第 30 卷 第 10 期
Vol. 30 No. 10

控 制 与 决 策
Control and Decision

2015 年 10 月
Oct. 2015

文章编号: 1001-0920 (2015) 10-1911-04

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2014.1176

论 域 合 成 的 商 空 间 关 系

王加阳[1], 陈思力[1], 陈林书[1], 李 力[2]

(1. 中南大学 信息科学与工程学院，长沙 410083；2. 哈尔滨工业大学 深圳研究生院，广东 深圳 518055)

摘 要: 研究各商空间之间的转换以及各商空间之间的关系是商空间理论的重要内容. 对若干给定商空间的论域进行下、上确界合成, 分别得到了粒度更细与更粗的商空间; 讨论下、上确界合成论域之间的关系; 通过定义粘合映射的概念, 研究 3 类商空间之间的关系; 提出并证明对于给定原空间的任意两个商空间 X_1 和 X_2, X_2 是 X_1 的商空间所满足的条件. 进一步丰富和完善了粒计算的理论体系.

关键词: 商空间；粒计算；合成

中图分类号: TP18 **文献标志码:** A

Relationship between quotient spaces under domain combination

WANG Jia-yang[1], *CHEN Si-li*[1], *CHEN Lin-shu*[1], *LI Li*[2]

(1. School of Information Science and Technology，Central South University，Changsha 410083，China；2. Shenzhen Graduate School，Harbin Institute of Technology，Shenzhen 518055，China．Correspondent：CHEN Si-li，E-mail: chensili-123@qq.com)

Abstract: The research of the conversion and the relationship between each quotient space are important contents of the quotient space theory. Finer and coarser granularity quotient space can be obtained by conducting the infimum and supremum combination on the domain of some given quotient space. The relationship between the infimum and the supremum combination of domain is discussed. The relationship between the three types of quotient space is researched by defining the conception of the bonding mapping. The conditions are proposed and proved that, for any two quotient space X_1 and X_2 of the given original space, X_2 is the quotient space of X_1. The theoretical system of granular computing are enriched and improved further.

Keywords: quotient space；granular computing；combination

0 引 言

粒计算是当前智能信息处理领域中模拟人类思维和解决复杂问题的一种计算范式. 目前, 主流的粒计算模型有 3 种: 基于模糊集理论的粒计算模型[1]、基于粗糙集理论的粒计算模型[2-6]和基于商空间理论的粒计算模型[7-10].

商空间理论基于论域上的等价关系描述问题的粒度. 具体来说, 对于给定的三元组 (U, f, T) 以及论域 U 上的一个等价关系 R, 根据 R 得到商集 $[X]$; 然后由 $[X]$ 构造新的空间 $([X], [f], [T])$, 即为原空间 (U, f, T) 的商空间, 其中 $[f]$ 和 $[T]$ 分别为商属性函数和商结构[10]. 商空间理论就是研究各商空间之间的关系、各商空间的转换和在商空间中的推理[11].

1 商空间理论的论域合成技术

在实际应用中, 给定的问题往往粒度过细, 解决该问题时搜索空间过于庞大, 通常需要将问题进行适当处理, 然后再解决. 但处理过程不能盲目进行, 如果问题粒度太细, 则搜索空间依然庞大; 如果粒度太粗, 则又会失去一些有用的信息. 商空间的合成技术能将已知商空间合成为不同粒度的商空间, 从而找到合适的粒度去求解问题, 往往能达到事半功倍的效果[12].

商空间的合成技术分为论域的合成、结构的合成以及属性函数的合成. 3 种合成技术的实质都是实现粒度 (等价关系) 的转换. 而粒度与论域是相互诱导的, 因此对于给定空间上的若干商空间, 不管以何种技术对它们进行合成, 最终讨论的还是对论域的转换.

收稿日期: 2014-07-29；**修回日期:** 2015-03-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61173052)；湖南省自然科学基金项目 (14JJ4007).

作者简介: 王加阳 (1963−), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能计算与信息融合等研究；陈思力 (1989−), 男, 硕士生, 从事粒计算与智能信息处理的研究.

从这一角度看, 论域的合成最为简单和直观.

本文讨论的是论域的合成. 论域的转换实际上是粒度粗细的变换, 因此下面先从粒度粗细的概念入手, 逐步介绍论域的合成.

定义 1 设 R_1 和 R_2 分别是非空集合 U 上的等价关系, $\forall x, y \in U$, 若 $xR_1y \Rightarrow xR_2y$, 则称 R_1 比 R_2 细, 记为 $R_1 \subseteq R_2$.

定理 1[13] 设 X_1 和 X_2 是非空集合 U 上的划分, 并设 R_1 和 R_2 分别是由 X_1 和 X_2 诱导的等价关系, 则 R_1 比 R_2 细, 当且仅当 X_1 细分 X_2.

定理 1 说明, 比较两个等价关系的粗细, 就是比较这两个等价关系对应划分的粗细. 而划分粗细的比较是通过集合间的"细分"关系完成的, 因此可以将原来较为抽象的关系之间的比较转化为直观的集合间的比较.

定理 2[11] 设 R 是 U 上一切等价关系的全体, 则 R 在定义 1 所定义的 $\subseteq$ 关系下形成一个完备格.

由完备格的性质可知, 可以在这个格上取若干个等价关系 (粒度) 的上确界获得粗等价关系, 取下确界获得细等价关系, 从而实现粒度的自由转换. 由于粒度唯一确定一个划分, 通过取粒度的上下确界, 可实现对论域的自由转换, 这种转换也是论域的合成.

论域的合成包括下确界合成与上确界合成. 下面以两个论域的合成为例, 分别介绍这两种合成.

1.1 下确界合成

定义 2 设 X_1 和 X_2 是非空集合 X 的两个商集, X_1 和 X_2 的下确界合成记为 $\underline{X}$, 它是 X 的商集, 满足以下条件:

1) $\underline{X}$ 细分 X_1 和 X_2;

2) 如果 X^* 细分 X_1 和 X_2, 则 X^* 细分 $\underline{X}$.

定理 3 等价关系 $\underline{R} = R_1 \bigcap R_2$ 诱导出商集 $\underline{X}$, 且 $\underline{X} = \{w | w = a_i \bigcap b_j,\ a_i \in X_1,\ b_j \in X_2\}$.

证明 1) 先证 $\underline{R} = R_1 \bigcap R_2$ 诱导出商集 $\underline{X}$. $\underline{R} = R_1 \bigcap R_2 \Rightarrow \underline{R} \subseteq R_1$ 且 $\underline{R} \subseteq R_2$, 由定理 1 可知条件 1) 成立.

另外, 令 X^* 细分 X_1 和 X_2, 且 X^* 对应的等价关系为 R^*, 则 $R^* \subseteq R_1$ 且 $R^* \subseteq R_2$, 即 $R^* \subseteq R_1 \bigcap R_2 = \underline{R}$. 故由定理 1 可知条件 2) 成立.

2) 证明诱导的商集 $\underline{X} = \{w | w = a_i \bigcap b_j,\ a_i \in X_1,\ b_j \in X_2\}$.

$\forall x\underline{R}y \Leftrightarrow xR_1y$ 且 $xR_2y \Leftrightarrow \exists a_i \subseteq X_1,\ b_j \subseteq X_2$, 使得 $x, y \in a_i$ 且 $x, y \in b_j \Leftrightarrow x, y \in a_i \bigcap b_j \Leftrightarrow a_i \bigcap b_j \in \underline{X}$, 即 $\underline{X} = \{w | w = a_i \bigcap b_j,\ a_i \in X_1,\ b_j \in X_2\}$ 成立. □

显然, $\underline{R}$ 是 R_1 和 R_2 的下确界, 即论域 X_1 和 X_2 下确界合成对应的粒度即为 X_1 和 X_2 对应粒度的下确界. 因此, 通过取论域的下确界合成, 可实现从已知粗粒度到细粒度的转换.

1.2 上确界合成

定义 3 设 X_1 和 X_2 是非空集合 X 的两个商集, X_1 和 X_2 的上确界合成记为 $\overline{X}$, 它是 X 的划分, 满足以下条件:

1) X_1 和 X_2 细分 $\overline{X}$;

2) 如果 X_1 和 X_2 细分 X^*, 则 $\overline{X}$ 细分 X^*.

定理 4 等价关系 $\overline{R} = t(R_1 \bigcup R_2)$ 诱导出划分 $\overline{X}$, 其中 $t(R_1 \bigcup R_2)$ 表示 $R_1 \bigcup R_2$ 的传递闭包.

证明 已知 $\overline{R}$ 是 R_1 和 R_2 的传递闭包, 即 $R_1 \subseteq \overline{R}$, $R_2 \subseteq \overline{R}$ 成立. 由定理 1 可知条件 1 成立.

令 X_1 和 X_2 细分 X^*, 且 X^* 对应的等价关系为 R^*, 则 $R_1 \subseteq R^*$, $R_2 \subseteq R^*$ 成立. 又因为 $\overline{R}$ 是 R_1 和 R_2 的传递闭包, 故 $\overline{R} = t(R_1 \bigcup R_2) \subseteq R^*$. 由定理 1 可知条件 2) 成立. □

由定理 4 可知, $\overline{R}$ 是 R_1 和 R_2 的上确界. 因此, 通过取论域的上确界合成, 可实现从已知细粒度到粗粒度的转换. 根据保假原理[7], 若问题在合成空间 $\overline{X}$ 上无解, 则该问题在 X_1 和 X_2 上也无解; 而 X_1 和 X_2 细分 $\overline{X}$, 即在 X_1 和 X_2 上的计算要复杂, 若将求解 X_1 和 X_2 上的问题转换为求解 $\overline{X}$ 上的问题, 可有效降低计算复杂度.

1.3 合成论域之间的关系

通过对论域 X_1 和 X_2 进行下、上确界合成, 分别得到了粒度较 X_1 和 X_2 更细和更粗的论域 $\underline{X}$ 和 $\overline{X}$. 下面通过实例来讨论所满足的关系.

例 1 设论域 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 其两个商集 X_1 和 X_2 分别为

$$X_1 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\},$$

$$X_2 = \{\ \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}.$$

由下、上确界合成的定义可分别求得

$$\underline{X} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\},$$

$$\overline{X} = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}.$$

观察 $\underline{X}$ 和 $\overline{X}$ 易知, $\underline{X}$ 细分 $\overline{X}$. 事实上, 对于一般情况下论域 U 上任意给定的若干商集 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 它们的下确界合成 $\underline{X}$ 与上确界合成 $\overline{X}$ 之间的这种细分关系依然成立. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 对应的等价关系分别为 $R_1, R_2, \cdots, R_n$, 由定理 3 和定理 4 可知, $\underline{X}$ 与 $\overline{X}$ 对应的等价关系分别为 $R_1 \bigcap R_2 \bigcap \cdots \bigcap R_n$, $t(R_1 \bigcup R_2 \bigcup \cdots \bigcup R_n)$, 而且 $R_1 \bigcap R_2 \bigcap \cdots \bigcap R_n \subseteq R_1 \bigcup R_2 \bigcup \cdots \bigcup R_n \subseteq t(\subseteq R_1 \bigcup R_2 \bigcup \cdots \bigcup R_n)$, 故由定理 1 可知 $\underline{X}$ 细分 $\overline{X}$.

从粒计算的角度看, 论域合成提供了一种粒化的方法. 其中, 上确界合成实现了粒子的粗化, 而下确界合成则实现了粒子的细化. 通过这种粒化方式, 可以得到一个不同粒度层次的结构. 该结构的描述如图1所示.

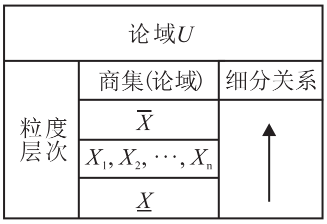

图 1　不同粒度层次的结构

1.4　各论域对应商空间之间的关系

对于给定的空间 $A=(U,f,T)$, 研究该空间上各商空间之间的关系是商空间理论的主要研究内容之一. 然而, 由于属性函数与特定应用相关, 为了简化讨论, 本文在讨论3种商空间关系时只涉及到论域和拓扑结构, 对应的商空间也只用论域和拓扑结构表示.

设 A 上两个商空间分别为 (X_1,T_1) 和 (X_2,T_2), 简称为商空间 X_1 和 X_2. X_1 和 X_2 的上、下确界论域合成分别为 $\overline{X}$ 和 $\underline{X}$. 直接计算 $\overline{X}$ 和 $\underline{X}$ 相对于 T 的商拓扑 $\overline{T}$ 和 $\underline{T}$, 可得到 A 的两个商空间 $(\overline{X},\overline{T})$ 和 $(\underline{X},\underline{T})$, 简称为商空间 $\overline{X}$ 和 $\underline{X}$. 总而言之, 本文得到了原空间 A 的3类商空间, 分别是商空间 X_1 和 X_2, 上确界合成空间 $\overline{X}$, 以及下确界合成空间 $\underline{X}$. 下面分别讨论这3种空间之间的关系.

定义 4　设 X_1 和 X_2 为论域 U 上的两个划分, 若 X_1 细分 X_2, 则称映射 $p: X_1 \to X_2$ 为粘合映射. 另外, 称 X_2 为 X_1 相对于该粘合映射的商集, 简称为商集.

定理 5　若设 $p: U \to [X]$ 表示从论域 U 到 $[X]$ 的一个自然映射, 则该映射是唯一的.

证明　若 p 是一个自然映射, 则 $[X]$ 是 U 的划分, 而划分 $[X]$ 唯一确定了 U 上的一个等价关系 R.

假设存在另外一个自然映射 $f: U \to [X]$, 即对于 U 内某个元素 x, 存在 $a,b \in [X](a \neq b)$, 使得 $x \in a$ 且 $x \in b$. 而根据划分的定义, 有 $x \in a$ 且 $x \in b$, 当且仅当 $a=b$, 因此假设不成立, 即由 U 到 $[X]$ 的自然映射是唯一的. □

定理 6　$\overline{X}$ 是 X_1 和 X_2 的商空间.

证明　要证明一个空间是另外一个空间的商空间, 只需证明它们满足商空间的定义[11]即可. 令 $p_1: U \to X_1, p_2: X \to \overline{X}$, $p_3: X_1 \to \overline{X}$, 则商拓扑

$$\overline{T}=\{\overline{U} \subset \overline{X} | p_2^{-1}(\overline{U}) \in T\}, \tag{1}$$

$$T_1=\{a_i \subset X_1 | p_1^{-1}(a_i) \in T\}. \tag{2}$$

1) 证明 $\overline{X}$ 是 X_1 和 X_2 的商集.

X_1 和 X_2 对应的等价关系分别为 R_1 和 R_2. $\overline{X}$ 对应的等价关系为 $t(R_1 \bigcup R_2)$, 而 $R_1 \subseteq R_1 \bigcup R_2 \subseteq t(R_1 \bigcup R_2)$, $R_2 \subseteq R_1 \bigcup R_2 \subseteq t(R_1 \bigcup R_2)$, 即 X_1 和 X_2 细分 $\overline{X}$, 因此 $\overline{X}$ 是 X_1 和 X_2 的商集.

2) 证明 $\overline{T}$ 是 T_1 和 T_2 的商拓扑.

先证 $\overline{T}$ 是 T_1 的商拓扑. 由商拓扑的定义可知, $\overline{T}$ 是 T_1 的商拓扑, 等价于

$$\forall \overline{U} \in \overline{T}(\overline{U} \subset \overline{X}),\ p_3^{-1}(\overline{U}) \in T, \tag{3}$$

即 $p_3^{-1}(\overline{U})$ 是 T_1 内的元素. 由式(2)可知, 式(3)等价于

$$p_1^{-1}(p_3^{-1}(\overline{U})) \in T, \tag{4}$$

而且

$$p_1^{-1}(p_3^{-1}(\overline{U}))=(p_1^{-1}p_3^{-1})(\overline{U})=(p_3p_1)^{-1}(\overline{U}). \tag{5}$$

令

$$(p_3p_1)^{-1}(\overline{U})=p_{2'}{}^{-1}(\overline{U}). \tag{6}$$

显然, $p_{2'}$ 表示一个从 U 到 $\overline{X}$ 的自然映射, 因此由定理5可知

$$p_{2'}{}^{-1}(\overline{U})=p_2{}^{-1}(\overline{U}). \tag{7}$$

又由式(1)可知

$$\forall \overline{U} \in \overline{T}(\overline{U} \subset \overline{X}),\ p_2^{-1}(\overline{U}) \in T, \tag{8}$$

从而

$$\forall \overline{U} \in \overline{T}(\overline{U} \subset \overline{X}),\ p_{2'}{}^{-1}(\overline{U}) \in T, \tag{9}$$

即式(3)成立, 因此 $\overline{T}$ 是 T_1 的商拓扑.

同理, 可证明 $\overline{T}$ 是 T_2 的商拓扑, 因此满足商空间的定义, 即 $\overline{X}$ 是 X_1 和 X_2 的商空间. □

定理 7　X_1 和 X_2 是 $\underline{X}$ 的商空间.

证明　令 $p_4: U \to \underline{X}$, $p_5: \underline{X} \to X_1$, 商拓扑

$$\underline{T}=\{\underline{U} \subset \underline{X}), p_4^{-1}(\underline{U}) \in T\}. \tag{10}$$

1) 证明 X_1 和 X_2 是 $\underline{X}$ 的商集.

X_1 和 X_2 对应的等价关系分别为 R_1 和 R_2. $\underline{X}$ 对应的等价关系为 $R_1 \bigcap R_2$. 而 $R_1 \bigcap R_2 \subseteq R_1$, $R_1 \bigcap R_2 \subseteq R_2$, 即 $\underline{X}$ 细分 X_1 和 X_2, 因此 X_1 和 X_2 是 $\underline{X}$ 的商集.

2) 证明 T_1 和 T_2 是 $\underline{T}$ 的商拓扑.

与定理6的证明相类似, 若将本定理中的映射 p_4, p_5 和 p_1 分别替代定理6证明中的 p_1, p_3 和 p_2, 则易得 T_1 和 T_2 是 $\underline{T}$ 的商拓扑, 因此 X_1 和 X_2 是 $\underline{X}$ 的商空间. □

定理 8　$\overline{X}$ 是 $\underline{X}$ 的商空间.

证明　令粘合映射 $p_6: \underline{X} \to \overline{X}$.

1) 证明 $\overline{X}$ 是 $\underline{X}$ 的商集.

$\overline{X}$ 和 $\underline{X}$ 对应的等价关系分别为 $t(R_1 \bigcup R_2)$, $R_1 \bigcap$

R_2. 而 $R_1 \bigcap R_2 \subseteq R_1 \bigcup R_2 \subseteq t(R_1 \bigcup R_2)$, 即 $\underline{X}$ 细分 $\overline{X}$, 因此 $\overline{X}$ 是 $\underline{X}$ 的商集.

2) 证明 $\overline{T}$ 是 $\underline{T}$ 的商拓扑.

同样, 若将本定理中的映射 p_4, p_6 和 p_2 分别替代定理6证明中的 p_1, p_3 和 p_2, 则易得 $\overline{T}$ 是 $\underline{T}$ 的商拓扑. 由此可得 $\overline{X}$ 是 $\underline{X}$ 的商空间. □

定理 9 设 (X_1, T_1) 和 (X_2, T_2) 分别为原空间 (U, T) 上的任意两个商空间, 若存在粘合映射 $p : X_1 \to X_2$, 则 (X_2, T_2) 是 (X_1, T_1) 的商空间.

证明 由于 $p : X_1 \to X_2$ 是粘合映射, X_1 细分 X_2, 因此 X_2 是 X_1 的商集. 下面证明 T_2 是 T_1 的商拓扑.

令自然映射 $p_1 : U \to X_1$, $p_2 : U \to X_2$, T 的商拓扑 T_1 和 T_2 可以表示为

$$T_1 = \{a_i \subset X_1 | p_1^{-1}(a_i) \in T\}, \tag{11}$$

$$T_2 = \{b_j \subset X_2 | p_2^{-1}(b_j) \in T\}. \tag{12}$$

观察定理6的证明, 若把本定理中的映射 p_1, p_2 和 p 分别替代定理6证明中的映射 p_1, p_2 和 p_3, 则易知 T_2 是 T_1 的商拓扑. 由此可得 (X_2, T_2) 是 (X_1, T_1) 的商空间. □

2 结 论

商空间的合成技术包括论域的合成、结构的合成以及属性函数的合成, 本文主要研究了论域的合成. 对于给定空间上的若干个商空间, 每个商空间对应一个粒度 (等价关系), 通过取这些粒度的上、下确界, 分别得到粒度更粗和更细的商空间, 从而实现了粒度的转换. 通过这种粒度的转换, 得到了3类商空间, 即给定的商空间, 取上确界粒度得到的商空间以及取下确界粒度得到的商空间. 在这些商空间基础上, 本文详细地讨论了它们之间的关系. 通过对这些基础理论的研究, 进一步探讨了原空间上不同商空间之间的关系, 丰富了商空间理论的相关知识.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets and information granularity[C]. Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, Amsterdam: North-Holland Press, 1996: 433-448.

[2] 王国胤, 张文修. 不同知识粒度下粗糙集的不确定性研究[J]. 计算机学报, 2008, 31(9): 1588-1598.
(Wang G Y, Zhang W X. Uncertainty of rough sets in different knowledge granularities[J]. Chinese J of Computers, 2008, 31(9): 1588-1598.)

[3] Al-Jonid Khalid, Wang J Y. A new fault classification model for prognosis and diagnosis in CNC machine[C]. The 25th Control and Decision Conf. Guiyang, 2013: 3538-3543.

[4] Wang J Y, Peng L L. Research on expression of rough equality sets[C]. 2008 IEEE Pacific-Asia Workshop on Computational Intelligence and Industrial Application. Washington D C: IEEE Computer Society, 2008: 337-341.

[5] Wang J Y, Zhou J. Research of reduct features in the variable precision rough set model[J]. Neurocomputing, 2009, 72(10-12): 2643-2648.

[6] Wang J Y, Deng L X, Zhang C. The research on computing dynamic reduct[C]. 2012 IEEE Int Conf on Granular Computing. Piscataway: IEEE Press, 2012: 504-509.

[7] Yao Y Y. A partition model of granular computing[J]. LNCS Trans on Rough Sets, 2004, 2(1): 232-253.

[8] 张燕平, 张铃, 吴涛. 不同粒度世界的描述法—— 商空间法[J]. 计算机学报, 2004, 3(27): 328-333.
(Zhang Y P, Zhang L, Wu T. The representation of different granular worlds: A quotient space[J]. Chinese J of Computers, 2004, 3(27): 328-333.)

[9] 张铃, 张钹. 基于商空间模型的粒度计算[J]. 软件学报, 2003, 14(4): 770-776.
(Zhang L, Zhang B. Granule computing based on quotient space model[J]. J of Software, 2003, 14(4): 770-776.)

[10] 王国胤, 张清华, 马希骜, 等. 知识不确定性问题的粒计算模型[J]. 软件学报, 2011, 22(4): 676-694.
(Wang G Y, Zhang Q H, Ma X W, et al. Granular computing models for knowledge uncertainty[J]. J of Software, 2011, 22(4): 676-694.)

[11] 张铃, 张钹. 问题求解理论及应用: 商空间粒度计算理论及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 6.
(Zhang L, Zhang B. Theory and applications of problem solving: Quotient space based granular computing[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2007: 6.)

[12] 徐峰, 张铃, 王伦文. 基于商空间理论的模糊粒度计算方法[J]. 模式识别与人工智能, 2004, 4(17): 424-429.
(Xu F, Zhang L, Wang L W. Fuzzy granular computing method based on quotient space theory[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2004, 4(17): 424-429.)

[13] 方世昌. 离散数学[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2002: 122.
(Fang S C. Discrete mathematics[M]. Xi'an: Xidian University Press, 2002: 122.)

(责任编辑: 滕 蓉)