

## 一类饱和非线性系统抗饱和控制器设计

王乃洲<sup>a,b</sup>, 裴海龙<sup>a</sup>, 汤勇<sup>b</sup>

(华南理工大学 a. 自主系统与网络控制教育部重点实验室, b. 机械与汽车工程学院, 广州 510640)

**摘要:** 针对一类饱和非线性系统研究抗饱和控制器综合问题. 基于线性分式表示技术(LFR), 该类非线性系统可转化为带有满足扇形区间不等式条件的非线性函数及额外线性分式约束的饱和线性系统. 基于二次Lyapunov方程并利用广义扇形区间不等式条件处理饱和和非线性项, 提出了基于LMI条件的非线性抗饱和控制器综合方法. 数值仿真验证了所提出方法的有效性.

**关键词:** 抗饱和控制; 非线性系统; 吸引域; 线性矩阵不等式

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Anti-windup controller design for a class of nonlinear systems subject to actuator saturation

WANG Nai-zhou<sup>a,b</sup>, PEI Hai-long<sup>a</sup>, TANG Yong<sup>b</sup>

(a. Key Laboratory of Autonomous Systems and Networked Control, Ministry of Education, b. School of Mechanical and Automotive Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China. Correspondent: PEI Hai-long, E-mail: auhlpei@scut.edu.cn)

**Abstract:** The anti-windup controller synthesis problems are studied for a certain class of nonlinear systems subject to actuator saturation. Based on the linear-fractional representation(LFR) techniques, the original system is transformed into a linear system incorporating a sector-bounded nonlinearity and a saturation nonlinearity with an additional linear-fractional constraint. Based on a quadratic Lyapunov function and with a modified sector condition describing the saturation nonlinearity, LMI-based conditions for the synthesis of a nonlinear anti-windup controller are presented. A numerical example illustrates the effectiveness of the proposed approaches.

**Keywords:** anti-windup control; nonlinear systems; region of attraction; linear matrix inequality

### 0 引言

在工程实践中, 执行器由于无法传输无限大控制信号而经常饱和. 当执行器饱和时闭环系统的性能会显著下降甚至整个闭环系统出现不稳, 此时需设计抗饱和补偿器以尽可能地恢复闭环系统的性能. 在过去的几十年里, 抗饱和补偿器的设计研究获得了极大的发展, 涌现出大量有效的研究手段和设计方法<sup>[1-9]</sup>. 然而这些现有的成果主要针对的是线性系统, 针对非线性系统抗饱和补偿器的设计研究成果相对较少. 一方面, 线性系统抗饱和补偿器设计相对容易, 并且有成熟的线性控制理论可以利用; 另一方面, 大部分实际系统都可以在所关心的平衡点附近线性化. 但是, 基于线性化模型设计的抗饱和补偿器通常只能在较小的范围内起作用, 并且在饱和约束作用下闭环系统通

常很难达到所设计的性能指标. 更重要的是, 当对闭环系统进行稳定性分析时, 所估计的闭环系统吸引域将会更加保守甚至可能导致错误的结果<sup>[10]</sup>.

尽管如此, 利用线性抗饱和研究成果处理非线性系统的抗饱和控制问题依然是一个重要的研究方向. 在此意义下, 针对具有某种线性特征的非线性系统(例如状态依赖系统、二次系统、多项式系统、有理系统、LPV系统等)的抗饱和技术研究已经取得了较大的进展<sup>[10-17]</sup>. 文献[11]研究了Lur'e型非线性系统的静态抗饱和控制问题. 文献[13]研究了LPV系统抗饱和补偿器设计问题. 在文献[10,17]中, Gomes等对有理系统静态抗饱和问题进行了深入的研究, 其成果主要致力于闭环系统吸引域的非保守估计. 基于有理系统的微分代数方程表示(DAR)技术, 闭环系统吸引

收稿日期: 2014-07-24; 修回日期: 2014-10-24.

基金项目: 国家973计划项目(2014CB845301/2/3); 国家自然科学基金项目(61174053).

作者简介: 王乃洲(1985-), 男, 博士生, 从事非线性系统抗饱和的研究; 裴海龙(1965-), 男, 教授, 博士生导师, 从事机器人无人机控制、非线性系统控制等研究.

域的最优估计被转化为LMI条件在给定有界凸集顶点上的优化问题. 文献[14]针对一类特殊的仿射系统提出了基于非线性动态逆(NDI)控制器的动态抗饱和和补偿器设计方法. 文献[15]研究了二次系统动态抗饱和控制问题. 基于所提出的一种特殊的变换表示技术, 二次系统被转化为状态依赖型LPV系统, 并在此基础上提出了非线性IMC抗饱和和控制策略. 值得一提的是, 针对有理系统DAR静态抗饱和和控制技术的不足, 文献[16]提出了基于LFR的抗饱和和补偿器设计方法, 由于在设计抗饱和和补偿器过程中无需添加额外约束, 在估计闭环系统吸引域时具有更好的保守性.

本文对有理系统LFR静态抗饱和和控制技术进行了推广<sup>[16]</sup>, 使其适用于更一般的非线性系统. 采用更一般形式的广义扇形区间不等式处理饱和函数项<sup>[11]</sup>, 获得了保守性较低的抗饱和和补偿器设计方法. 当预先设计好的控制器是线性的时, 提出了增广型静态抗饱和和控制策略以进一步扩大闭环系统稳定区域, 并通过数值仿真指出增广型抗饱和和补偿器设计原则, 即: 对非线性项描述越保守越需要对其进行测量, 并将其用于抗饱和和控制器设计以提高闭环系统的性能. 与DAR方法相比, 本文所得LMI条件均是状态独立的, 从而极大地降低了计算负担, 并且在推导过程中没有增加任何额外约束, 因而本文所提出抗饱和和控制器设计方法能够获得相对较大的吸引域.

## 1 预备知识

**引理 1**<sup>[18]</sup> 考虑具有饱和度  $v_0 > 0$  的死区函数  $\psi(v_c) := v_c - \text{sat}(v_c) \in \mathbf{R}^m$ , 并定义如下多面体集:

$$\mathcal{S}(v_c, w) = \{v_c \in \mathbf{R}^m, w \in \mathbf{R}^m \mid -v_0 \leq v_c - w \leq v_0\}, \quad (1)$$

若  $(v_c, w)$  是多面体集  $\mathcal{S}(v_c, w)$  中的任意一点, 则对于任意正定对角矩阵  $T \in \mathbf{R}^{m \times m}$ , 死区函数  $\psi(v_c)$  满足如下不等式条件:

$$\psi(v_c)^T T (\psi(v_c) - w) \leq 0. \quad (2)$$

不等式条件(1)和(2)通常称为广义扇形区间不等式. 当取  $w = v_c$  时, 多面体集  $\mathcal{S}(v_c, w) = \mathbf{R}^m$  即为整个  $m$  维空间, 此时不等式(2)即为传统的扇形区间不等式<sup>[19]</sup>. 与传统扇形区间不等式相比, 基于广义扇形区间不等式所获得的LMI稳定性条件适用于开环不稳定系统. 本文将利用广义扇形区间不等式处理非线性系统中的饱和函数项.

## 2 问题描述

考虑如下非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x)x + \alpha(x)\varphi(z) + g(x)\text{sat}(v_c(t)), \\ y = h(x)x + \beta(x)\varphi(z) + k(x)\text{sat}(v_c(t)), \\ z = C_z x. \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $x \in \mathcal{B}_p \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $v_c(t) \in \mathbf{R}^m$ ,  $y \in \mathbf{R}^q$ ,  $z \in \mathbf{R}^l$  分别为系统的状态、控制输入、系统输出和非线性向量函数  $\varphi(z) : \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^l$  的输入;  $\text{sat}(v_c)_i = \text{sat}(v_{ci}) := \text{sign}(v_{ci}) \min(v_{0i}, |v_{ci}|)$  为饱和函数, 其饱和度表示为  $v_0 > 0$ . 假设非线性向量函数  $\varphi(z)$  是Lipschitz的, 并满足如下 sector-bounded 条件:

$$\varphi(z)^T T_2 (\varphi(z) - \Omega z) \leq 0, \quad \forall z \in \mathcal{S}_2 \subseteq \mathbf{R}^l. \quad (4)$$

其中: 矩阵  $\Omega$  是已知的正定矩阵; 矩阵  $T_2 \in \mathbf{R}^{l \times l}$  为任意的正定对角矩阵. 假设向量函数  $f(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\alpha(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times l}$ ,  $g(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m}$ ,  $h(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{q \times n}$ ,  $\beta(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{q \times l}$ ,  $k(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{q \times m}$  均为关于  $x$  的有理函数, 且在原点非奇异并使得对于所有的  $x \in \mathcal{B}_p$  系统状态方程存在唯一解.

考虑如下非线性静态抗饱和和控制器:

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = f_c(x_c(t), y(t), \varphi_c(z_c)) + E_a \psi(v_c(t)), \\ v_c(t) = h_c(x_c(t), y(t), \varphi_c(z_c)), \\ z_c(t) = \tilde{C}_{cz} \xi(t). \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $\xi = [x^T \ x_c^T]^T$ ,  $x_c \in \mathcal{B}_c \subseteq \mathbf{R}^{n_c}$  为控制器的状态;  $\psi(v_c)$  为引理1中定义的死区函数;  $E_a \psi(v_c)$  对应于静态抗饱和项. 当执行器发生饱和时,  $E_a \psi(v_c) \neq 0$ , 抗饱和项开始运作以尽可能地恢复闭环系统的性能. 与函数  $\varphi(z)$  一样, 非线性向量函数  $\varphi_c(z_c) : \mathbf{R}^{l_c} \rightarrow \mathbf{R}^{l_c}$  (简记为  $\varphi_c$ ) 同样也是Lipschitz的, 并且满足如下 sector-bounded 条件:

$$\varphi_c^T T_3 (\varphi_c - \Omega_c z_c) \leq 0, \quad \forall z_c \in \mathcal{S}_3 \subseteq \mathbf{R}^{l_c}. \quad (6)$$

其中:  $\Omega_c$  为可预先确定的正定矩阵;  $T_3 \in \mathbf{R}^{l_c \times l_c}$  为任意的正定对角矩阵. 非线性向量函数  $f_c(\cdot) : \mathbf{R}^{n_c} \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{l_c} \rightarrow \mathbf{R}^{n_c}$ ,  $h_c(\cdot) : \mathbf{R}^{n_c} \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{l_c} \rightarrow \mathbf{R}^m$  应能够确保对于所有的  $(x, x_c) \in \mathcal{B}_p \times \mathcal{B}_c$ , 闭环系统(3)和(5)存在唯一解. 考虑到非线性向量函数  $f(x)$ ,  $\alpha(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $k(x)$  均为有理函数, 根据有理函数矩阵的LFR技术<sup>[16,20]</sup>(即任何在原点非奇异的有理函数矩阵都具有下线性分式表示形式), 可将系统(3)转化为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_\pi \pi + B_\varphi \varphi(z) + B_u \text{sat}(v_c), \\ \eta = C_\eta x + D_\eta \pi + D_{\eta\varphi} \varphi(z) + D_{\eta u} \text{sat}(v_c), \\ y = C_y x + D_y \pi + D_{y\varphi} \varphi(z) + D_{y u} \text{sat}(v_c), \\ z = C_z z. \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$\begin{bmatrix} f(x) & \alpha(x) & g(x) \\ h(x) & \beta(x) & k(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_\varphi & B_u \\ C_y & D_{y\varphi} & D_{y u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u \\ D_{y\pi} \end{bmatrix} \Delta_1(x) [I_N - D_{\eta u} \Delta_1(x)]^{-1} [C_\eta \ D_{\eta\varphi} \ D_{\eta u}];$$

$\pi = \Delta_1(x)\eta$ ,  $\Delta_1(x) = \text{diag}(x_1 I_{r_1}, \dots, x_n I_{r_n})$ ;  $N = r_1 + \dots + r_n$ ; 系统矩阵  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B_\pi \in \mathbf{R}^{n \times N}$ ,  $B_\varphi \in \mathbf{R}^{n \times l}$ ,  $B_u \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ,  $C_\eta \in \mathbf{R}^{N \times n}$ ,  $D_{\eta\pi} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ ,  $D_{\eta\varphi} \in \mathbf{R}^{N \times l}$ ,  $D_{\eta u} \in \mathbf{R}^{N \times m}$ ,  $C_y \in \mathbf{R}^{q \times n}$ ,  $D_{y\pi} \in \mathbf{R}^{q \times N}$ ,  $D_{y\varphi} \in \mathbf{R}^{q \times l}$ ,  $D_{yu} \in \mathbf{R}^{q \times m}$ ,  $C_z \in \mathbf{R}^{l \times n}$  均为常数矩阵.

本文假设:

- 1)  $D_{yu} = 0$  (为了简化推导过程);
- 2) 非线性静态抗饱和控制器 (5) 可转化为如下

LFR 形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_{cu} y + B_{cp} p + B_{c\varphi} \varphi_c + E_a \psi(v_c), \\ q = C_q x_c + D_{qu} y + D_{qp} p + D_{q\varphi} \varphi_c, \\ v_c = C_c x_c + D_{cu} y + D_{cp} p + D_{c\varphi} \varphi_c, \\ z_c = \tilde{C}_{cz} \xi = [\tilde{C}_{cz1} \quad \tilde{C}_{cz2}] \xi. \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} p(x, x_c) &= \Delta_2(x, x_c) q(x, x_c), \quad A_c \in \mathbf{R}^{n_c \times n_c}, \\ B_{cu} &\in \mathbf{R}^{n_c \times q}, \quad B_{cp} \in \mathbf{R}^{n_c \times N_c}, \quad B_{c\varphi} \in \mathbf{R}^{n_c \times l_c}, \\ E_a &\in \mathbf{R}^{n_c \times m}, \quad C_q \in \mathbf{R}^{N_c \times n_c}, \quad D_{qp} \in \mathbf{R}^{N_c \times N_c}, \\ D_{qu} &\in \mathbf{R}^{N_c \times q}, \quad D_{q\varphi} \in \mathbf{R}^{N_c \times l_c}, \quad C_c \in \mathbf{R}^{m \times n_c}, \\ D_{cu} &\in \mathbf{R}^{m \times q}, \quad D_{cp} \in \mathbf{R}^{m \times N_c}, \quad D_{c\varphi} \in \mathbf{R}^{m \times l_c}; \\ \Delta_{21}(x) &= \text{diag}(x_1 I_{l_1}, \dots, x_n I_{l_n}), \\ \Delta_{22}(x_c) &= \text{diag}(x_{c1} I_{f_1}, \dots, x_{cn_c} I_{f_{n_c}}), \\ \Delta_2(x, x_c) &= \text{diag}(\Delta_{21}(x), \Delta_{22}(x_c)); \\ N_{c1} &= l_1 + \dots + l_n, \quad N_{c2} = f_1 + \dots + f_{n_c}, \\ N_c &= N_{c1} + N_{c2}. \end{aligned}$$

通过有理矩阵函数的 LFR 技术<sup>[19]</sup>, 非线性系统 (3) 可转化为带有一个额外非线性回路的 Lur'e 系统. 事实上, 若非线性向量函数  $f(x), \alpha(x), g(x), h(x), \beta(x), k(x)$  均为常数矩阵, 则非线性系统 (3) 即为传统意义上的 Lur'e 系统, 对于该系统的抗饱和问题的研究, 可参考文献 [11]. 因而, 可将本文所研究的非线性系统视为更一般的 Lur'e 系统, 从而可将更广一类饱和和非线性系统的抗饱和控制问题纳入本文所提出的 LMI 框架下.

正如文献 [21] 所述, 通过有理系统的 LFR 可获得其 DAR 形式. 事实上, 只需定义状态依赖型矩阵

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \Delta_1(x) C_\eta, \quad \Pi_2 = \Delta_1(x) D_{\eta\pi} - I_N, \\ \Pi_3 &= \Delta_1(x) D_{\eta\varphi}, \quad \Pi_4 = \Delta_1(x) D_{\eta u}, \end{aligned}$$

便可将系统 (7) 转化为 DAR 形式 (对应地, 可以将静态抗饱和控制系统 (8) 转化为相应的 DAR 形式). 此

时, 由于系数矩阵  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$  是状态依赖的, 所得的 LMI 条件必然也是状态依赖的. 从而, 当受控系统 (3) 的维数增加时, 求解静态抗饱和问题所需计算量将指数性增加. 文献 [10] 研究了基于 DAR 的有理系统静态抗饱和问题. 不难看出, 同样可以将基于 DAR 的抗饱和控制技术进行推广以使其适用于本文所研究的非线性系统. 然而, 与有理系统<sup>[10,16]</sup>情况相似, 为了获得 LMI 条件不得不对椭球域  $\mathcal{E}(P)$  增加额外的约束, 这势必会增加闭环系统吸引域估计的保守性. 另外, 可将非线性系统 (3) 看作如下形式的 LPV 系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(\theta)x + \alpha(\theta)\varphi(z) + g(\theta)\text{sat}(v_c(t)), \\ y = h(\theta)x + \beta(\theta)\varphi(z) + k(\theta)\text{sat}(v_c(t)), \\ z = C_z x, \end{cases}$$

其中  $\theta$  在某一凸集  $\Theta$  上取值. 这样可将非线性系统 (3) 的静态抗饱和问题纳入 LPV 系统的抗饱和控制框架下<sup>[13]</sup>. 此时, 由于时变参数  $\theta$  完全独立于系统状态  $x$ , 所估计的闭环系统吸引域势必较为保守. 以上所述的两点可从下文的仿真结果中获得证明.

本文主要研究非线性系统 (3) 的静态抗饱和控制器设计问题, 即构造静态抗饱和控制器 (8) 以及一个尽可能大的椭球域  $\mathcal{E}(P)$ , 使得选择  $\mathcal{E}(P)$  中的任意一点作为初始状态, 闭环系统轨线都将渐近稳定到原点.

### 3 主要结果

本节将提出基于 LMI 条件的非线性静态抗饱和控制器设计方法.

首先, 定义如下系统矩阵:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A + B_u D_{cu} C_y & B_u C_c \\ B_{cu} C_y & A_c \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{\varphi_c} = \begin{bmatrix} B_u D_{c\varphi} \\ B_{c\varphi} \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_\pi &= \begin{bmatrix} B_\pi + B_u D_{cu} D_{y\pi} & B_u D_{cp} \\ B_{cu} D_{y\pi} & B_p \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_u = \begin{bmatrix} -B_u \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_\varphi &= \begin{bmatrix} B_\varphi + B_u D_{cu} D_{y\varphi} \\ B_{cu} D_{y\varphi} \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_{\eta\varphi_c} = \begin{bmatrix} D_{\eta u} D_{c\varphi} \\ D_{q\varphi} \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}_\eta &= \begin{bmatrix} C_\eta + D_{\eta u} D_{cu} C_y & D_{\eta u} C_c \\ D_{qu} C_y & C_q \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_{\eta u} = \begin{bmatrix} -D_{\eta u} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{D}_{\eta\pi} &= \begin{bmatrix} D_{\eta\pi} + D_{\eta u} D_{cu} D_{y\pi} & D_{\eta u} D_{cp} \\ D_{qu} D_{y\pi} & D_{qp} \end{bmatrix}, \\ \tilde{D}_{\eta\varphi} &= \begin{bmatrix} D_{\eta\varphi} + D_{\eta u} D_{cu} D_{y\varphi} \\ D_{qu} D_{y\varphi} \end{bmatrix}, \quad \hat{I} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}_c &= [D_{cu} C_y \quad C_c], \quad \tilde{D}_{c\pi} = [D_{cu} D_{y\pi} \quad D_{cp}], \\ \tilde{D}_{c\varphi} &= D_{cu} D_{y\varphi}, \quad \tilde{C}_z = [C_z \quad 0], \quad \tilde{D}_{c\varphi_c} = D_{c\varphi}. \end{aligned}$$

闭环系统 (7), (8) 可由如下状态方程表示:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \tilde{A}\xi + \tilde{B}_\pi\tilde{\pi} + \tilde{B}_\varphi\varphi + \tilde{B}_{\varphi_c}\varphi_c + \hat{B}_u\psi(v_c), \\ \dot{\tilde{\eta}} = \tilde{C}_\eta\xi + \tilde{D}_{\eta\pi}\tilde{\pi} + \tilde{D}_{\eta\varphi}\varphi + \tilde{D}_{\eta\varphi_c}\varphi_c + \tilde{D}_{\eta u}\psi, \\ z = \tilde{C}_z\xi, \\ z_c = \tilde{C}_{cz}\xi. \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_1(x) &= \text{diag}(\Delta_1(x), \Delta_{21}(x)), \\ \tilde{\Delta}(x, x_c) &= \text{diag}(\bar{\Delta}_1(x), \Delta_{22}(x_c)), \\ \tilde{\pi} &= \tilde{\Delta}\tilde{\eta}, \hat{B}_u = (\tilde{B}_u + \hat{I}E_a), \end{aligned}$$

且

$$v_c = \tilde{C}_c\xi + \tilde{D}_{c\pi}\tilde{\pi} + \tilde{D}_{c\varphi}\varphi(z) + \tilde{D}_{c\varphi_c}\varphi_c(z_c). \quad (10)$$

一般情况下, 状态方程(9)不一定是适定的, 其适定性可通过选择适当的LFR来实现. 因而假设在区域 $\mathcal{B}_\sigma = \{\xi \mid |x_i| \leq \varepsilon_i^{-1}, |x_{cj}| \leq \varepsilon_{n+j}^{-1}\}$ 内, 状态方程(9)是适定的(即对于所有 $\xi \in \mathcal{B}_\sigma$ ,  $\det(I - \tilde{D}_{\eta\pi}\tilde{\Delta}(x, x_c)) \neq 0$ 总成立), 其中,  $i = 1, 2, \dots, n$ 为出现在 $\tilde{\Delta}(x, x_c)$ 中非线性系统(3)状态 $x_i$ 的下标;  $j = 1, 2, \dots, n_c$ 为出现在 $\tilde{\Delta}(x, x_c)$ 中静态抗饱和控制器(8)状态 $x_{cj}$ 的下标. 容易证明, 在区域 $\mathcal{B}_\sigma$ 中有下列不等式成立:

$$\tilde{\eta}^T S \tilde{\eta} - \tilde{\pi}^T \delta S \tilde{\pi} \geq 0. \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta &= \text{diag}(\varepsilon_1^2 I_{r_1}, \dots, \varepsilon_n^2 I_{r_n}, \varepsilon_1^2 I_{l_1}, \dots, \varepsilon_n^2 I_{l_n}, \\ &\varepsilon_{n+1}^2 I_{f_1}, \dots, \varepsilon_{n+n_c}^2 I_{f_{n_c}}) = \\ &\text{diag}(\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_n I_{r_n}, \delta_1 I_{l_1}, \dots, \delta_n I_{l_n}, \\ &\delta_{n+1} I_{f_1}, \dots, \delta_{n+n_c} I_{f_{n_c}}), \end{aligned}$$

且分块对角矩阵 $S$ 与矩阵 $\tilde{\Delta}(x, x_c)$ 可交换.

考虑矩阵变量 $H \in \mathbf{R}^{m \times (n+n_c)}$ ,  $K \in \mathbf{R}^{m \times l}$ ,  $K_c \in \mathbf{R}^{m \times l_c}$ , 并定义如下多面体集:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \{\xi \mid (\tilde{C}_c - H)_i \xi + (\tilde{D}_{c\varphi} - K)_i \varphi + \\ &(\tilde{D}_{c\varphi_c} - K_c)_i \varphi_c \leq v_{0i}\}. \end{aligned} \quad (12)$$

根据引理1, 死区函数 $\psi(v_c)$ 满足如下更具一般形式的扇形区间不等式条件:

$$\psi(v_c)^T T_1 (\psi(v_c) - H\xi - \tilde{D}_{c\pi}\tilde{\pi} - K\varphi - K_c\varphi_c) \leq 0, \quad (13)$$

其中 $T_1 \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 为任意正定对角矩阵. 考虑非线性向量函数 $\varphi(z)$ 及 $\varphi_c(z_c)$ 满足局部sector-bounded条件的情况, 分别定义区域

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &= \{\xi \mid |(\tilde{C}_z \xi)_i| \leq \kappa_i, i = 1, 2, \dots, l\}, \\ \mathcal{S}_3 &= \{\xi \mid |(\tilde{C}_{cz} \xi)_i| \leq \kappa_{ci}, i = 1, 2, \dots, l_c\}. \end{aligned}$$

基于以上讨论与假设, 给出如下定理用以构造静态抗饱和增益矩阵 $E_a$ .

**定理 1** 考虑非线性系统(3)及其静态抗饱和

控制器(5). 对于给定的正定对角矩阵 $\delta$ , 如果存在1个对称正定矩阵 $W \in \mathbf{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ , 3个正定对角矩阵 $S_1 \in \mathbf{R}^{m \times m}$ ,  $S_2 \in \mathfrak{R}^{l \times l}$ ,  $S_3 \in \mathbf{R}^{l_c \times l_c}$ , 1个分块正定对角矩阵 $\mathcal{N} \in \mathbf{R}^{(N+N_c) \times (N+N_c)}$ (与矩阵 $\tilde{\Delta}(x, x_c)$ 可交换)以及矩阵 $Y \in \mathbf{R}^{m \times (n+n_c)}$ ,  $F \in \mathbf{R}^{n_c \times m}$ ,  $G \in \mathbf{R}^{m \times l}$ ,  $G_c \in \mathbf{R}^{m \times l_c}$ 使得矩阵不等式(14)~(18)成立, 则以椭球 $\mathcal{E}(P)$ 中任意点为初始状态, 闭环系统(9), (10)的轨线都将渐近稳定到原点. 在矩阵不等式(14)~(18)中:  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $k = 1, 2, \dots, l$ ;  $t = 1, 2, \dots, l_c$ ;  $1 \leq j \leq n + n_c$ 为出现在 $\tilde{\Delta}(x, x_c)$ 中的 $\xi_j$ 的下标;  $\tau_j$ 为单位矩阵 $I_{n+n_c}$ 的第 $j$ 行行向量;  $\Omega_0 = He\{\tilde{A}W\}$ ,  $\Omega_1 = \tilde{B}_\varphi S_2 + W \tilde{C}_z^T \Omega$ ,  $\Omega_2 = \tilde{B}_{\varphi_c} S_3 + W \tilde{C}_{cz}^T \Omega_c$ ,  $\Omega_3 = \tilde{B}_u S_1 + \hat{I}F + Y^T$ ,  $\Omega_4 = \tilde{C}_c W - Y$ ,  $\Omega_5 = \tilde{D}_{c\varphi} S_2 - G$ ,  $\Omega_6 = \tilde{D}_{c\varphi_c} S_3 - G_c$ .

$$\begin{bmatrix} \Omega_0 & \tilde{B}_\pi \mathcal{N} & \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & W \tilde{C}_\eta^T \\ * & -\delta \mathcal{N} & 0 & 0 & \mathcal{N} \tilde{D}_{\eta\pi}^T & \mathcal{N} \tilde{D}_{\eta\pi}^T \\ * & * & -2S_2 & 0 & G^T & S_2 \tilde{D}_{\eta\varphi}^T \\ * & * & * & -2S_3 & G_c^T & S_3 \tilde{D}_{\eta\varphi_c}^T \\ * & * & * & * & -2S_1 & S_1 \tilde{D}_{\eta u}^T \\ * & * & * & * & * & -\mathcal{N} \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} W & * & * & * \\ -\Omega \tilde{C}_z W & 2S_2 & * & * \\ -\Omega_c \tilde{C}_{cz} W & 0 & 2S_3 & * \\ \Omega_{4i} & \Omega_{5i} & \Omega_{6i} & v_{0i}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} W & * \\ \delta_j \tau_j W & \delta_j \end{bmatrix} > 0, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} W & * \\ \tilde{C}_{zk} W & \kappa_k^2 \end{bmatrix} > 0, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} W & * \\ \tilde{C}_{czt} W & \kappa_{ct}^2 \end{bmatrix} > 0. \quad (18)$$

**证明** 定义Lyapunov函数 $V(t) = \xi^T P \xi$ 及新的矩阵变量 $W = P^{-1}$ ,  $S_1 = T_1^{-1}$ ,  $S_2 = T_2^{-1}$ ,  $S_3 = T_3^{-1}$ ,  $\mathcal{N} = S^{-1}$ ,  $Y = HW$ ,  $F = E_a S_1$ ,  $G = K S_2$ ,  $G_c = K_c S_3$ . 容易看出, 不等式(16)~(18)确保了 $\mathcal{E}(P) \subseteq \mathcal{B}_\sigma \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3$ . 因而, 在椭球域 $\mathcal{E}(P)$ 中, 闭环系统(9)和(10)是适定的, 并且不等式(4), (6), (11)成立. 为了处理执行器中的饱和非线性环节, 需确保 $\mathcal{E}(P) \subseteq \mathcal{S}_1$ , 这等价于确保如下不等式成立:

$$\begin{aligned} \xi^T P \xi - |(\tilde{C}_c - H)_i \xi + (\tilde{D}_{c\varphi} - K)_i \varphi + \\ (\tilde{D}_{c\varphi_c} - K_c)_i \varphi_c|^2 / v_{0i}^2 > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

根据S-procedure, 为使式(19)成立需确保下式成立:

$$\begin{aligned} \xi^T P \xi - |(\tilde{C}_c - H)_i \xi + (\tilde{D}_{c\varphi} - K)_i \varphi + \\ (\tilde{D}_{c\varphi_c} - K_c)_i \varphi_c|^2 / v_{0i}^2 + 2\varphi^T T_2 (\varphi - \Omega z) + \end{aligned}$$

$$2\varphi_c(z_c)^T T_3(\varphi_c - \Omega_c z_c) > 0. \quad (20)$$

根据 Schur 补引理, 式(20)等价于

$$\begin{bmatrix} P & * & * & * \\ -T_2 \Omega \tilde{C}_z & 2T_2 & * & * \\ -T_3 \Omega_c \tilde{C}_{cz} & 0 & 2T_3 & * \\ (\tilde{C}_c - H)_i & (\tilde{D}_{c\varphi} - K)_i & (\tilde{D}_{c\varphi_c} - K_c)_i & v_{0i}^2 \end{bmatrix} > 0. \quad (21)$$

将式(21)左右两边分别乘以分块正定对角矩阵  $\text{diag}(W, S_2, S_3, 1)$ , 即可获得 LMI 条件(15). 基于以上讨论, 在椭球域  $\mathcal{E}(P)$  中, LMI 条件(13)成立. 因此, 根据 S-procedure, 当 Lyapunov 函数  $V(t)$  沿着闭环系统轨线的时间导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V} + \tilde{\eta}^T S \tilde{\eta} - \tilde{\pi}^T \delta S \tilde{\pi} - 2\varphi(z)^T T_2(\varphi(z) - \Omega z) - \\ 2\varphi_c^T T_3(\varphi_c - \Omega_c z_c) - 2\psi(v_c)^T T_1(\psi(v_c) - \\ H\xi - \tilde{D}_{c\pi} \tilde{\pi} - K\varphi(z) - K_c \varphi_c(z_c)) < 0 \end{aligned} \quad (22)$$

时, 有  $\dot{V} < 0$ . 根据 Schur 补引理, 不等式(22)等价于

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_0 & P\tilde{B}_\pi & \Upsilon_1 & \Upsilon_2 & \Upsilon_3 & \tilde{C}_\eta^T S \\ * & -\delta S & 0 & 0 & \tilde{D}_{c\pi}^T T_1 & \tilde{D}_{\eta\pi}^T S \\ * & * & -2T_2 & 0 & K^T T_1 & \tilde{D}_{\eta\varphi}^T S \\ * & * & * & -2T_3 & K_c^T T_1 & \tilde{D}_{\eta\varphi_c}^T S \\ * & * & * & * & -2T_1 & \tilde{D}_{\eta u}^T S \\ * & * & * & * & * & -S \end{bmatrix} < 0. \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} \Upsilon_0 &= He\{P\tilde{A}\}, \quad \Upsilon_1 = P\tilde{B}_\varphi + \tilde{C}_z^T \Omega T_2, \\ \Upsilon_2 &= P\tilde{B}_{\varphi_c} + \tilde{C}_{cz}^T \Omega_c T_3, \\ \Upsilon_3 &= P\tilde{B}_u + P\hat{I}E_a + H^T T_1. \end{aligned}$$

将不等式(23)左右两边分别乘以分块正定对角矩阵  $\text{diag}(W, \mathcal{N}, S_2, S_3, S_1, \mathcal{N})$ , 即可获得 LMI 条件(14).  $\square$

**注 1** 求解定理 1 中的 LMI 条件之后, 可构造静态抗饱和增益  $E_a = FS_1^{-1}$ .

**注 2** 定理 1 中的稳定性条件适用于非线性项  $\varphi(z)$  或者  $\varphi_c(z_c)$  全局满足扇形区间不等式条件(4)和(6)的情形. 此时, 只需将不等式(17)或者(18)删去即可.

**注 3** 当  $\varphi(z) = \varphi_c(z_c)$  时, 为了利用定理 1 设计静态抗饱和控制器, 需对所得 LMI 条件及系统矩阵作适当修改: 删去不等式条件(18); 删去不等式条件(14)中的第 4 行和第 4 列; 删去不等式条件(15)中的第 3 行和第 3 列; 用如下系统矩阵代替相应的原系统矩阵:

$$\tilde{B}_\varphi = \begin{bmatrix} B_\varphi + B_u D_{c\varphi} + B_u D_{cu} D_{y\varphi} \\ B_{c\varphi} + B_{cu} D_{y\varphi} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D}_{\eta\varphi} = \begin{bmatrix} D_{\eta\varphi} + D_{\eta u} D_{c\varphi} + D_{\eta u} D_{cu} D_{y\varphi} \\ D_{q\varphi} + D_{qu} D_{y\varphi} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D}_{c\varphi} = D_{c\varphi} + D_{cu} D_{y\varphi}.$$

**注 4** 由于非线性系统的复杂属性, 利用线性系统稳定性分析工具(如 LMI)处理非线性系统稳定性问题必然造成保守性. 对于本文所讨论的问题, 保守性主要来自两个方面: 1) 饱和非线性系统(3)的 LFR 是非唯一的, 选择不同的 LFR 会获得不同的吸引域估计值, 其结果的保守性各不相同. 传统上, 减小由于非唯一性带来的保守性的方法是在不等式(22)左端额外增加一项  $\tilde{\eta}^T G \tilde{\pi}$  (其中,  $G$  是任意斜对称矩阵), 以增加所得 LMI 条件的自由度进而减小保守性<sup>[20]</sup>. 然而, 这种方法将破坏所得稳定性条件的凸性(所得条件为 BMI). 2) 传统扇形区间不等式条件(4), (6)无法反映出非线性向量函数  $\varphi(z)$  和  $\varphi_c(z_c)$  的特有属性, 相反地, 其所描述的是很广泛的一类非线性函数的共有属性, 因而所获得的稳定性条件对很大一类非线性系统均有效. 这两类保守源本质上均由非唯一性产生. 为了减小这类保守性, 可采用测量补偿法, 即对保守非线性项进行测量, 并将测量信号引入控制系统中从而达到减小保守性的目的. 本文提出如下增广型抗饱和控制器:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_{cu} y + B_{c\pi} \pi + B_{c\varphi} \varphi + E_a \psi, \\ v_c = C_c x_c + D_{cu} y + D_{c\pi} \pi + D_{c\varphi} \varphi, \end{cases} \quad (24)$$

其中  $B_{c\pi}, B_{c\varphi}, D_{c\pi}, D_{c\varphi}, E_a$  均为待定的矩阵变量. 与传统的静态抗饱和控制器相比, 增广型静态抗饱和控制器具有更多的优化变量, 因而可以预见, 增广型抗饱和控制器能够获得保守性较小的优化结果.

**定理 2** 考虑非线性系统(3)以及静态抗饱和控制器(24). 对于给定的正定对角矩阵  $\delta$ , 如果存在 1 个正定矩阵  $W \in \mathbf{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ , 2 个正定对角矩阵  $S_1 \in \mathbf{R}^{m \times m}, S_2 \in \mathbf{R}^{l \times l}$ , 1 个分块正定对角矩阵  $\mathcal{N} \in \mathbf{R}^{N \times N}$  (与矩阵  $\Delta_1(x)$  可交换), 以及矩阵  $Y \in \mathbf{R}^{m \times (n+n_c)}, F \in \mathbf{R}^{n_c \times m}, G \in \mathbf{R}^{m \times l}, B_1 \in \mathbf{R}^{n_c \times N}, B_2 \in \mathbf{R}^{n_c \times l}, D_1 \in \mathbf{R}^{m \times N}, D_2 \in \mathbf{R}^{m \times l}$ , 使得以下不等式成立:

$$\begin{bmatrix} W & * & * \\ -\Omega \tilde{C}_z W & 2S_2 & * \\ (\tilde{C}_c W - Y)_i & (D_2 + \tilde{D}_{c\varphi} S_2 - G)_i & v_{0i}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_0 & \Upsilon_4 & \Upsilon_5 & \Omega_3 & W\tilde{C}_\eta^T \\ * & -\delta \mathcal{N} & 0 & D_1^T + \mathcal{N}\tilde{D}_{c\pi}^T & \Upsilon_6^T \\ * & * & -2S_2 & G^T & \Upsilon_7^T \\ * & * & * & -2S_1 & S_1 \tilde{D}_{\eta u}^T \\ * & * & * & * & -\mathcal{N} \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ \delta_j \tau_j W & \delta_j \end{bmatrix} > 0, \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ \tilde{C}_{zk} W & \kappa_k^2 \end{bmatrix} > 0, \quad (28)$$

则以椭球  $\mathcal{E}(P)$  中任意点为初始状态, 闭环系统 (7) 和 (24) 的轨线都将渐近稳定到原点. 其中:  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $k = 1, 2, \dots, l$ ;  $1 \leq j \leq n$  为出现在矩阵  $\Delta_1(x)$  中非线性系统 (3) 的状态的下标;  $\tau_j$  为单位矩阵  $I_{n+n_c}$  第  $j$  行的行向量; 而

$$\begin{aligned} \Upsilon_4 &= \tilde{B}_\pi \mathcal{N} - \tilde{B}_u D_1 + \hat{I} B_1, \\ \Upsilon_5 &= \tilde{B}_\varphi S_2 - \tilde{B}_u D_2 + \hat{I} B_2 + W \tilde{C}_z^T \Omega, \\ \Upsilon_6 &= \tilde{D}_{\eta\pi} \mathcal{N} + D_{\eta u} D_1, \\ \Upsilon_7 &= \tilde{D}_{\eta\varphi} S_2 + D_{\eta u} D_2, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \tilde{B}_\pi &= \begin{bmatrix} B_\pi + B_u D_{cu} D_{y\pi} \\ B_{cu} D_{y\pi} \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_\varphi &= \begin{bmatrix} B_\varphi + B_u D_{cu} D_{y\varphi} \\ B_{cu} D_{y\varphi} \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}_\eta &= [C_\eta + D_{\eta u} D_{cu} C_y \quad 0], \\ \tilde{D}_{c\varphi} &= D_{cu} D_{y\varphi}, \\ \tilde{D}_{c\pi} &= D_{cu} D_{y\pi}, \\ \tilde{D}_{\eta\varphi} &= D_{\eta\varphi} + D_{\eta u} D_{cu} D_{y\varphi}, \\ \tilde{D}_{\eta u} &= -D_{\eta u}, \\ \tilde{D}_{\eta\pi} &= D_{\eta\pi} + D_{\eta u} D_{cu} D_{y\pi}. \end{aligned} \quad (29)$$

**证明** 沿着定理 1 的证明过程, 很容易证明定理 2. 考虑到  $\varphi(z) = \varphi_c(z_c)$ , 根据注 3, 首先将不等式 (18), 不等式 (14) 的第 4 行和第 4 列以及不等式 (15) 的第 3 行和第 3 列删除. 以式 (29) 中的常数矩阵替代原系统中的矩阵  $\tilde{B}_\pi, \tilde{B}_\varphi, \tilde{D}_{\eta\pi}, \tilde{D}_{\eta\varphi}, \tilde{D}_{c\varphi}$ , 得

$$\begin{aligned} \tilde{B}_\pi &\rightarrow \tilde{B}_\pi - \tilde{B}_u D_{c\pi} + \hat{I} B_{c\pi}, \\ \tilde{B}_\varphi &\rightarrow \tilde{B}_\varphi - \tilde{B}_u D_{c\varphi} + \hat{I} B_{c\varphi}, \\ \tilde{D}_{c\varphi} &\rightarrow \tilde{D}_{c\varphi} + D_{c\varphi}, \\ \tilde{D}_{\eta\pi} &\rightarrow \tilde{D}_{\eta\pi} + D_{\eta u} D_{c\pi}, \\ \tilde{D}_{\eta\varphi} &\rightarrow \tilde{D}_{\eta\varphi} + D_{\eta u} D_{c\varphi}. \end{aligned}$$

定义新的矩阵变量

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\eta &= [C_\eta + D_{\eta u} D_{cu} C_y \quad 0], \\ B_1 &= B_{c\pi} \mathcal{N}, \quad B_2 = B_{c\varphi} S_2, \\ D_1 &= D_{c\pi} \mathcal{N}, \quad D_2 = D_{c\varphi} S_2, \end{aligned}$$

从而得到矩阵不等式条件 (25), (26).  $\square$

**注 5** 求解矩阵不等式 (25)~(28) 之后, 可求得增广型静态抗饱和控制器 (21) 中的待定矩阵  $B_{c\pi} = B_1 \mathcal{N}^{-1}$ ,  $B_{c\varphi} = B_2 S_2^{-1}$ ,  $D_{c\pi} = D_1 \mathcal{N}^{-1}$ ,  $D_{c\varphi} = D_2 S_2^{-1}$ .

**注 6** 当仅有  $\pi(x)$  或者  $\varphi(z)$  可测量时, 定理 2 依然可以构造相对应的增广型静态抗饱和控制器. 在此情况下, 只需分别令矩阵变量  $B_2, D_2$  或者矩阵变量  $B_1, D_1$  为适当维数的零矩阵即可.  $\pi(x)$  由等式约束描述, 其中  $\Delta_1(x)$  反映了原系统的非线性程度, 而非线性项  $\varphi(z)$  由扇形区间不等式描述, 容易看出, 对非线性项  $\varphi(z)$  的描述相对保守, 其对吸引域估计结果的保守性影响更大, 因而对其测量显得更加的重要. 可以预见, 与引入  $\pi(x)$  相比, 将非线性项  $\varphi(z)$  引入静态抗饱和控制器当中更能减小吸引域估计的保守性.

求解 LMI 所需计算量取决于 LMI 中决策变量的个数以及 LMI 的行数<sup>[27]</sup>. 与 LPV 及 DAR 静态抗饱和方法相比, 本文所提出的 LFR 静态抗饱和方法在计算量上具有明显的优势. 这是因为, 不论 LPV 静态抗饱和方法还是 DAR 静态抗饱和方法, 所对应的 LMI 条件均依赖于时变参数. 另外, 在文献 [10] 中, 为了减小所得 LMI 条件的保守性, 采用了矩阵权重法推导过程, 人为增加了 LMI 条件中决策变量的个数, 从而提高了计算负担. 以第 4 节中的控制系统为例, 基于定理 1 的抗饱和方法, 只需求解 12 个决策变量及 21 行 LMI 条件; 基于定理 2 的抗饱和方法, 需求解 20 个决策变量及 21 行 LMI 条件; 基于 DAR 抗饱和方法, 需求解 16 个决策变量及 28 行 LMI 条件; 基于 LPV 方法, 需求解 10 个决策变量及 26 行 LMI 条件 (对于 LPV 系统关于时变参数非凸的情况, 构造静态抗饱和控制器所需计算量会更高). 对于更一般的情况, 表 1 中列出了 3 类方法所需计算量 (以控制器为线性的情况为例). 其中:  $\bar{n} = n + n_c$ ;  $n_{\mathcal{N}}$  表示  $\mathcal{N}$  中决策变量个数;  $n_{V_1}$  表示网格化点数<sup>[13]</sup>,  $n_{V_2}$  表示状态变量所在多面体集的顶点个数<sup>[10]</sup>.

表 1 不同抗饱和策略下 LMI 决策变量个数及行数的比较

抗饱和策略	决策变量个数	LMI 行数
LPV 方法	$\frac{1}{2} \bar{n}(\bar{n} + 1) + m \bar{n} n_{V_1} + m + l + m n_c$	$(\bar{n} + m \bar{n} + 2 \bar{n} + 2m + l) n_{V_1} + l(\bar{n} + 1)$
DAR 方法	$\frac{1}{2} \bar{n}(\bar{n} + 1) + 2 \bar{n}^2 + m(\bar{n} + n_c) + m + l$	$(3 \bar{n} + m + l) n_{V_2} + (m + \bar{n} + l)(\bar{n} + 1)$
定理 1	$\frac{1}{2} \bar{n}(\bar{n} + 1) + m(\bar{n} + n_c + l) + m + l + n_{\mathcal{N}}$	$\bar{n} + 2 n_{\mathcal{N}} + l + m + m(\bar{n} + l + 1) + (\bar{n} + l)(\bar{n} + 1)$
定理 2 ( $\pi, \varphi$ )	$\frac{1}{2} \bar{n}(\bar{n} + 1) + m(\bar{n} + n_c + l) + m + l + n_{\mathcal{N}} + (m + n_c)(N + l)$	$\bar{n} + 2 n_{\mathcal{N}} + l + m + m(\bar{n} + l + 1) + (\bar{n} + l)(\bar{n} + 1)$

### 4 数值仿真

考虑如下非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = (x^2 - 1)x + \frac{0.3}{\pi}(x^2 + 0.3)\sin(\pi x) + \text{sat}(v_c), \\ y = x, \end{cases} \quad (30)$$

饱和度  $v_0 = 1$ . 预先设计好的线性控制器为

$$\begin{cases} \dot{x}_c = -y, \\ v_c = x_c - 2y. \end{cases} \quad (31)$$

定义  $z = \pi x$ ,  $\varphi(z) = \frac{0.3}{\pi} \sin z$  以及

$$\pi(x) = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 + x^2\varphi(z) \\ x\varphi(z) \end{bmatrix},$$

$$\eta(x) = \begin{bmatrix} x \\ x^2 + x\varphi(z) \\ \varphi(z) \end{bmatrix},$$

则非线性系统 (27) 可转化为 LFR 形式, 且其系数矩阵如下所示 (其中  $\Delta_1 = \text{diag}(x, x, x)$ ):

$$C_\eta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, D_{\eta\pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{\eta\varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A = -1, B_\pi = [0 \ 1 \ 0],$$

$$B_u = 1, C_y = 1, C_z = \pi, B_\varphi = 0.3,$$

其他系统矩阵均为适当维数的零矩阵. 考虑多面体集  $\mathcal{B}_\sigma = \{\xi \mid |x_1| \leq \varepsilon_1^{-1}\}$ , 其中  $\varepsilon_1 = 1.1$  (此处通过线性搜索的方法确定  $\varepsilon_1$  的最佳取值). 在此区域中,  $\varphi(z)$  满足局部扇形区间不等式 (4) ( $\Omega = 0.3$ ). 求解广义最短轴最优化问题<sup>[10,16]</sup> 获得静态抗饱和增益矩阵  $E_a = -1.6513$ . 另外, 利用定理 2 设计增广型静态抗饱和控制器, 分别获得 3 种情况下静态抗饱和增益矩阵以及对应的闭环系统吸引域的估计值: 仅非线性项  $\varphi(z)$  可测量; 仅非线性项  $\pi(x)$  可测量; 非线性项  $\varphi(z)$  和  $\pi(x)$  均可测量, 如图 1 和表 2 所示. 其中:  $R_1$  基于定理 2 ( $\pi, \varphi$  可测量);  $R_2$  基于定理 2 ( $\varphi$  可测量);  $R_3$  基于定理 2 ( $\pi$  可测量);  $R_4$  基于定理 1;  $R_5$  基于 LPV 方法;  $R_6$  基于 DAR 方法<sup>[10]</sup>.

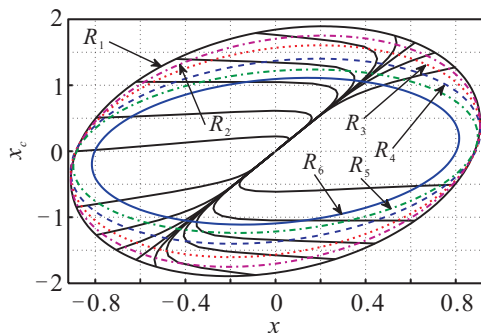


图 1 闭环系统吸引域的估计与比较

表 2 闭环系统吸引域的比较

抗饱和策略	$E_a$	$P$	Trace( $P$ )
DAR 方法	-1.8950	$\begin{bmatrix} 1.5537 & -0.2027 \\ -0.2027 & 0.8426 \end{bmatrix}$	2.3963
LPV 方法	-1.9319	$\begin{bmatrix} 1.2850 & -0.1718 \\ -0.1718 & 0.6758 \end{bmatrix}$	1.9608
定理 1	-1.6513	$\begin{bmatrix} 1.2673 & -0.1747 \\ -0.1747 & 0.5330 \end{bmatrix}$	1.8003
定理 2 ( $\pi$ )	-0.4122	$\begin{bmatrix} 1.2710 & -0.1562 \\ -0.1562 & 0.4075 \end{bmatrix}$	1.6786
定理 2 ( $\varphi$ )	-0.7595	$\begin{bmatrix} 1.2796 & -0.1537 \\ -0.1537 & 0.3446 \end{bmatrix}$	1.6241
定理 2 ( $\pi, \varphi$ )	-0.4263	$\begin{bmatrix} 1.2789 & -0.1411 \\ -0.1411 & 0.2947 \end{bmatrix}$	1.5736

从仿真结果可以看出, 通过引入可测量的非线性项  $\varphi(z)$  和  $\pi(x)$ , 扩大了所估计的闭环系统吸引域的大小. 同时还能看出, 与引入  $\pi(x)$  相比, 引入  $\varphi(z)$  更能扩大所估计的闭环系统吸引域. 这说明对于  $\varphi(z)$  的描述是相对保守的, 因而对其测量并加以利用显得更为重要. 为了与现有的方法进行比较 (例如 LPV 静态抗饱和方法, DAR 静态抗饱和方法<sup>[10]</sup>), 推广了这些技术以使其能适用于本文所研究的非线性系统. 还可以看出, 与 LPV 及 DAR 方法相比, 本文所提出的静态抗饱和控制器设计方法获得了更好的估计效果. LPV 方法以  $\theta = x^2$  作为有界时变参数, 利用与定理 1 相似的证明方法很容易获得相应的 LMI 条件; 对于本例, 由于系统矩阵关于  $\theta$  是仿射的, 因而只需确保 LMI 在凸集  $\mathcal{B}_\theta = \{\theta \mid 0 \leq \theta \leq \varepsilon_1^{-2}\}$  的顶点上的可解性即可. 然而, 本文所提出的设计方法依然具有较大的保守性, 如图 2 所示 (对于保守性产生的原因, 请参考注 4). 其中  $R_1$  基于定理 1,  $R_2$  基于定理 2 ( $\pi, \varphi$  可测量), 虚线描述了实际闭环系统吸引域的范围.

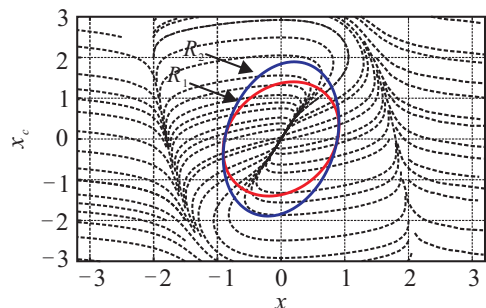


图 2 闭环系统吸引域的估计值与真实值的比较.

### 5 结 论

本文研究了一类饱和非线性系统的抗饱和控制器设计问题. 基于有理矩阵函数的 LFR 技术, 该类非有理系统可转化为带有一个额外非线性回路的 Lur'e 型系统. 基于非有理函数项满足 sector-bounded 条件的假设, 并利用广义扇形区间不等式条件处理系统中的饱和非线性项, 提出了基于 LMI 条件的非线性抗饱

和控制器设计方法. 特别地, 当预先设计好的控制器是线性控制器时, 提出了增广型抗饱和控制方法, 从而进一步改善了闭环系统性能.

### 参考文献(References)

- [1] Tarbouriech S, Turner M. Anti-windup design: An overview of some recent advances and open problems[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2009, 3(1): 1-19.
- [2] Hu T, Teel A R, Zaccarian L. Stability and performance for saturated systems via quadratic and nonquadratic Lyapunov functions[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2006, 51(11): 1770-1786.
- [3] Gomes da Silva Jr J M, Tarbouriech S. Anti-windup design with guaranteed regions of stability: An LMI-based approach[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(1): 106-111.
- [4] Turner M C, Herrmann G, Postlethwaite I. Incorporating robustness requirements into anti-windup design[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2007, 52(10): 1842-1855.
- [5] Weston P F, Postlethwaite I. Linear conditioning for systems containing saturating actuators[J]. *Automatica*, 2000, 36(9): 1347-1354.
- [6] Wu F, Lu B. Anti-windup control for exponentially unstable LTI systems with actuator saturation[J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 52(3/4): 305-322.
- [7] Bender F A, Gomes da Silva Jr J M, Tarbouriech S. Convex framework for the design of dynamic anti-windup for state-delayed systems[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2011, 5(12): 1388-1396.
- [8] Dai D, Hu T, Teel A R, et al. Output feedback design for saturated linear plants using deadzone loops[J]. *Automatica*, 2009, 45(12): 2917-2924.
- [9] Grimm G, Hatfield J, Postlethwaite I, et al. Anti-windup for stable systems with input saturation: An LMI-based synthesis[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(9): 1509-1525.
- [10] Gomes da Silva Jr J M, Oliveira M Z, Coutinho D, et al. Static anti-windup design for a class of nonlinear systems[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24(5): 793-810.
- [11] Gomes da Silva Jr J M, Turner M C. Static anti-windup for systems with sector-bounded nonlinearities[C]. *American Control Conf, Montréal*, 2012: 27-29.
- [12] Morabito F, Teel A R, Zaccarian L. Nonlinear anti-windup applied to Euler-Lagrange systems[J]. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 2004, 20(3): 526-537.
- [13] Wu F, Grigoriadis K M, Packard A. Anti-windup controller design using linear parameter-varying control methods[J]. *Int J of Control*. 2000, 73(12): 1104-1114.
- [14] Herrmann G, Menon P P, Turner M C, et al. Anti-windup synthesis for nonlinear dynamic inversion control schemes[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2010, 20(13): 1465-1482.
- [15] Valmorbida G, Tarbouriech S, Turner M C, et al. Anti-windup design for saturating quadratic systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2013, 62(5): 367-376.
- [16] Wang N Z, Pei H L, Wang J, et al. Anti-windup design for rational systems by linear-fractional representation[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2014, 8(5): 355-366.
- [17] Oliveira M Z, Gomes da Silva Jr J M, Coutinho D F, et al. Anti-windup design for a class of nonlinear control systems[C]. *Proc of 18th World Congress of the Int Federation of Automatic Control. Milano*, 2011: 13432-13437.
- [18] Castelan E B, Tarbouriech S, Queinnec I. Stability and stabilization of a class of nonlinear systems with saturating actuators[C]. *Proc of the 16th IFAC World Congress. Prague: Czech Republic*, 2005: 776-782.
- [19] Khalil K H. *Nonlinear systems*[M]. Prentice Hall: New Jersey, 1996: 231-233.
- [20] Ghaoui L E, Scorletti G. Control of rational systems using linear-fractional representations and linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 1996, 32(9): 1273-1284.
- [21] Coutinho D F, Fu M, Trofino A, et al.  $\mathcal{L}_2$ -Gain analysis and control of uncertain nonlinear systems with bounded disturbance inputs[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2008, 18(1): 88-110.
- [22] de Klerk E. *Aspects of semidefinite programming: Interior point algorithms and selected applications*[M]. Dordrecht: Kluwer, 2002.

(责任编辑: 孙艺红)