$

$$\tilde{P}_{33} = T(0.5, 0.67, 0.83, 1),$$

$$\tilde{P}_{34} = T(0.5, 0.85, 1, 1),$$

$$\tilde{P}_{41} = T(0.33, 0.5, 0.67, 0.83),$$

$$\tilde{P}_{42} = T(0.67, 0.97, 1, 1),$$

$$\tilde{P}_{43} = T(0.5, 0.67, 0.83, 1),$$

$$\tilde{P}_{44} = T(0, 0, 0.15, 0.5).$$

Step 4 运用 TOPSIS 法对模糊矩阵进行排序.

Step 4.1: 计算加权模糊矩阵 $\tilde{V} = (\tilde{v}_{ij})_{4 \times 4}$, 根据 4 个指标的权重

$$W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}^T = (0.3, 0.25, 0.15, 0.3)^T,$$

得

$$\tilde{v}_{11} = T(0.1, 0.19, 0.21, 0.3),$$

$$\tilde{v}_{12} = T(0.08, 0.13, 0.13, 0.17),$$

$$\tilde{v}_{13} = T(0.08, 0.13, 0.15, 0.15),$$

$$\tilde{v}_{14} = T(0.2, 0.29, 0.3, 0.3),$$

$$\tilde{v}_{21} = T(0.15, 0.26, 0.3, 0.3),$$

$$\tilde{v}_{22} = T(0.17, 0.24, 0.25, 0.25),$$

$$\tilde{v}_{23} = T(0.05, 0.08, 0.10, 0.12),$$

$$\tilde{v}_{24} = T(0.05, 0.10, 0.15, 0.2),$$

$$\tilde{v}_{31} = T(0.2, 0.29, 0.3, 0.3),$$

$$\tilde{v}_{32} = T(0.04, 0.08, 0.13, 0.17),$$

$$\tilde{v}_{33} = T(0.08, 0.1, 0.12, 0.15),$$

$$\tilde{v}_{34} = T(0.15, 0.26, 0.3, 0.3),$$

$$\tilde{v}_{41} = T(0.1, 0.15, 0.2, 0.25),$$

$$\tilde{v}_{42} = T(0.17, 0.24, 0.25, 0.25),$$

$$\tilde{v}_{43} = T(0.08, 0.1, 0.12, 0.15),$$

$$\tilde{v}_{44} = T(0, 0, 0.05, 0.05).$$

Step 4.2: 根据模糊正理想解和负理想解得到各方案的距离.

正理想解

$$\tilde{A}^+ =$$

$$(T(1, 1, 1, 1), T(1, 1, 1, 1), T(1, 1, 1, 1), T(1, 1, 1, 1));$$

负理想解

$$\tilde{A}^- =$$

$$(T(0, 0, 0, 0), T(0, 0, 0, 0), T(0, 0, 0, 0), T(0, 0, 0, 0)).$$

各方案与正负理想解的距离

$$D_1^+ =$$

$$\frac{1}{4}(|0.1 - 1| + |0.19 - 1| + |0.21 - 1| +$$

$$|0.3 - 1|) + \dots + \frac{1}{4}(|0.2 - 1| + |0.29 - 1| +$$

$$|0.3 - 1| + |0.3 - 1|) = 3.27,$$

$$D_1^- = 0.73, D_2^+ = 3.31, D_2^- = 0.69, D_3^+ = 3.26,$$

$$D_3^- = 0.74, D_4^+ = 3.44, D_4^- = 0.57.$$

Step 4.3: 每个方案的贴近度计算.

$$C_1 = \frac{D_1^-}{D_1^- + D_1^+} = 0.18, C_2 = 0.17,$$

$$C_3 = 0.19, C_4 = 0.14.$$

Step 5 选择最优方案.

根据每个方案的贴近度进行排序, 有 $C_3 > C_1 > C_2 > C_4$, 故项目 x_3 最优.

5 结 论

本文提出的基于梯形模糊隶属函数的比较语言多目标决策模型与传统的基于单一语言变量的多目标决策相比具有更大的灵活性, 在犹豫模糊的情形下更能准确地反映决策者的意见. 在比较语言表达的基础上, 使用复合语言表达方式, 提出了一个新的由梯形隶属函数表示的 HFLTS 模糊包络, 这种模糊表示简化了模糊多目标决策的词计算过程, 最后应用 TOPSIS 模型解决了实际问题.

参考文献(References)

- [1] Ma J, Ruan D, Xu Y, et al. A fuzzy-set approach to treat determinacy and consistency of linguistic terms in multi-criteria decision making[J]. *Int J of Approximate Reasoning*, 2006, 44(2): 165-181.
- [2] Tang Y C, Zheng J C. Linguistic modelling based on semantic similarity relation among linguistic labels[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2006, 157(12): 1662-1673.
- [3] Dong Y, Xu Y, Li H, et al. The OWA-based consensus operator under linguistic representation models using position indexes[J]. *European J of Operational Research*, 2010, 203(2): 455-463.
- [4] 刘俊娟, 王炜, 程琳. 基于梯形隶属函数的区间数模糊评价方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2009, 31(2): 390-392. (Liu J J, Wang W, Cheng L. Interval number fuzzy evaluation based on trapezoid subordinate function[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2009, 31(2): 390-392.)
- [5] 陈晓红, 李喜华. 基于直觉梯形模糊 TOPSIS 的多属性群决策方法[J]. *控制与决策*, 2013, 28(9): 1377-1388. (Chen X H, Li X H. Group decision making based on novel trapezoidal intuitionistic fuzzy TOPSIS method[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(9): 1377-1388.)
- [6] Rodríguez R M, Martínez L, Herrera F. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2012, 20(1): 109-119.
- [7] Rodríguez R M, Martínez L. An analysis of symbolic linguistic computing models in decision making[J]. *Int J of General Systems*, 2013, 42(1): 121-136.
- [8] Rodríguez R M, Martínez L, Herrera F. A group decision making model dealing with comparative linguistic expressions based on hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. *Information Sciences*, 2013, 241(1): 28-42.
- [9] 柳毅, 高晓光, 卢广山, 等. 基于 OWA 算子的加权属性信息融合[J]. *仪器仪表学报*, 2006, 27(3): 322-325. (Liu Y, Gao X G, Lu G S, et al. Weighted attribute information fusion based on owa aggregation operator[J]. *Chinese J of Scientific Instrument*, 2006, 27(3): 322-325.)
- [10] Bordogna G, Pasi G. A fuzzy linguistic approach generalizing boolean information retrieval: A model and its evaluation[J]. *J of the American Society for Information Science*, 1993, 44: 70-82.
- [11] 于剑, 程乾生. 模糊划分的一个新定义及其应用[J]. *北京大学学报: 自然科学版*, 2000, 36(5): 619-623. (Yu J, Cheng Q S. A new definition of fuzzy partition and its application[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 2000, 36(5): 619-623.)
- [12] Filev D, Yager R. On the issue of obtaining OWA operator weights[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, 94: 157-169.
- [13] 申晓勇, 雷英杰, 蔡茹, 等. 基于加权 Minkowski 距离的 IFS 相异度度量方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2009, 31(6): 1358-1361. (Shen X Y, Lei Y J, Cai R, et al. Method for dissimilarity measure among intuitionistic fuzzy sets based on weighted Minkowski distance[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2009, 31(6): 1358-1361.)
- [14] Wang Y J, Lee H S. Generalizing TOPSIS for fuzzy multiple-criteria group decision-making[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2007, 53(11): 1762-1772.

(责任编辑: 孙艺红)