第 30 卷 第 10 期
Vol. 30 No. 10

控 制 与 决 策
*Control and Decision*

2015 年 10 月
Oct. 2015

**文章编号:** 1001-0920 (2015) 10-1820-08 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2014.1288

# 两种需求情形下损失规避零售商的最优订货-定价联合决策

张 鹏, 张 杰, 马 俊

(对外经济贸易大学 国际商学院，北京 100029)

**摘 要:** 在加法需求情形和乘法需求情形下研究损失规避零售商的最优订货-定价联合决策问题. 基于前景理论, 建立损失规避零售商的期望效用函数, 并通过模型推导得到损失规避零售商的最优订货-定价决策的关系表达式, 发现库存因子满足特定条件时, 最优决策的关系表达式一定存在. 同时, 讨论零售商的损失规避行为对最优决策和期望效用的影响. 通过数值算例, 验证了所得结论的有效性, 发现商品定价较高时, 损失规避行为驱使零售商采取保守的订货策略, 使得最优订货量趋于均值需求.

**关键词:** 需求依赖价格；损失规避；报童模型

**中图分类号:** F274；F224.3 **文献标志码:** A

# Joint decision-making of order quantities and pricing for loss-averse retailers with two demand cases

*ZHANG Peng*, *ZHANG Jie*, *MA Jun*

(Business School，University of International Business and Economics，Beijing 100029，China．Correspondent: ZHANG Peng，E-mail: marksummer12@163.com)

**Abstract:** This paper studies the joint decision-making of order quantities and pricing for loss-averse retailers with the price-dependent demand which is affected additively or multiplicatively by a random term. Based on the prospect theory, the expected utility function of the loss-aversion retailer is expressed, and the expressions of optimal order quantities and pricing and its sufficient condition of existence are deduced. Finally, numerical examples are given to illustrate the theoretical results of the proposed models. It is also given that loss-aversion behavior makes the retailer take conservative quantity polices that make order quantity closed to mean demand, and the loss-aversion behavior has an effect on optimal decisions and expected utility.

**Keywords:** price-dependent demand；loss-aversion；newsvendor model

## 0 引 言

随着市场竞争的加剧和科技的快速发展, 越来越多的商品具有易逝品或季节性产品 (如时装、数码等产品) 的特点, 产品生命周期不断缩短, 利用报童模型管理此类产品是不错的选择. 传统的报童模型是指零售商在单个销售周期内面对外生的随机需求, 通过期望利润最大化原则来确定最优订货量. 报童模型一直是库存管理研究中的经典问题, 同时在生产、服务、管理、金融等领域有广泛的应用, 这一问题及其一系列扩展问题也得到了充分的研究[1]. Qin 等[2]从消费者需求、供应商的定价与库存策略以及购买者风险偏好等3方面对报童模型研究作了细致回顾和分析, 并指出了未来的研究方向.

传统报童问题的研究大都将销售价格等因素视作外生变量, 不考虑价格因素对于商品需求的影响. 事实上, 零售商可能通过调整商品价格去影响商品的市场需求, 即市场需求依赖于商品的价格. 因此, Whitin[3]首先在报童问题中将销售价格看作内生变量, 建立了受价格影响的需求函数, 并且得到了最优订货量与最优销售价格的表达式. 此后, 零售商的定价与订购联合决策问题便引起了学术界的广泛兴趣. Mills[4]和 Karlin 等[5]分别使用线性加函数 ($D(p,\varepsilon) = y(p)+\varepsilon$, $y(p) = a-bp$) 和弹性乘函数 ($D(p,\varepsilon) = y(p)\varepsilon$, $y(p) = ap^{-b}$) 描述依赖销售价格的随机需求;

**收稿日期:** 2014-08-21；**修回日期:** 2014-11-27.

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(71171053)；教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-10-0336)；国家自然科学基金青年科学基金项目(71301025).

**作者简介:** 张鹏(1979−), 男, 博士生, 从事运营与供应链管理的研究；张杰(1957−), 男, 教授, 博士生导师, 从事企业运营与供应链管理、企业流程管理以及项目管理等研究.

Petruzzi 等[6]总结完善了销售价格作为内生变量的单周期报童模型理论, 分别研究了需求关于销售价格的加法函数形式和乘法函数形式下的最优解及其存在条件, 并考虑了多周期随机库存问题; 刘玉霜等[7]研究了需求受销售价格影响并且带有缺货惩罚的单周期报童模型问题, 证明了最优决策的存在性及唯一性的充分条件, 并具体给出了最优决策的解析表达式.

Kahneman 等[8]提出的 "前景理论" 是指人在作决策时并非基于自己的总财富, 而是基于自身财富的变化量. 应用"前景理论"描述供运作管理中决策者的损失规避行为的研究也得到了越来越多的关注. Schweitzer 等[9]最早基于报童模型研究了损失规避决策者的决策问题, 发现损失规避决策者的订货数量严格小于风险中性的决策者的订货数量, 而且会随着损失规避程度的增加而降低; Wang 等[10]在前文的基础上考虑了存在缺货成本时的情况; Nagarajan 等[11]通过分析实证数据, 发现前景理论无法解释实验数据, 得到前景理论下报童最优订货量与效用参数、权重参数的关系, 通过对比分析前景理论下报童与经典报童得到了他们最优订货量之间的关系. 国内学者对基于报童模型的损失规避决策者的决策行为的研究也取得了许多有意义的成果. 索寒生等[12]基于前景理论研究了损失厌恶零售商的决策行为, 得出收益共享契约需要强制执行以及批量折扣契约会自动执行; 文平[13]研究了损失规避报童的最优订货策略, 并进行了比较静态分析; 柳键等[14]讨论了损失规避零售商订货量优化模型, 并分析了损失规避零售商的订货量与损失规避系数、零售价格、采购价格等关系. 以上考虑损失规避决策者决策行为的研究文献都是考虑需求是外生变量, 并不受商品的市场价格影响.

本文应用以上文献中被广泛采用的前景理论来刻画零售商的损失厌恶行为, 研究损失规避零售商面临随机市场需求时的最优决策. 不同以往的研究, 本文假设零售商面临的市场需求受商品价格因素的影响, 分别讨论零售商面临加法随机需求和乘法随机需求时的最优订货-定价联合决策问题. 通过理论分析, 本文得到了最优决策订货与最优决策定价的表达式, 给出了表达式存在的充分条件; 并通过算例分析, 讨论了损失规避行为对零售商的最优订货量、最优订货价格以及期望收益与期望效用的影响.

## 1　问题说明与模型描述

本文基于报童模型, 考虑需求依赖价格情形下的损失规避零售商最优订货与定价联合决策模型. 假设零售商面对受销售价格影响的随机市场需求 $D(p,\varepsilon)$, 在销售季节来临之前, 零售商依据自身期望效用最大化原则, 同时决定最优的零售价格和订购数量. 令 $p$ 为单位商品的进货价格, 销售季节末该产品的残值为 $s$, 不失一般性, $s<w<p$. 零售商面临的需求噪音 $\varepsilon$ 表示实际需求与均值需求的误差, 是一个非负且连续的随机变量, 假设其期望为 $\mu$, 概率密度函数和累积分布函数分别为 $f(\cdot)$ 和 $F(\cdot)$, 其中 $F(\cdot)$ 为连续可微的单调递增函数. 将需求噪声 $\varepsilon$ 的失败率函数 (FR) 定义为

$$h(\varepsilon)=f(\varepsilon)/\bar{F}(\varepsilon),$$

其中 $\bar{F}(\varepsilon)=1-F(\varepsilon)$.

广义失败率函数 (GFR) 为

$$g(\varepsilon)=\varepsilon h(\varepsilon)=\varepsilon f(\varepsilon)/\bar{F}(\varepsilon).$$

如果 $h(\varepsilon)$ (或 $g(\varepsilon)$) 是 $\varepsilon$ 的增函数, 则称 $\varepsilon$ 具有递增失败率 (IFR) (或递增广义失败率 (IGFR)), 事实上很多分布都具有 IFR (或 IGFR), 如正态分布、均匀分布、伽玛分布和威布尔分布等.

对于季节性产品而言, Wang 等[15]认为不考虑产品的残值或惩罚成本是合理的, 因此本文不考虑因缺货而带来的惩罚成本.

基于以上假设, 可以给出零售商的收益函数为

$$\begin{aligned}\mathit{\Pi}(q,p)=&\,p\cdot\min\{q,D\}-wq+s(q-D)^+=\\&(p-w)q-(p-s)(q-D)^+=\\&\begin{cases}(p-s)D-(w-s)q,\ D<q;\\(p-w)q,\ D>q.\end{cases}\end{aligned}$$

其中 $(\cdot)^+=\max(\cdot,0)$.

损失规避描述了决策者对待损失的厌恶程度超过了同样大小的收益. 针对损失规避, 本文应用前景理论描述零售商的损失规避特性. 采用在金融、经济以及组织行为学等领域中广泛使用的分段线性函数来刻画零售商的损失厌恶, 其效用函数为[10]

$$U(\mathit{\Pi})\begin{cases}\mathit{\Pi},\ \mathit{\Pi}>0;\\\lambda\mathit{\Pi},\ \mathit{\Pi}<0.\end{cases}$$

其中: $\mathit{\Pi}$ 表示零售商的期望收益; $\lambda$ 表示零售商的损失规避系数 ($\lambda\geqslant 1$), $\lambda$ 值越大, 意味着对损失的规避程度越高, 反之意味着对损失的规避程度越低.

## 2　模型分析

对于需求依赖价格的报童模型, Petruzzi 等[6]指出以往研究中常见的需求函数形式主要有两种: 加法需求和乘法需求. 加法需求的形式为

$$D(p,\varepsilon)=y(p)+\varepsilon,$$

其中 $y(p)=a-bp\,(a>0,b>0)$ 表示需求对于销售价格的依赖关系, $p$ 为商品的销售价格. 同理, 乘法需求的形式为

$$D(p,\varepsilon)=y(p)\varepsilon,$$

其中 $y(p)=ap^{-b}\,(a>0,b>1)$, $a$ 表示市场规模, $b$ 表示市场需求的价格弹性指数. 假设该产品的需求是富有弹性的, 即 $b>1$. 本文分别采用上述两种形式的需

求函数来研究损失规避报童问题.

### 2.1 加法需求的损失规避报童模型

对于加法需求中的线性函数 $y(p)=a-bp$, 定义库存因子 $z=q-y(p)$, 表示订货量与均值需求之间的误差, 这时零售商的决策问题转化为确定销售价格 $p$ 与库存因子 $z$. 则零售商的收益函数可以改写为

$$\Pi(z,p)=\begin{cases}p(y(p)+\varepsilon)-w(y(p)+z)+s(z-\varepsilon),\ \varepsilon<z;\\(p-w)(y(p)+z),\ \varepsilon>z.\end{cases}\tag{1}$$

令式 (1) 等于 0, 当 $\varepsilon\leqslant z$ 时, 令

$$D_1(p)=\frac{(w-s)(z+y(p))}{p-s}.$$

若 $D(p)\in[0,D_1(p)]$, 则零售商的收益为负; 若 $D(p)\in[D_1(p),z]$, 则零售商的收益为正. 当 $\varepsilon>z$ 时, 零售商的收益总是为正.

使用损失规避模型, 零售商的期望效用可表示为

$$E[U(\Pi(z,p))]=E(\Pi(z,p))+(\lambda-1)\int_0^{D_1-y(p)}[p(y(p)+\varepsilon)-w(y(p)+z)+s(z-\varepsilon)]f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon,\tag{2}$$

其中

$$E(\Pi(z,p))=(p-w)[y(p)+z]-(p-s)\int_0^z F(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon.$$

$E[U(\Pi(z,p))]$ 具有如下的经济学意义: 损失规避零售商的期望效用是零售商在风险中性条件下获得的期望收益与在订货过量时所造成的更大 $(\lambda-1\geqslant 0)$ 心理损失之和.

损失规避零售商所选择的最优库存因子和销售价格 $(z^*,p^*)$, 应当使得零售商的期望效用 $E[U(\Pi(z,p))]$ 达到最大化. 因此, 根据极值存在的必要条件, 令 $E[U(\Pi(z,p))]$ 分别关于 $z$ 和 $p$ 求一阶偏导数, 并令它们等于 0, 得

$$G(z,p)=\partial E[U(\Pi(z,p))]/\partial z=(p-s)\overline{F}(z)-(w-s)-(\lambda-1)(w-s)F(D_1-y(p))=0,\tag{3}$$

$$H(z,p)=\frac{\partial E[U(\Pi(z,p))]}{\partial p}=(a+bw-2bp+z)-\int_0^z F(\varepsilon)d\varepsilon+(\lambda-1)\Big\{[D_1-(p-w)b]F(D_1-y(p))-\int_0^{D_1-y(p)}F(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\Big\}=0.\tag{4}$$

**定理 1** 加法需求情形下的损失规避报童模型. 若

$$h^{-1}\Big(\frac{w-s}{2b(p^*-s)^2}\Big)\leqslant z^*\leqslant\frac{b(p^*-s)(2p^*-s-w)}{w-s}-(a-bp^*),$$

且 $\varepsilon$ 具有 IFR 时, 零售商的期望效用函数 $E[U(\Pi(z,p))]$ 在 $(z^*,p^*)$ 的 Hessian 矩阵是负定的, 则满足一阶条件式 (3) 和 (4) 的最优库存因子和销售价格 $(z^*,p^*)$ 可使得损失规避的零售商的期望效用达到最大.

**证 明** 令 $H_{E[U(\Pi(z,p))]}$ 表 示 $E[U(\Pi(z,p))]$ 的 Hessian 矩阵, 要证明 $H_{E[U(\Pi(z,p))]}$ 是负定的, 只需证明如下两个条件:

1) $\dfrac{\partial^2E[U(\Pi(z,p))]}{\partial z^2}<0$;

2) $|H_{E[U(\Pi(z,p))]}|_{(z^*,p^*)}>0$.

为了验证条件 1), 对式 (2) 求 $z$ 的二阶偏导, 得

$$\frac{\partial^2E[U(\Pi(z,p))]}{\partial z^2}=-(p-s)f(z)-(\lambda-1)\frac{(w-s)^2f(D_1-y(p))}{p-s}<0;$$

为了验证条件 2), 对式 (2) 求 $z$、$p$ 的混合偏导, 得

$$\frac{\partial^2E[U(\Pi(z,p))]}{\partial z\partial p}=\overline{F}(z)-(\lambda-1)\frac{(w-s)[(p-w)b-D_1]f(D_1-y(p))}{p-s};$$

对式 (2) 求 $p$ 的二阶偏导, 得

$$\frac{\partial^2E[U(\Pi(z,p))]}{\partial p^2}=-2b+(\lambda-1)\Big\{-2bF(D_1-y(p))-\frac{[D_1-(p-w)b]^2f(D_1-y(p))}{p-s}\Big\}.$$

则

$$|H_{E[U(\Pi(z,p))]}|_{(z^*,p^*)}=\begin{vmatrix}-(p-s)f(z)-(\lambda-1)\dfrac{(w-s)^2f(D_1-y(p))}{p-s} & \overline{F}(z)-(\lambda-1)\dfrac{(w-s)[(p-w)b-D_1]f(D_1-y(p))}{p-s}\\ \overline{F}(z)-(\lambda-1)\dfrac{(w-s)[(p-w)b-D_1]f(D_1-y(p))}{p-s} & \begin{gathered}-2b+(\lambda-1)\Big\{-2bF(D_1-y(p))-\\\dfrac{[D_1-(p-w)b]^2f(D_1-y(p))}{p-s}\Big\}\end{gathered}\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}-(p-s)f(z)-(\lambda-1)\dfrac{(w-s)^2f(D_1-y(p))}{p-s} & \overline{F}(z)-(\lambda-1)\dfrac{(w-s)[(p-w)b-D_1]f(D_1-y(p))}{p-s}\\ \overline{F}(z)+\dfrac{(p-s)[(p-w)b-D_1]f(z)}{w-s} & -\dfrac{2b(p-s)+[(p-w)b-D_1]\overline{F}(z)}{w-s}\end{vmatrix}=$$

$$\Big[\frac{2b(p-s)^2f(z)}{w-s}-\overline{F}(z)\Big]\overline{F}(z)+(\lambda-1)\times$$
$$\frac{2(w-s)[(2p-w-s)b-D_1]f(D_1-y(p))\overline{F}(z)}{p-s}+$$
$$(\lambda-1)[(p-w)b-D_1]^2f(z)f(D_1-y(p)).$$

因为 $(z^*,p^*)$ 满足
$$h^{-1}\Big(\frac{w-s}{2b(p^*-s)^2}\Big)\leqslant z^*,$$
且 $\varepsilon$ 具有 IFR, 所以
$$\frac{2b(p-s)^2f(z)}{w-s}-\overline{F}(z)\geqslant 0.$$
又由于
$$z^*\leqslant\frac{b(p^*-s)(2p^*-s-w)}{w-s}-(a-bp^*),$$
可以保证以上 $|H_{E[U(\Pi(z,p))]}|_{(z^*,p^*)}$ 运算结果中的第 2 项大于等于 0. 所以
$$|H_{E[U(\Pi(z,p))]}|_{(z^*,p^*)}>0.$$
这说明 $H_{E[U(\Pi(z,p))]}$ 在 $(z^*,p^*)$ 是负定的.

另外, 由式 (3) 易得
$$p=$$
$$w+(p-s)F(z)+(\lambda-1)(w-s)F(D_1-y(p))\geqslant w,$$
可保证零售商的最优价格不小于进货价格.

综上所证, 当满足
$$h^{-1}\Big(\frac{w-s}{2b(p^*-s)^2}\Big)\leqslant$$
$$z^*\leqslant\frac{b(p^*-s)(2p^*-s-w)}{w-s}-(a-bp^*)$$
时, 损失规避的零售商在 $(z^*,p^*)$ 效用达到最大. □

### 2.2 乘法需求的损失规避报童模型

乘法需求模式下, $y(p)$ 为幂函数形式, $y(p)=ap^{-b}$ $(a>0,b>1)$. 借鉴 Wang[15]的研究, 定义库存因子 $z=q/y(p)$, 表示订货量与均值需求之间的比例关系, 则相应的订货量可变形为 $q=zy(p)$. 这时零售商的决策问题转化为确定销售价格 $p$ 和库存因子 $z$, 则零售商的收益函数可改写为
$$\Pi(z,p)=\begin{cases}y(p)[(p-s)\varepsilon-(w-s)z],\ \varepsilon<z;\\ y(p)(p-w)z,\ \varepsilon>z.\end{cases}\tag{5}$$

令式 (5) 等于 0, 当 $\varepsilon\leqslant z$ 时, 令
$$D_2(p)=\frac{(w-s)z}{p-s}.$$
若 $D(p)\in[0,D_2(p)]$, 则零售商的收益为负; 若 $D(p)\in[D_2(p),z]$, 则零售商的收益为正. 当 $\varepsilon>z$ 时, 零售商的收益总是为正.

使用损失规避模型, 零售商的期望效用可表示为
$$E[U(\Pi(z,p))]=$$
$$E(\Pi(z,p))+(\lambda-1)\int_0^{D_2}y(p)[(p-$$
$$s)\varepsilon-(w-s)z]f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon,\tag{6}$$
其中
$$E(\Pi(z,p))=y(p)\Big[(p-w)z-(p-s)\int_0^zF(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\Big].$$
$E[U(\Pi(z,p))]$ 具有如下的经济学意义: 损失规避零售商的期望效用是零售商在风险中性条件下获得的期望利润与在订货过量时所造成的更大 $(\lambda-1\geqslant 0)$ 心理损失之和.

损失规避零售商所选择的最优库存因子和销售价格 $(z^*,p^*)$ 应当使得零售商的期望效用 $E[U(\Pi(z,p))]$ 达到最大化. 因此, 根据极值存在的必要条件, 令 $E[U(\Pi(z,p))]$ 分别关于 $z$ 和 $p$ 求一阶偏导数, 并令它们等于 0, 得
$$\frac{\partial E[U(\Pi(z,p))]}{\partial z}=y(p)[(p-s)\overline{F}(z)-(w-s)-$$
$$(\lambda-1)(w-s)F(D_2)]=0,$$
$$\frac{\partial E[U(\Pi(z,p))]}{\partial p}=$$
$$-ap^{-b-1}[(bp-bw-p)z-(bp-bs-$$
$$p)\int_0^zF(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon-(\lambda-1)(bp-bs-$$
$$p)\int_0^{D_2}F(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon-(\lambda-1)pD_2F(D_2)]=0.$$
显然, $y(p)$ 和 $-ap^{-b-1}$ 都不可能为 0, 因此极值存在的必要条件为
$$K(z,p)=(p-s)\overline{F}(z)-(w-s)-$$
$$(\lambda-1)(w-s)F(D_2)=0,\tag{7}$$
$$L(z,p)=(bp-bw-p)z-(bp-bs-p)\int_0^zF(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon-$$
$$(\lambda-1)(bp-bs-p)\int_0^{D_2}F(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon-$$
$$(\lambda-1)pD_2F(D_2)=0.\tag{8}$$

**定理 2**　乘法需求情形下的损失规避报童模型. 若 $(z^*,p^*)$ 满足
$$g(z^*)\geqslant\frac{p(bp^*-bs-p^*)}{(b-1)(p^*-s)^2b}>0,$$
零售商的期望效用函数 $E[U(\Pi(z,p))]$ 在 $(z^*,p^*)$ 的 Hessian 矩阵是负定的, 则满足式 (7) 和 (8) 的最优库存因子和销售价格 $(z^*,p^*)$ 可使得损失规避的零售商的期望效用达到最大.

**证 明**　令 $H_{E[U(\Pi(z,p))]}$ 表示 $E[U(\Pi(z,p))]$ 的 Hessian 矩阵, 要证明 $H_{E[U(\Pi(z,p))]}$ 是负定的, 只需证明如下两个条件:

1) $\dfrac{\partial^2E[U(\Pi(z,p))]}{\partial z^2}<0$;

2) $|H_{E[U(\Pi(z,p))]}|_{(z^*,p^*)}>0$.

为了验证条件 1), 对式 (6) 求 $z$ 的二阶偏导, 得
$$\frac{\partial^2E[U(\Pi(z,p))]}{\partial z^2}=$$
$$-y(p)[(p-s)f(z)+(\lambda-1)\frac{(w-s)^2f(D_2)}{p-s}<0;$$
为了验证条件 2), 对式 (6) 求 $z$、$p$ 的混合偏导, 得

$$\frac{\partial^2 E[U(\varPi(z,p))]}{\partial z\partial p}=$$
$$-ap^{-b-1}\Big[(bp-bs-p)\overline{F}(z)-b(w-s)-(\lambda-1)(w-s)bF(D_2)-(\lambda-1)\frac{(w-s)pD_2f(D_2)}{p-s}\Big].$$

对式 (6) 求 $p$ 的二阶偏导, 得
$$\frac{\partial^2 E[U(\varPi(z,p))]}{\partial p^2}=$$
$$ap^{-b-2}\Big\{bz[(b-1)p-(b+1)w]-b[(b-1)p-(b+1)s]\int_0^z F(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon-(\lambda-1)b[(b-1)p-(b+1)s]\int_0^{D_2} F(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon-2(\lambda-1)bpD_2F(D_2)-(\lambda-1)\frac{p^2D_2^2f(D_2)}{p-s}\Big\}.$$

则

$$|H_{E[U(\varPi(z,p))]}|_{(z^*,p^*)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 E[U(\varPi(z,p))]}{\partial z^2} & \dfrac{\partial^2 E[U(\varPi(z,p))]}{\partial z\partial p}\\ \dfrac{\partial^2 E[U(\varPi(z,p))]}{\partial z\partial p} & \dfrac{\partial^2 E[U(\varPi(z,p))]}{\partial p^2}\end{vmatrix}=$$
$$a^2p^{-2b-2}\begin{vmatrix}(p-s)f(z)+(\lambda-1)\dfrac{(w-s)^2f(D_2)}{p-s} & \begin{matrix}(bp-bs-p)\overline{F}(z)-b(w-s)-(\lambda-1)(w-\\ s)bF(D_2)-(\lambda-1)\dfrac{(w-s)pD_2f(D_2)}{p-s}\end{matrix}\\ \begin{matrix}(bp-bs-p)\overline{F}(z)-b(w-s)-\\ (\lambda-1)(w-s)bF(D_2)-\\ (\lambda-1)\dfrac{(w-s)pD_2f(D_2)}{p-s}\end{matrix} & \begin{matrix}bz[(b-1)p-(b+1)w]-b[(b-1)p-(b+1)s]\\ \int_0^z F(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon-(\lambda-1)b[(b-1)p-(b+1)s]\int_0^{D_2} F(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon-\\ 2(\lambda-1)bpD_2F(D_2)-(\lambda-1)\dfrac{p^2D_2^2f(D_2)}{p-s}\end{matrix}\end{vmatrix}=$$
$$a^2p^{-2b-2}\begin{vmatrix}(p-s)f(z)+(\lambda-1)\dfrac{(w-s)^2f(D_2)}{p-s} & -\Big[p\overline{F}(z)+(\lambda-1)\dfrac{(w-s)pD_2f(D_2)}{p-s}\Big]\\ -\Big[p\overline{F}(z)+(\lambda-1)\dfrac{(w-s)pD_2f(D_2)}{p-s}\Big] & \dfrac{(b-1)pbz(p-s)\overline{F}(z)}{bp-bs-p}+(\lambda-1)\dfrac{p^2D_2^2f(D_2)}{p-s}\end{vmatrix}. \tag{9}$$

令
$$\varLambda=(\lambda-1)\frac{(w-s)^2f(D_2)}{p-s},$$
则式 (9) 可以整理得
$$\big|H_{E[U(\varPi(z,p))]}\big|_{(z^*,p^*)}=$$
$$a^2p^{-2b-1}\begin{vmatrix}(p-s)f(z)+\varLambda & -\Big(\overline{F}(z)+\dfrac{z\varLambda}{p-s}\Big)\\ -\Big(p\overline{F}(z)+\dfrac{pz\varLambda}{p-s}\Big) & \dfrac{(b-1)bz(p-s)\overline{F}(z)}{bp-bs-p}+\dfrac{pz^2\varLambda}{(p-s)^2}\end{vmatrix}=$$
$$a^2p^{-2b-1}\Big\{\Big[\frac{(b-1)bz(p-s)f(z)}{bp-bs-p}-p\overline{F}(z)\Big]\overline{F}(z)+\Big[\Big(\frac{(b-1)b(p-s)}{bp-bs-p}-\frac{2p}{p-s}\Big)\overline{F}(z)+\frac{pzf(z)}{p-s}\Big]z\varLambda\Big\}.$$

若 $(z^*,p^*)$ 满足
$$g(z^*)\geqslant\frac{p(bp^*-bs-p^*)}{(b-1)(p^*-s)^2b},$$
则有
$$\frac{zf(z)}{\overline{F}(z)}\geqslant\frac{p(bp-bs-p)}{(b-1)(p-s)^2b},$$
使得式 (9) 大括号中的第 1 部分必非负. 又由于
$$\frac{p(bp^*-bs-p^*)}{(b-1)(p^*-s)^2b}>0,$$
则必有 $(b-1)p-bs>0$, 易得 $s<\Big(1-\dfrac{1}{b}\Big)p$, 从而有
$$\Big[\frac{(b-1)b(p-s)}{bp-bs-p}-\frac{2p}{p-s}\Big]\overline{F}(z)+\frac{pzf(z)}{p-s}\geqslant$$
$$\Big[\frac{(b-1)b(p-s)}{bp-bs-p}-\frac{2p}{p-s}+\frac{p^2(bp-bs-p)}{(p-s)^3(b-1)b}\Big]\overline{F}(z)\geqslant$$
$$2\Big[\sqrt{\frac{(b-1)b(p-s)}{bp-bs-p}\cdot\frac{p^2(bp-bs-p)}{(p-s)^3(b-1)b}}-\frac{p}{p-s}\Big]\overline{F}(z)=0.$$

可以保证以上 $|H_{E[U(\varPi(z,p))]}|_{(z^*,p^*)}$ 运算结果中的第 2 项大于等于 0. 所以,
$$|H_{E[U(\varPi(z,p))]}|_{(z^*,p^*)}>0.$$
这说明 $H_{E[U(\varPi(z,p))]}$ 在 $(z^*,p^*)$ 是负定的.

另外, 由式 (3) 易得
$$p=w+(p-s)F(z)+(\lambda-1)(w-s)F(D_2-y(p))\geqslant w,$$
可保证零售商的最优价格不小于进货价格.

综上所证, 当 $(z^*,p^*)$ 满足
$$g(z^*)\geqslant\frac{p(bp^*-bs-p^*)}{(b-1)(p^*-s)^2b}>0$$
时, 损失规避的零售商在 $(z^*,p^*)$ 效用达到最大. □

## 3　数值分析

下面通过两个数值例子讨论在不同的商品定价情形下, 零售商损失规避行为对最优库存因子和最优订货的影响, 并进一步讨论零售商的损失规避行为对其最优定价、最优订货的影响.

### 3.1　加法需求情形

对于加法需求情形, 假设 $\varepsilon$ 服从区间 $[-A, A]$ 上的均匀分布, 模型参数设置为: $A = 2$, $w = 5$, $s = 3$, $a = 150$, $b = 5$. 首先讨论商品销售价格处于不同情形时, 零售商的损失规避行为对最优库存因子和最优订货的影响. 考虑到商品的销售价格不能小于其进货价格, 假设销售价格的范围为 $[5, 25]$. $\lambda$ 分别取 1、1.1、1.2、1.3 和 1.4, 最优库存因子和最优订货量随着商品销售价格的变化趋势如图 1 和图 2 所示.

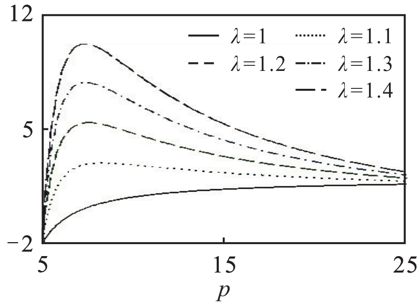


**图 1**　加法需求情形下价格变化对最优库存因子 $z^*$ 的影响

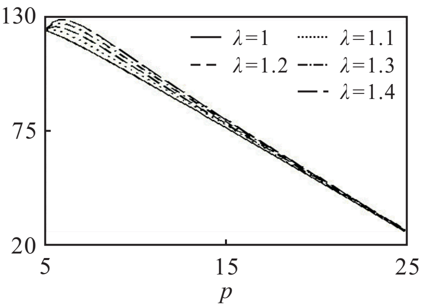


**图 2**　加法需求情形下价格变化对最优订货量 $q^*$ 的影响

由图 1 可知: 当 $\lambda = 1$, 即零售商没有损失规避行为时, 最优库存因子随着商品价格的增大而增大; 但当零售商具有损失规避行为时, 随着商品价格的增大, 最优库存因子先增大再减小, 最终趋于稳定. 从图 1 中曲线的趋势可以看出, 当商品价格不是特别大时, 最优库存因子会达到最大峰值. 由于库存因子表示的是订货量与均值需求之间的偏差, 当商品价格不是很大时, 损失规避零售商的这种偏差会随着价格的增大而变大; 但当商品价格比较大时 (如图 1 中价格 $p > 10$), 损失规避零售商的订货量与均值需求之间的偏差会随着价格的增大而变小. 这表明当商品价格不是很大时, 与无损失规避行为的零售商一样, 当商品价格增大时, 具有损失规避行为的零售商确定的订货量与均值需求之间的偏差也会越来越大; 而在商品价格较大时, 零售商的损失规避行为却使得零售商的订货量与均值需求之间的偏差随价格增大而变得越来越小. 损失规避行为使零售商对损失的厌恶程度大于同样大小的收益, 因此当商品定价比较高时, 零售商会降低订货量与均值需求之间的偏差来减少损失. 这表明, 如果商品定价越高, 零售商的订货量会越趋近均值需求, 损失规避行为使得零售商的订货决策越保守, 倾向于把握均值需求而不愿冒风险.

比较图 1 中的 5 条曲线可以发现, 当选择相同的商品价格时, 损失规避行为程度越大, 零售商选择的最优库存因子越大. 也就是说, 零售商的损失规避行为程度越大, 其最优订货量与均值需求之间的偏差将越大. 同样的, 比较图 2 中的五条曲线, 可以发现, 当面临相同的商品价格时, 零售商的损失规避行为为程度越大, 其选择的最优订货量将越大.

**表 1**　加法需求情形下, 损失规避零售商的最优决策

| $\lambda$ | $p^*$ | $z^*$ | $q^*$ | $E(\Pi)$ | $E(U(\Pi))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 17.546 | 1.45 | 63.719 | 785.062 | 785.062 |
| 1.1 | 22.836 | 1.899 | 37.722 | 645.003 | 390.81 |
| 1.2 | 25.676 | 1.957 | 23.578 | 454.464 | 237.97 |
| 1.3 | 26.867 | 1.971 | 17.637 | 350.547 | 170.39 |
| 1.4 | 27.503 | 1.977 | 14.469 | 289.375 | 132.654 |

结合表 1 分析, 零售商选择的最优零售价格随着其损失规避行为程度的增大而变大; 最优库存因子也随着其损失规避行为程度的增大而变大, 即最优订货量与均值需求之间的偏差随着其损失规避行为程度的增大而增大; 但当零售商的损失规避行为程度越大, 表明其对损失越厌恶, 为了尽可能地降低自身损失, 零售商选择的最优订货量将越来越小. 这表明, 损失规避行为程度更大的零售商将选择少订货高价格的策略来降低损失. 同时, 不论是零售商的期望收益, 还是零售商的期望效用, 都随着其损失规避行为程度的增大而减少. 损失规避零售商期望效用的经济学意义是零售商在风险中性条件下获得的期望收益与在订货过量时所造成的更大 $(\lambda - 1 \geqslant 0)$ 心理损失之和. 对比表 1 的最后两列可以发现, 损失规避行为程度越大, 零售商的最优决策是通过降低订货过量来减少这种更大心理损失, 这反映了损失规避零售商厌恶损失的本质.

### 3.2　乘法需求情形

对于乘法需求情形, 假设 $\varepsilon$ 服从区间 $[A, B]$ 上的均匀分布, 模型参数设置为: $A = 0.8$, $B = 1.2$, $w = 5$, $s = 3$, $a = 1\,000$, $b = 2$. 首先讨论商品销售价格处于不同情形时, 零售商的损失规避行为对最优库存因子和最优订货的影响. 考虑到商品的销售价格不能小于其进货价格, 假设销售价格的范围为 $[5, 25]$. $\lambda$ 分别取值为 1、1.5、2、2.5 和 3, 最优库存因子和最优订货量

随着商品销售价格的变化趋势如图3和图4所示.

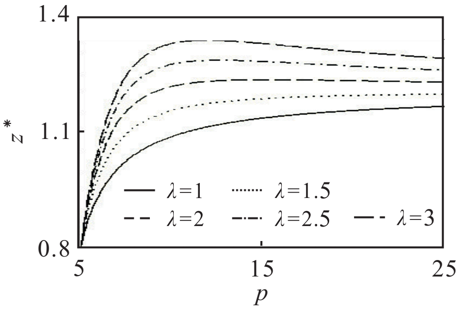


**图 3　乘法需求情形下价格变化对最优库存因子 $z^*$ 的影响**

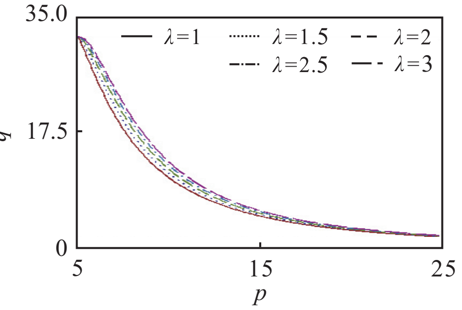


**图 4　乘法需求情形下价格变化对最优订货量 $q^*$ 的影响**

由图3可知, 当$\lambda = 1$, 即零售商没有损失规避行为时, 最优库存因子随着商品价格的增大而增大. 由于库存因子表示的是零售商的订货量与均值需求之间的比例关系, 商品价格越大, 损失规避行为中性的零售商的最优订货量与均值需求的比将越大. 但是, 当零售商具有损失规避行为时, 随着商品价格的增大, 最优库存因子先增大再减小, 并最终趋于稳定. 当商品价格不是很大时, 损失规避零售商的最优订货量与均值需求的比随着价格的增大而变大, 最优订货量可以达到均值需求量的1.1～1.3倍; 但当商品价格比较大时 (如图3中价格$p > 10$), 损失规避零售商的订货量与均值需求比会随着价格的增大而变小. 对比图1中的加法需求情形, 乘法需求情形下的最优库存因子随价格变化的趋势更加平缓. 损失规避行为表示的是零售商对损失的厌恶程度大于同样大小的收益, 在商品价格不是很大时, 与无损失规避行为的零售商一样, 损失规避零售商的订货量与均值需求之间的比随价格增大而变得越来越大, 即其最优订货量越来越高于均值需求; 而在商品价格较大时, 损失规避行为使得零售商的订货量与均值需求之间的比随价格增大而变得越来越小, 并趋于稳定, 零售商的损失规避行为使得其最优订货量越来越趋于均值需求, 这体现了损失规避行为零售商保守的订货决策.

比较图3中的5条曲线可以发现, 当选择相同的商品价格时, 损失规避行为程度越大, 零售商选择的最优库存因子越大. 也就是说, 零售商的损失规避行为程度越大, 其最优订货量将越高于均值需求. 同样的, 对比图4中的5条曲线可以发现, 当面临相同的商品价格时, 零售商的损失规避行为程度越大, 其选择的最优订货量将越大. 但与图2中加法情形不同的是, 乘法需求下的最优订货量关于商品价格以凹函数的形式递减, 随着商品价格的变大, 最优订货量将显著降低. 这表明乘法需求情形下价格变化对最优订货量的影响要大于加法需求情形下价格变化对最优订货量的影响.

**表 2　乘法需求情形下, 损失规避零售商的最优决策**

| $\lambda$ | $p^*$ | $z^*$ | $q^*$ | $E(\Pi)$ | $E(U(\Pi))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8.372 | 1.051 | 14.995 | 105.842 | 105.842 |
| 1.5 | 7.39 | 1.087 | 19.909 | 103.599 | 91.272 |
| 2 | 6.874 | 1.111 | 23.5 | 99.753 | 66.073 |
| 2.5 | 6.605 | 1.125 | 25.776 | 96.601 | 36.297 |
| 3 | 6.451 | 1.134 | 27.247 | 94.32 | 4.797 |

由表2可知: 在乘法需求情形下, 当$\lambda$取值在1～3之间, 零售商选择的最优零售价格随着其损失规避行为程度的增大而变小; 最优库存因子将随着其损失规避行为程度的增大而变大, 即最优订货量与均值需求的比随着其损失规避行为程度的增大而增大; 但当零售商的损失规避行为程度更大时, 表明其更加厌恶损失, 为了尽可能地降低自身损失, 零售商选择的最优订货量将越来越大. 这表明在面临乘法需求情形时, 损失规避行为程度更大的零售商将选择多订货低价格的策略来降低损失, 这与加法需求情形下采取的策略恰好相反. 同时, 零售商的期望收益与期望效用随着其损失规避行为程度的增大而减少. 损失规避零售商期望效用的经济学意义是零售商在风险中性条件下获得的期望收益与在订货过量时所造成的更大($\lambda - 1 \geqslant 0$) 心理损失之和. 对比表2的最后两列可以发现, 损失规避行为程度越大, 零售商因订货过量而造成的更大心理损失将越大. 此时零售商的最优决策是通过降低订货过量来减少这种更大心理损失, 这反映了损失规避零售商厌恶损失的本质.

通过以上分析, 对比两种需求情形容易发现, 不论是面临加法需求情形还是面临乘法需求情形, 损失规避行为程度增大, 零售商都会选择较低的最优商品定价, 这表明零售商应对市场风险均采取低价策略, 进而降低其期望收益和期望效用. 但不同的是, 在面临加法需求时, 零售商确定的最优订货量会随着损失规避行为的增大而增大, 而零售商在乘法需求情形下确定的最优订货量会随着损失规避行为的增大而减小. 综上所述, 损失规避行为程度越大, 零售商为了规避损失, 在加法需求情形下应采取低价低量策略, 而在乘法需求情形下应采取低价高量策略.

## 4 结　论

本文基于报童模型, 采用前景理论刻画零售商的损失规避行为, 分别考虑需求关于价格的加法需求情形和乘法需求情形, 研究了具有损失规避行为的零售商的商品订货量与定价联合决策问题; 分别对加法需求情形和乘法需求情形给出了损失规避零售商最优策略存在的充分条件; 通过算例分析, 得到了最优库存因子和最优订货量关于商品价格的变化趋势, 并发现: 面临相同商品价格时, 相对于损失规避中性的零售商, 损失规避零售商的最优订货量较大, 并且损失规避零售商的最优订货量随着其损失规避行为程度的增大而增大.

当面临加法需求情形时, 随着其损失规避行为程度的增大, 零售商选择的最优零售价格越来越大, 而最优订货量越来越小. 损失规避行为程度增大, 零售商将选择少订货高价格的策略来降低损失. 当面临乘法需求情形时, 随着其损失规避行为程度的增大, 零售商选择的最优零售价格越来越小, 而零售商选择的最优订货量越来越大. 损失规避行为程度增大, 零售商采取与加法需求情形恰好相反的策略, 将选择多订货低价格的策略来降低损失.

下一步的拓展方向为: 分别在加法需求情形和乘法需求情形下, 考虑具有损失规避零售商的两阶段供应链的协调策略研究等.

### 参考文献(References)


[1] Khouja M. The single-period(news-vendor) problem: Literature review and suggestions for future research[J]. Omega, 1999, 27(5): 537-553.

[2] Qin Y, Wang R, Vakharia A J, et al. The newsvendor problem: Review and directions for future research[J]. European J of Operational Research, 2011, 213(2): 361-374.

[3] Whitin T M. Inventory control and price theory[J]. Management Science, 1955, 2(1): 61-68.

[4] Mills E S. Uncertainty and price theory[J]. The Quarterly J of Economics, 1959, 73(1): 116-130.

[5] Karlin S, Carr C R. Prices and optimal inventory policy[C]. Studies in Applied Probability and Management Science. Stanford: Stanford University Press, 1962: 159-172.

[6] Petruzzi N C, Dada M. Pricing and the newsvendor problem: A review with extensions[J]. Operations Research, 1999, 47(2): 183-194.

[7] 刘玉霜, 张纪会, 王丽丽. 两种需求模式下报童模型的最优定价-订购联合决策[J]. 控制与决策, 2013, 28(9): 1419-1422.
(Liu Y S, Zhang J H, Wang L L. Optimal joint pricing and ordering decisions in newsvendor model with two demand cases[J]. Control and Decision, 2013, 28(9): 1419-1422.)

[8] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk[J]. Econometrica: J of the Econometric Society, 1979, 47(2):263-291.

[9] Schweitzer M E, Cachon G P. Decision bias in the newsvendor problem with a known demand distribution: Experimental Evidence[J]. Management Science, 2000, 46(3): 404-420.

[10] Wang C X, Webster S. The loss-averse newsvendor problem[J]. Omega, 2009, 37(1): 93-105.

[11] Nagarajan M, Shechter S. Prospect theory and the newsvendor problem[J]. Management Science, 2014, 60(4): 1057-1062.

[12] 索寒生, 储洪胜, 金以慧. 带有风险规避型销售商的供需链协调[J]. 控制与决策, 2004, 19(9): 1042-1044.
(Suo H S, Chu H S, Jin Y H. Supply chain coordination with risk aversion retailers[J]. Control and Decision, 2004, 19(9): 1042-1444.)

[13] 文平. 损失厌恶的报童-预期理论下的报童问题新解[J]. 中国管理科学, 2005, 13(6): 64-68.
(Wen P. The Loss averse newsboy-The solution of newsboy problem under prospect theory[J]. Chinese J of Management Science, 2005, 13(6): 64-68.)

[14] 柳键, 邱国斌, 黄健. 考虑缺货损失情形下损失厌恶零售商的订货决策[J]. 控制与决策, 2012, 27(8): 1195-1200.
(Liu J, Qiu G B, Huang J. Loss-averse retailer’s order decision-making under stockout loss situation[J]. Control and Decision, 2012, 27(8): 1195-1200.)

[15] Wang Y, Jiang L, Shen Z J. Channel performance under consignment contract with revenue sharing[J]. Management Science, 2004, 50(1): 34-47.


(责任编辑：齐　霁)