

## 追踪器本体坐标系下航天器姿轨一体化控制律设计

廖飞<sup>1</sup>, 季海波<sup>1</sup>, 解永春<sup>2</sup>

(1. 中国科学技术大学自动化系, 合肥 230026; 2. 中国空间技术研究院北京控制工程研究所, 北京 100190)

**摘要:** 在追踪航天器本体坐标系下, 联合相对轨道动力学模型和四元素姿态动力学模型, 引入推进器配置矩阵, 建立六自由度姿态和轨道一体化模型. 该模型避免了控制输入向追踪器本体坐标系下的转换. 在此基础上, 采用输入-状态(ISS)稳定性原理, 在干扰输入信息完全未知的情况下, 设计了非线性鲁棒一体化控制律. 该控制律实现了对椭圆轨道上目标航天器的扰动抑制和跟踪, 具有较好的鲁棒性和跟踪性. 最后, 针对运行在椭圆轨道上的目标给出仿真结果, 表明了所提出的一体化控制律的可行性和有效性.

**关键词:** 姿轨一体化; 六自由度; 输入-状态稳定性; 鲁棒性

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Integrated orbit and attitude control for spacecraft in body fixed coordinate of chaser

LIAO Fei<sup>1</sup>, JI Hai-bo<sup>1</sup>, XIE Yong-chun<sup>2</sup>

(1. Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China; 2. Beijing Institute of Control Engineering, Chinese Academy of Space Technology, Beijing 100190, China. Correspondent: LIAO Fei, E-mail: lfhj1987@mail.ustc.edu.cn)

**Abstract:** A robust coupled six degree of the freedom integrated orbit and attitude control model is derived in the body fixed coordinate of the chaser spacecraft. Relative translation and attitude dynamics are both presented, and further the thruster layout is considered. This model avoids that the proposed control forces need to be transformed to the body fixed coordinate. Based on this model, a nonlinear robust integrated orbit and attitude control law is proposed by using input-to-state stability(ISS) in the presence of unknown bounded disturbance. Based on the obtained integrated control law, the desired force is produced to achieve robust tracking of a spacecraft target, and suppressing the unknown bounded disturbance. Finally, the algorithm is tested by using computer simulations against a spacecraft target in elliptic orbit.

**Keywords:** integrated orbit and attitude control; 6-DOF; input-to-state stability; robustness

### 0 引言

近年来, 更加复杂的航天器结构、任务和功能对航天器操作的自主性、精确性和快速性具有更高的要求. 相对轨道问题和相对姿态问题并不是简单的叠加, 而是具有耦合, 现有的姿态轨道联合技术大都局限于轨道和姿态分开控制, 并进行简单的叠加, 因此, 研究姿轨一体化建模和控制问题具有必要性.

初期航天器利用C-W方程相对动力学建模, 此后扩展为Lawden方程<sup>[1]</sup>. 近年来, 相对运动的六自由度建模问题得到广泛关注<sup>[2-3]</sup>. 文献[3]建立了航天器任意两点间的类C-W方程的姿轨耦合模型, 使得姿轨联合控制算法的设计成为研究热点. 文献[4]设计

了针对深空航天器的控制算法, 实现对时变的参考轨道进行跟踪并保持规划的相对姿态和相对位置. 文献[5]利用反馈线性化和Lyapunov稳定性定理针对在轨航天器的追踪问题设计一种控制策略. 另外, 由于现代控制理论的发展, 很多先进的控制方法被用于姿态轨道联合控制, 例如滑模控制<sup>[6]</sup>、 $\theta$ -D方法<sup>[7]</sup>、最优控制<sup>[8]</sup>、自适应控制<sup>[9]</sup>、同步控制<sup>[10]</sup>、输出反馈控制<sup>[11]</sup>和复合控制<sup>[12-13]</sup>等. 以上控制器的设计基于建立在目标航天器轨道坐标系下的姿态轨道耦合模型, 该模型需要将控制输入向追踪器本体坐标系内进行转换, 并且其中部分文献假设目标航天器运行在近似圆轨道上. 针对六自由度模型, 文献[14]给出了3种非线性

收稿日期: 2014-08-17; 修回日期: 2014-10-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273090); 国家973计划项目(2013CB733100).

作者简介: 廖飞(1983—), 男, 博士生, 从事非线性系统理论、飞行器控制的研究; 季海波(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与应用等研究.

控制解. 文献[15]从非线性相对轨道动力学方程和修正罗德里格斯参数表示的姿态运动学方程出发, 在追踪器本体坐标系下设计非线性同步控制律, 但仅是考虑姿态轨道的耦合, 而不进行推进器控制配置, 实际上并没有实现姿轨彻底的一体化, 因为姿态和轨道的执行器分开产生机动, 并不能满足同时高精度控制其相对于目标航天器的位置和姿态来实现目标逼近任务的要求.

本文从非线性相对轨道动力学和四元素描述的姿态运动学出发, 引入推进器配置矩阵, 针对运行在椭圆轨道上的目标航天器, 在追踪器本体坐标系下建立六自由度姿轨一体化模型. 该模型实现了追踪器本体坐标系下彻底的姿轨一体化. 消除了采用滑模控制而引起的抖振现象, 避免了将控制输入向本体坐标系的转换及求解复杂的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程. 将干扰力矩等视为范数有界的未知扰动, 采用输入-状态稳定性理论<sup>[13,16]</sup>, 设计了非线性鲁棒一体化控制律. 该一体化控制律在有界干扰完全未知的情况下, 仍然能够较好地实现对目标姿态和位置的跟踪, 并具有较好的鲁棒性和跟踪性. 在追踪器本体坐标系下建立非线性姿轨彻底一体化模型, 运用 ISS 稳定性原理设计了姿轨一体化控制律, 仿真结果表明了所提出一体化控制律的有效性和可行性.

## 1 航天器姿轨耦合动力学模型

### 1.1 相对轨道动力学模型

假设目标在椭圆轨道运行, 轨道要素已知. 设目标位置向量  $\mathbf{r}_t = [x_t, y_t, z_t]^T$ , 追踪器位置向量  $\mathbf{r}_c = [x_c, y_c, z_c]^T$ , 惯性坐标系中追踪航天器相对目标航天器的位置矢径表示为  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_c - \mathbf{r}_t$ . 在惯性坐标系中, 追踪航天器和目标航天器的轨道动力学方程为

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = -\mu \frac{\mathbf{r}_c}{r_c^3} + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{jc} + \Delta_c, \quad (1)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_t = -\mu \frac{\mathbf{r}_t}{r_t^3} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_{jt} + \Delta_t. \quad (2)$$

其中:  $r_c = \sqrt{(\mathbf{r}_t + \mathbf{r})(\mathbf{r}_t + \mathbf{r})}$ ;  $\mu$  为地心引力常数;  $\mathbf{F}_c$  为追踪器控制加速度;  $\mathbf{F}_t$  为目标有界的未知控制输入;  $\mathbf{F}_{jc}$  和  $\mathbf{F}_{jt}$  分别为追踪器和目标航天器所受到的  $J_2$  摄动加速度, 在惯性坐标系中的表达式为

$$\mathbf{F}_{jc} = -\frac{3J_2 R_e^2 \mu}{2r_c^2} \begin{bmatrix} x_c(1 - 5z_c^2/r_c^2) \\ y_c(1 - 5z_c^2/r_c^2) \\ z_c(3 - 5z_c^2/r_c^2) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{jt} = -\frac{3J_2 R_e^2 \mu}{2r_t^2} \begin{bmatrix} x_t(1 - 5z_t^2/r_t^2) \\ y_t(1 - 5z_t^2/r_t^2) \\ z_t(3 - 5z_t^2/r_t^2) \end{bmatrix},$$

这里  $R_e$  为地球赤道半径;  $\Delta_c$  和  $\Delta_t$  为除  $J_2$  摄动项外其他额外有界扰动. 定义

$$\mathbf{f} = -\mu \frac{\mathbf{r}_c}{r_c^3} + \mu \frac{\mathbf{r}_t}{r_t^3} + \mathbf{F}_{jc} - \mathbf{F}_{jt},$$

$$\Delta_r = \Delta_c - \Delta_t - \mathbf{F}_t.$$

由于  $\Delta_c$ 、 $\Delta_t$  和  $\mathbf{F}_t$  有界,  $\Delta_r$  有界, 将其看作有界扰动. 根据式(1)和(2), 有  $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f} + \mathbf{F}_c + \Delta_r$ . 定义  $\omega_c = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$  为追踪航天器本体坐标系中追踪航天器本体坐标系相对惯性坐标系的角速度矢量, 将  $\ddot{\mathbf{r}}$  投影在追踪航天器体坐标中可得

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\omega_c \times (\omega_c \times \mathbf{r}) - 2\omega_c \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{d\omega_c}{dt} \times \mathbf{r} + \mathbf{f} + \mathbf{F}_c + \Delta_r. \quad (3)$$

显然, 式(3)具有姿态信息的耦合. 追踪航天器的姿态动力学方程表示为

$$J_c \dot{\omega}_c + \omega_c^\times J_c \omega_c = \tau_c + \Delta_\tau. \quad (4)$$

其中:  $J_c$  为目标航天器转动惯量矩阵;  $\Delta_\tau$  为有界干扰力矩;  $\tau$  为控制力矩; 且有

$$\omega_c^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

将式(4)代入(3), 有

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\omega_c \times (\omega_c \times \mathbf{r}) - 2\omega_c \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + J_c^{-1} \omega_c^\times J_c \omega_c \times \mathbf{r} + \mathbf{f} + \mathbf{F}_c + \Delta_{\xi_1} - J_c^{-1} \tau_c \times \mathbf{r}, \quad (5)$$

其中  $\Delta_{\xi_1} = (J_c^{-1} \Delta_\tau) \times \mathbf{r} + \Delta_r$  为总的扰动. 由于  $\mathbf{r}$  有界, 总扰动  $\Delta_{\xi_1}$  有界. 假设期待的相对距离为  $\mathbf{r}_d$ , 相对速率为  $\dot{\mathbf{r}}_d$ , 定义误差  $\mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_d$ ,  $\eta_1 = \mathbf{e}$ ,  $\xi_1 = \dot{\mathbf{e}}$ , 有如下轨道动力学误差模型:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \xi_1, \\ \dot{\xi}_1 &= (J_c^{-1} \omega_c^\times J_c \omega_c) \times \mathbf{r} + \mathbf{f} + \mathbf{F}_c - 2\omega_c \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &\quad (J_c^{-1} \tau_c) \times \mathbf{r} - \omega_c \times (\omega_c \times \mathbf{r}) - \dot{\mathbf{r}}_d + \Delta_{\xi_1}. \end{aligned} \quad (6)$$

### 1.2 姿态相对动力学模型

采用四元素描述航天器姿态运动学方程为

$$\dot{\mathbf{q}} = E(\mathbf{q})\omega/2, \quad (7)$$

$$\dot{\omega} = -J^{-1}(\omega \times (J\omega)) + J^{-1}(\tau + \Delta_\tau). \quad (8)$$

其中: 姿态四元素向量表示为

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \hat{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad E(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{q}}^T \\ q_0 I_{3 \times 3} + \hat{\mathbf{q}}^\times \end{bmatrix},$$

姿态四元素为规范四元素向量, 且有  $q_0^2 + \hat{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{q}} = 1$ ; 角速率  $\omega \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ ; 控制力矩  $\tau \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ ; 转动惯量矩阵  $J \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ ;  $\Delta_\tau \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ . 因此, 目标航天器在其体坐标系中的姿态动力学方程为

$$\dot{\mathbf{q}}_t = E(\mathbf{q}_t)\omega_t/2, \quad (9)$$

$$\dot{\omega}_t = -J_t^{-1}(\omega_t \times (J_t \omega_t)) + J_t^{-1} \Delta_{\tau_t}. \quad (10)$$

其中:  $\omega_t$  为目标航天器体坐标系相对于惯性坐标系的角速度矢量;  $J_t$  为目标航天器转动惯量矩阵;  $\Delta_{\tau_t}$  包

含有界控制输入和其他有界扰动;  $\mathbf{q}_t$  为目标航天器的四元素向量. 同上, 追踪航天器的姿态动力学方程为

$$\dot{\mathbf{q}}_c = \frac{1}{2}E(\mathbf{q}_c)\omega_c, \quad (11)$$

$$\dot{\omega}_c = -J_c^{-1}(\omega_c \times (J_c\omega_c)) + J_c^{-1}(\tau_c + \Delta\tau). \quad (12)$$

符号的含义与目标航天器相似, 不再赘述. 追踪航天器相对于目标航天器的姿态四元素表示为

$$\mathbf{q}_r = (\mathbf{q}_t)^* \circ \mathbf{q}_c, \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} q_{r0} \\ \hat{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{t0} & q_{t1} & q_{t2} & q_{t3} \\ -q_{t1} & q_{t0} & q_{t3} & -q_{t2} \\ -q_{t2} & -q_{t3} & q_{t0} & q_{t1} \\ -q_{t3} & q_{t2} & -q_{t1} & q_{t0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{c0} \\ q_{c1} \\ q_{c2} \\ q_{c3} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

其中:  $(\mathbf{q}_t)^*$  为  $\mathbf{q}_t$  的共轭四元素,  $\mathbf{q}_r$  为相对四元素姿态矢量,  $\hat{\mathbf{q}}_r = [q_{r1}, q_{r2}, q_{r3}]^T$ . 定义追踪航天器相对于目标航天器的姿态角速度矢量为  $\omega_r$ , 有

$$\omega_r = \omega_c - C(\mathbf{q}_r)\omega_t, \quad (15)$$

其中  $C(\mathbf{q}_r)$  为目标航天器体坐标系至追踪航天器体坐标系的转换矩阵, 其一阶导数为

$$\dot{\omega}_r = \dot{\omega}_c - C(\mathbf{q}_r)\dot{\omega}_t + \omega_r \times (C(\mathbf{q}_r)\omega_t). \quad (16)$$

因为

$$\omega_r \times (C(\mathbf{q}_r)\omega_t) = \omega_r \times (\omega_c - \omega_r) = \omega_r \times \omega_c, \quad (17)$$

综合式(10)、(12)和(16), 有

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_r = & -J_c^{-1}(\omega_c \times (J_c\omega_c)) + C(\mathbf{q}_r)J_t^{-1}(\omega_t \times (J_t\omega_t)) + \\ & J_c^{-1}\tau_c + \omega_r \times \omega_c + \Delta\xi_2, \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $\Delta\xi_2 = J_c^{-1}\Delta\tau - C(\mathbf{q}_r)J_t^{-1}\Delta\tau_t$ . 定义  $\eta_2 = \mathbf{q}_r$  和  $\xi_2 = \omega_r$ , 有

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_2 = & \frac{1}{2}E(\eta_2)\xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = & C(\eta_2)J_t^{-1}(\omega_t \times (J_t\omega_t)) + \xi_2 \times \omega_c + \\ & J_c^{-1}\tau_c - J_c^{-1}(\omega_c \times (J_c\omega_c)) + \Delta\xi_2. \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$E(\eta_2) = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{q}}_r^T \\ q_{r0}I_{3 \times 3} + \hat{\mathbf{q}}_r^\times \end{bmatrix}, \quad E^T(\eta_2)E(\eta_2) = I_{3 \times 3}.$$

### 1.3 一体化模型建立

定义  $\eta = [\eta_1, \eta_2]^T$ ,  $\xi = [\xi_1, \xi_2]^T$ ,  $\Delta\xi = [\Delta\xi_1, \Delta\xi_2]^T$ ,  $F = [\mathcal{F}, \tau_c]^T$ ,  $\mathbf{F}_c = \mathcal{F}/m$ ,  $m$  为追踪器质量, 有

$$\dot{\eta} = F_\eta(\eta, t)\xi, \quad \dot{\xi} = F_\xi(\eta, \xi, t) + G_\xi F + \Delta\xi. \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} F_\eta(\eta, t) = & \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & E(\eta_2)/2 \end{bmatrix}, \\ G_\xi = & \begin{bmatrix} \frac{1}{m}I_{3 \times 3} & \mathbf{r}^\times J_c^{-1} \\ 0 & J_c^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$F_\xi(\eta, \xi, t)$  为

$$\begin{aligned} F_\xi(\eta, \xi, t) = & \begin{bmatrix} -\omega_c \times (\omega_c \times \mathbf{r}) - 2\omega_c \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + (J_c^{-1}\omega_c^\times J_c\omega_c) \times \mathbf{r} + \\ \mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}}_d - J_c^{-1}(\omega_c \times (J_c\omega_c)) + \\ C(\eta_2)J_t^{-1}(\omega_t \times (J_t\omega_t)) + \xi_2 \times \omega_c \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

可见, 耦合来源于位置和姿态独立控制间的变换. 为实现姿轨一体化设计, 需要对执行器在航天器上的安装位置和安装方向进行构型设计. 假设追踪器立方体形推进器带有6个如图1所示的推力器<sup>[6]</sup>, 每个推力器能够提供推力  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ), 定义推力向量  $u = [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6]^T$ , 因此控制输入  $F$  表示为

$$F = \begin{bmatrix} \mathcal{F} \\ \tau_c \end{bmatrix} = A_{\text{torque}}u, \quad (22)$$

其中

$$A_{\text{torque}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_2/2 & L_2/2 & 0 & 0 & L_3/2 & L_3/2 \\ -L_1/2 & -L_1/2 & L_3/2 & L_3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_2/2 & -L_2/2 & L_1/2 & L_1/2 \end{bmatrix}.$$

将式(22)代入(20), 有

$$\begin{aligned} \dot{\eta} = & F_\eta(\eta, t)\xi, \\ \dot{\xi} = & F_\xi(\eta, \xi, t) + G_\xi A_{\text{torque}}u + \Delta\xi. \end{aligned} \quad (23)$$

因此, 目标变为设计相应一体化控制律  $u$ , 以保证位置跟踪误差与姿态跟踪误差能够收敛.

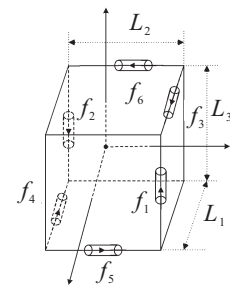


图1 推力器构型

## 2 一体化控制律设计

### 2.1 鲁棒非线性一体化控制研究

定义<sup>[14]</sup> 考虑一般系统  $\dot{x}, f : [0, \infty) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$  是关于  $t$  的分段连续函数, 关于  $x$  和  $u$  的局部 Lipschitz 函数, 若存在一个  $\mathcal{KL}$  类函数  $\beta$  和一个  $\mathcal{K}$  类函数  $\gamma$ , 使得对于任何初始状态  $x(t_0)$  和有界输入  $u(t)$ , 解  $x(t)$  对于所有  $t \geq t_0$  都存在, 且满足

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|\right), \quad \forall t \geq t_0, \quad (24)$$

则系统是输入-状态稳定 (ISS) 的.

式 (24) 表明, 任意有界输入  $u(t)$  (在实际应用中通常将其视为未知有界扰动输入) 下状态量  $x(t)$  均有界. 此外, 若输入  $u(t) \equiv 0$ , 则系统是一致渐近稳定的.

考虑一般性系统

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= F(\eta, t) + G(\eta, t)\xi, \\ \dot{\xi} &= P(\eta, \xi, t) + Q(\eta, \xi, t)u + \Delta. \end{aligned} \quad (25)$$

其中: 向量函数  $F: [0, \infty) \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $P: [0, \infty) \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ; 矩阵函数  $G: [0, \infty) \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $Q: [0, \infty) \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$ ; 有界扰动向量  $\Delta: [0, \infty) \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , 且设函数  $F(\eta, t)$ ,  $G(\eta, t)$ ,  $P(\eta, \xi, t)$  和  $Q(\eta, \xi, t)$  均在讨论的定义域内足够光滑;  $F(0, t) = 0$ . 对于系统 (25), 结合定义 1, 有如下定理成立.

**定理 1** 考虑系统 (25), 设矩阵函数  $G(\eta, t)$  和  $Q(\eta, \xi, t)$  均可逆, 则存在如下控制律:

$$\begin{aligned} u &= -Q^{-1}(\eta, \xi, t) \left[ \left( k_2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} \right) (\xi - \alpha(\eta, t)) + \right. \\ &\quad \left. G^T(\eta, t)(\eta - \eta_d) + P(\eta, \xi, t) - \frac{d\alpha}{dt} \right], \\ \alpha(\eta, t) &= -G^{-1}(\eta, t)[k_1(\eta - \eta_d) + F(\eta, t)]. \end{aligned} \quad (26)$$

其中:  $k_i > 0, i = 1, 2; \varepsilon > 0; \eta_d$  为给定的状态, 使得系统在无扰动时具有指数稳定性, 有扰动对于  $t \geq 0$  满足不等式

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} \tilde{\eta}(t) \\ \tilde{\xi}(t) \end{bmatrix} \right\| &\leq e^{-Kt} \left\| \begin{bmatrix} \tilde{\eta}(0) \\ \tilde{\xi}(0) \end{bmatrix} \right\| + \\ &\quad \varepsilon \sqrt{\frac{1 - e^{-2Kt}}{2K}} \left( \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|\Delta\| \right). \end{aligned} \quad (27)$$

这里:  $\tilde{\eta} = \eta - \eta_d, \tilde{\xi} = \xi - \alpha(\eta, t), K = \min\{k_1, k_2\}$ .

**证明** 考虑系统 (25), 选取如下虚拟控制律:

$$\alpha(\eta, t) = -G^{-1}(\eta, t)[k_1(\eta - \eta_d) + F(\eta, t)], \quad (28)$$

其中  $k_1 > 0$ . 作变换

$$\tilde{\eta} = \eta - \eta_d, \quad \tilde{\xi} = \xi - \alpha(\eta, t),$$

此时系统 (23) 转换为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\eta}} &= F(\eta, t) + G(\eta, t)(\tilde{\xi} + \alpha), \\ \dot{\tilde{\xi}} &= P(\eta, \xi, t) + Q(\eta, \xi, t)u + \Delta - \frac{d\alpha}{dt}. \end{aligned} \quad (29)$$

取 Lyapunov 函数

$$V(\tilde{\eta}, \tilde{\xi}) = \frac{1}{2} \tilde{\eta}^T \tilde{\eta} + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T \tilde{\xi}, \quad (30)$$

$V(\tilde{\eta}, \tilde{\xi})$  沿系统轨线的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{\eta}^T (F(\eta, t) + G(\eta, t)(\tilde{\xi} + \alpha)) + \tilde{\xi}^T \Delta + \\ &\quad \tilde{\xi}^T \left( P(\eta, \xi, t) + Q(\eta, \xi, t)u - \frac{d\alpha}{dt} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

将不等式

$$\tilde{\xi}^T \Delta \leq \frac{1}{2\varepsilon^2} \tilde{\xi}^T \tilde{\xi} + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\Delta\|^2, \quad \varepsilon > 0 \quad (32)$$

代入式 (31), 有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \\ &\quad \tilde{\xi}^T \left( G^T(\eta, t)\tilde{\eta} + P(\eta, \xi, t) + Q(\eta, \xi, t)u - \frac{d\alpha}{dt} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2\varepsilon^2} \tilde{\xi} \right) + \tilde{\eta}^T (F(\eta, t) + G(\eta, t)\alpha) + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\Delta\|^2. \end{aligned} \quad (33)$$

将控制律 (26) 和虚拟控制律 (28) 代入 (33), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -k_1 \tilde{\eta}^T \tilde{\eta} - k_2 \tilde{\xi}^T \tilde{\xi} + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\Delta\|^2 \leq \\ &\quad -2KV + \frac{\varepsilon^2}{2} (\|\Delta\|^2), \end{aligned} \quad (34)$$

其中  $K = \min\{k_1, k_2\}$ . 将式 (34) 两边乘以  $e^{2Kt}$ , 同时在时间区间  $[0, t]$  上积分, 有

$$\begin{aligned} V(t) &\leq e^{-2Kt} V(0) + \varepsilon^2 \frac{1 - e^{-2Kt}}{4K} \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\|\Delta_1\|), \\ &\quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (35)$$

对式 (35) 两边开方, 并将  $V$  代入得到不等式 (27). 因此, 当有界扰动  $\Delta = 0$  时, 存在状态量  $\tilde{\eta}(t) \rightarrow 0, \tilde{\xi}(t) \rightarrow 0$ . 由  $F(0, t) = 0$  可知, 当  $\eta \rightarrow 0$  时,  $\xi \rightarrow 0$ , 因此, 当扰动为零时, 闭环系统 (25) 具有指数稳定性.  $\square$

当有界扰动存在时, 由不等式 (27) 并结合定义 1 可得, 状态  $(\tilde{\eta}(t), \tilde{\xi}(t))$  对扰动  $\Delta$  具有输入状态稳定性, 进一步, 增大  $k_1, k_2$  或减小  $\varepsilon$  能够更好地抑制扰动, 使得状态量  $\tilde{\eta}(t), \tilde{\xi}(t)$  更趋近于零点. 显然, 控制律  $u(\eta, \xi, t)$  只与  $\eta, \xi$  和时间  $t$  相关, 因此, 当系统 (25) 已知时, 即能获得控制律  $u$  的解析式.

## 2.2 鲁棒姿轨一体化控制律设计

利用 ISS 稳定的定义和定理 1 的结论设计一体化控制律. 假设目标信息  $J_t, \omega_t$  和目标位置信息已知, 考虑系统 (23), 设计如下控制律:

$$\begin{aligned} u &= \\ &\quad -A_{\text{torque}}^{-1} G_{\xi}^{-1} \left( F_{\xi}(\eta, \xi, t) + \frac{1}{2\varepsilon^2} (\xi - \alpha(\eta, \xi, t)) + \right. \\ &\quad \left. k_2 (\xi - \alpha(\eta, \xi, t)) - k_1 \frac{dF_{\eta}^T(\eta, t)}{dt} (\eta - \eta_d) - \right. \\ &\quad \left. k_1 F_{\eta}^T(\eta, t) F_{\eta}(\eta, t) \xi + F_{\eta}^T(\eta, t) (\eta - \eta_d) \right), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\alpha(\eta, \xi, t) = -k_1 F_{\eta}^T(\eta, t) (\eta - \eta_d). \quad (37)$$

其中:  $k_i > 0, i = 1, 2; \varepsilon > 0$ . 由于  $\dot{\eta}$  的形式已知,  $F(\eta, t)$  对时间的导数均可知, 此处不再赘述.

**定理 2** 考虑姿轨一体化模型 (23) 中,  $F_{\eta}(\eta, t), G_{\xi}$  和  $A_{\text{torque}}$  均可逆, 将  $\Delta_{\xi}$  视为有界未知扰动输入, 则在一体化控制律 (36) 的作用下, 系统 (23) 对扰动具有输入-状态稳定性. 此外, 当扰动为零时, 系统 (23) 具有指数稳定性.

**证明** 考虑系统 (23), 定义如下变换:

$$\tilde{\eta} = \eta - \eta_d, \quad \tilde{\xi} = \xi - \alpha(\eta, \xi, t), \quad (38)$$

其中  $\eta_d = [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]^T$ . 取虚拟控制律 (37),

Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\eta}^T \tilde{\eta} + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^T \tilde{\xi}, \quad (39)$$

沿系统 (23) 轨线的变化率为

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \tilde{\eta}^T (F_\eta(\eta, t)(\tilde{\xi} + \alpha)) + \tilde{\xi}^T (F_\xi(\eta, \xi, t) + \\ & G_\xi A_{\text{torque}} u - k_1 F_\eta^T(\eta, t) F_\eta(\eta, t) \xi - \\ & k_1 \frac{dF_\eta^T(\eta, t)}{dt} (\eta - \eta_d)) + \tilde{\xi}^T \Delta_\xi. \end{aligned} \quad (40)$$

若令

$$F(\eta, t) = 0, \quad G(\eta, t) = F_\eta(\eta, t), \quad P(\eta, \xi, t) = F_\xi(\eta, \xi, t),$$

$$Q(\eta, \xi, t) = G_\xi A_{\text{torque}}, \quad \Delta = \Delta_\xi,$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -k_1 F_\eta^T(\eta, t) F_\eta(\eta, t) \xi - k_1 \frac{dF_\eta^T(\eta, t)}{dt} (\eta - \eta_d),$$

则式 (40) 与 (31) 相同, 后部分证明参见定理 1.  $\square$

综合定理 1 和定理 2, 相对位置和相对姿态向量  $\eta$  在一体化控制律 (36) 下, 对扰动具有输入-状态稳定性, 通过调节参数  $k_i, \varepsilon (i = 1, 2)$  可对扰动进行抑制, 进而使相对位置和相对姿态保持在更小的零点邻域内. 由于控制器本身能力的限制, 输入  $u$  受到限制, 假设其受如下饱和函数的约束:

$$\text{sat}_C(x) = \begin{cases} C, & x > C; \\ x, & |x| \leq C; \\ -C, & x < -C. \end{cases} \quad (41)$$

其中正常数  $C > 0$  代表输入饱和的水平. 根据文献 [17], 存在一个不变集  $\Omega = \{V(\tilde{\eta}, \tilde{\xi}) \leq \lambda\}, \lambda > 0$ , 使得系统在不变集  $\Omega$  内是输入状态稳定的, 即系统为局部输入状态稳定.

### 3 仿真算例

为了验证动力学方程、一体化控制律的可行性和有效性, 给出数学仿真. 首先介绍通用参数, 假设目标航天器运行在椭圆轨道上, 目标航天器的轨道参数如表 1 所示. 根据轨道学知识容易计算出  $t$  时刻目标航天器的绝对姿态矢量  $q_t$ 、位置矢量  $r_t$ 、角速度矢量  $\omega_t$  和位置矢量导数. 假设追踪航天器的期望状态为  $\eta_d = [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]^T$ , 追踪航天器的实际质量和转动惯量为

$$m = 10 \text{ kg}, \quad J_c = \begin{bmatrix} 1.7 & 0.4 & -1 \\ 0.4 & 2 & 0.6 \\ -1 & 0.6 & 1.8 \end{bmatrix}.$$

追踪航天器的姿态和位置跟踪误差为

$$\eta_1 = [80 \text{ m}, -20 \text{ m}, -100 \text{ m}]^T,$$

$$\xi_1 = [0 \text{ m/s}, 0 \text{ m/s}, 0 \text{ m/s}]^T,$$

$$\eta_2 = [0.5723, 0.65, 0.3, 0.4]^T,$$

$$\xi_2 = [-0.33 \text{ rad/s}, -0.15 \text{ rad/s}, -0.20 \text{ rad/s}]^T.$$

推进器的配置参数  $L_1 = L_2 = L_3 = 1 \text{ m}$ ; 追踪器受到

的干扰力矩为

$$\Delta_{\xi_1} = \left[ 0.2 \sin\left(\frac{t}{100}\right), 0.2 \cos\left(\frac{t}{100}\right), -0.2 \sin\left(\frac{t}{100}\right) \right]^T,$$

$$\Delta_{\xi_2} = \left[ 0.2 \cos\left(\frac{t}{100}\right), 0.2 \sin\left(\frac{t}{100}\right), -0.2 \cos\left(\frac{t}{100}\right) \right]^T.$$

将控制力限制在  $|f_i| \leq 20 \text{ N} (i = 1, 2, \dots, 6)$ , 采用式 (36) 所示的姿轨一体化控制律, 控制律参数为  $k_1 = k_2 = 1$  和  $\varepsilon = 0.1$ , 仿真结果如图 2~图 5 所示.

表 1 目标航天器轨道参数

参数	值	参数	值
长半轴 $a/\text{km}$	44400	近地点幅角 $w/\text{deg}$	100
轨道倾角 $i/\text{deg}$	5	平近点角 $M/\text{deg}$	100
升交点赤经 $\Omega/\text{deg}$	100	偏心率 $e$	0.005

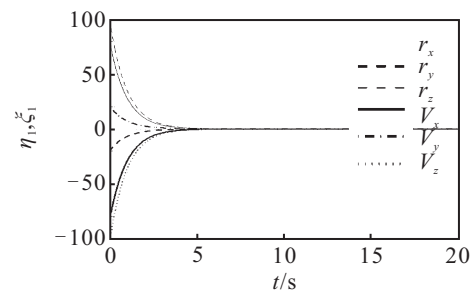


图 2 状态变量  $\eta_1$  和  $\xi_1$

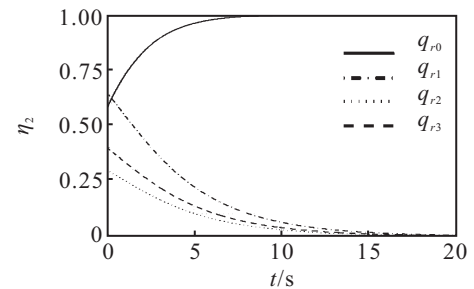


图 3 姿态四元素跟踪误差曲线

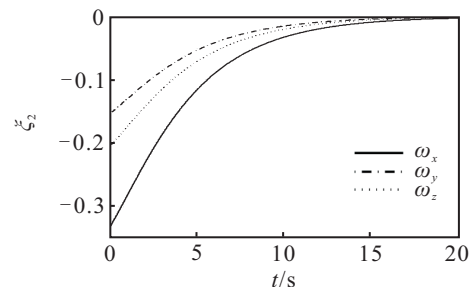


图 4 角速率跟踪误差曲线

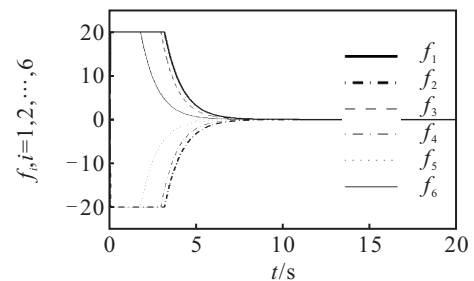


图 5 控制力曲线

当目标的位置和姿态快速变化时,控制力输入在初始阶段为使姿态误差和位置误差尽快零化,实现与目标的位置接近和姿态趋同,需要较大的控制输入,在仿真的开始阶段(约为10s内)追踪航天器的控制力处于饱和状态.由图2可见,在约5s处,位置和速度误差均趋于一个小的包含零点的邻域,具有输入状态稳定的特性,且控制精度分别小于0.0002m和0.0003m/s,跟踪器与目标完成交会,其位置变化与目标飞行器保持一致,即使存在未知有界额外扰动,在输入-状态控制律的作用下,也能实现对目标的跟踪和交会.由图3姿态四元素跟踪误差曲线可见,在约15s内,  $\mathbf{q}_r \rightarrow \mathbf{q}_d$ ,  $\mathbf{q}_d = [1, 0, 0, 0]^T$ ,表明由四元素描述的姿态跟踪器与目标相趋同,最后使得跟踪器与目标的位置及姿态都能达到同步状态.由图4可见,约在20s内,角速率误差趋于零,跟踪误差小于0.0001rad/s,保证了跟踪器与目标角速率的变化相同.综上,尽管受到未知有界扰动的干扰,但采用控制器(36)能够较好地抑制扰动,且一个更大的参数 $k_1$ 、 $k_2$ 或更小的 $\varepsilon$ 均能加快收敛速度,提高收敛精度,使其达到期望的状态矢量 $\eta_d$ .总之,位置与姿态误差都能以较高的速度和精度收敛,充分表明了一体化控制律(36)的可行性和有效性.

#### 4 结 论

在追踪航天器本体坐标系下,结合相对轨道动力学模型和姿态动力学模型,利用四元素描述方法和推进器配置矩阵,建立姿态轨道一体化模型.以此为基础,采用输入-状态方法设计了非线性鲁棒姿轨一体化控制律,该姿轨一体化控制律在具有未知有界扰动的情况下,仍具有较好的鲁棒性和跟踪性.仿真结果表明所设计的姿轨一体化控制律具有可行性和有效性.

#### 参考文献(References)

- [1] Inalhan G, Tillerson M, How J P. Relative dynamics and control of spacecraft formations in eccentric orbits[J]. *J of Guidance, Control and Dynamics*, 2002, 25(1): 48-59.
- [2] Shan J J. 6-DOF synchronization control for spacecraft formation flying[C]. *Proc of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conf and Exhibit*. Hawaii: AIAA, 2008: 64-68.
- [3] Segal S, Gurfil P. Effect of kinematic rotation-translation coupling on relative spacecraft translational dynamics[J]. *J of Guidance, Control and Dynamics*, 2009, 32(3): 1045-1050.
- [4] Krogstad T R, Gravdahl J T. 6-DOF mutual synchronization of formation flying spacecraft[C]. *The 45th IEEE Conf on Decision and Control*. San Diego: IEEE, 2006: 5706-5711.
- [5] Zhang Z G, Li J F. Orbit and attitude control of spacecraft formation flying[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, 29(1): 43-50.
- [6] Xu Y, Tatsch A, Fitz-Coy N G. Chattering free sliding mode control for a 6 DOF formation flying mission[C]. *Proc of AIAA Guidance, Navigation and Control Conf and Exhibit*. San Francisco, 2005: 1-10.
- [7] Xin M, Balakrishnan S N, Stansbery D T. Spacecraft position and attitude control with  $\theta$ -D technique[C]. *Proc of the 42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, Nevada, 2004: 540.
- [8] Xin M, Pan, H. Integrated nonlinear optimal control of spacecraft in proximity operations[J]. *Int J of Control*, 2010, 83(2): 347-363.
- [9] Pan H, Kapila V. Adaptive nonlinear control for spacecraft formation flying with coupled translational and attitude dynamics[C]. *Proc of the 40th IEEE Conf on Decision and Control*. Orlando: IEEE, 2001, 3: 2057-2062.
- [10] Wang P K C, Hadaegh F Y, Lau K. Synchronized formation rotation and attitude control of multiple free-flying spacecraft[J]. *J of Guidance, Control and Dynamics*, 1999, 22(1): 28-35.
- [11] Wong H, Pan H, Kapila V. Output feedback control for spacecraft formation flying with coupled translation and attitude dynamics[C]. *Proc of the American Control Conf*. Portland: IEEE, 2005: 2419-2426.
- [12] Sun H, Li S. Composite control method for stabilizing spacecraft attitude in terms of Rodrigues parameters[J]. *Chinese J of Aeronautics*, 2013, 26(3): 687-696.
- [13] Sun H, Li S, Fei S. A composite control scheme for 6DOF spacecraft formation control[J]. *Acta Astronautica*, 2011, 69(7): 595-611.
- [14] Kristiansen R, Nicklasson P J, Gravdahl J T. Spacecraft coordination control in 6DOF: Integrator backstepping vs passivity-based control[J]. *Automatica*, 2008, 44(11): 2896-2901.
- [15] 铁钰嘉, 杨伟, 岳晓奎. 航天器姿轨耦合非线性同步控制[J]. *计算机仿真*, 2012, 29(3): 126-131. (Tie Y J, Yang W, Yue X K. Spacecraft attitude and orbit coupled nonlinear synchronization control[J]. *Computer Simulation*, 2012, 29(3): 126-131.)
- [16] Khalil H K. *Nonlinear systems*[M]. Upper Saddle River: Prentice hall, 2002: 174-181.
- [17] Yan H, Ji H B. Guidance laws based on input-to-state stability and high-gain observers[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2012, 48(3): 2518-2529.