

基于增广输入变量的T-S模糊模型建模

杨马英, 张书桂

(浙江工业大学信息工程学院, 杭州 310023)

摘要: 针对现有T-S模糊模型建模精度与计算效率之间的矛盾, 提出一种利用增广输入变量进行T-S模糊模型建模的方法. 对输入变量进行多项式增广处理后, 以核模糊C均值聚类算法配合聚类评价指标自适应获得最佳聚类数及相应的模糊划分, 并通过递推最小二乘计算得出T-S模糊模型的后件参数. 提出可利用后件参数反推断前件结构的方法来快速有效地确定前件结构. 最后通过仿真验证了上述方法的有效性.

关键词: T-S模糊模型; 增广输入变量; 核模糊C均值聚类; 聚类评价指标

中图分类号: TP391

文献标志码: A

T-S fuzzy modeling based on augmented input variables

YANG Ma-ying, ZHANG Shu-gui

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China. Correspondent: YANG Ma-ying, E-mail: myyang@zjut.edu.cn)

Abstract: To solve the problem of conflicting between accuracy and efficiency in T-S fuzzy modeling, a method of establishing T-S fuzzy model by using the augmented input variables is proposed. After the input variables are augmented, the best clustering number and fuzzy partition are automatically obtained by using kernel fuzzy C-means(KFCM) and a clustering evaluation function, and the consequent parameters are determined by using recursive least-square algorithm. In order to calculate the antecedent structure more efficiently, the input parameters are anti-inferenced according to consequent parameters. Finally, simulation examples illustrate the effectiveness of the method.

Keywords: T-S fuzzy model; augmented input variables; kernel fuzzy C-means; clustering evaluation function

0 引言

T-S模糊模型是一种已在非线性建模中得到广泛研究的模糊模型^[1-3]. T-S模糊模型中模糊规则的后件为线性多项式, 模型的总输出为每条规则输出的加权平均, 因此后件参数的辨识可通过经典的线性辨识方法获得. T-S模型前件结构的确定以及前件参数的辨识是T-S模糊建模的关键^[4]. 目前常采用模糊聚类的方法将输入数据分成若干类, 以聚类数作为所需的模糊规则数, 以数据隶属于某类的程度作为模糊模型的前件参数^[5]. 理论上, T-S模糊模型的建模精度与模糊规则的数目有关, 模糊规则越多, 所建T-S模型精度越高. 然而, 实际操作中发现在对某些非线性系统进行T-S模糊模型建模时, 单纯地增加模糊规则数目对于模型精度的提高非常有限, 反而极大地增加了整个建模过程的计算量. 因此, 本文提出一种基于增广输入变量的T-S模糊建模方法, 可有效地提高建模精度.

1 T-S模糊模型

T-S模糊模型采用if-then结构表示, 后件部分采用线性方程式描述. 对于一个MISO系统, T-S模糊模型的第*i*条模糊规则可表示为

$$R^i : \text{if } x_1 \text{ is } A_1^i \text{ and } \cdots x_m \text{ is } A_m^i \text{ then} \\ y^i = b_0^i + b_1^i x_1 + \cdots + b_m^i x_m.$$

其中: $i = 1, 2, \cdots, c$, c 为规则总数; $x_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ 为输入变量; y^i 为第*i*条模糊规则的输出; $A_1^i, A_2^i, \cdots, A_m^i$ 为输入论域上的模糊子集; $b_j^i (j = 0, 1, \cdots, m)$ 为结论参数. T-S模型的总输出表现为每条规则的加权平均.

2 增广输入变量的T-S模糊模型建模

2.1 输入变量的增广处理

对于一个MISO系统, 设系统的实际输入为 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 输出为 y , 则系统的数学模型可以表

收稿日期: 2014-09-15; 修回日期: 2014-12-22.

基金项目: 浙江省重大科技专项项目(2012C01035-8).

作者简介: 杨马英(1966-), 女, 教授, 从事机器人控制与过程控制等研究; 张书桂(1990-), 男, 硕士生, 从事过程监控与故障诊断的研究.

示为函数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. 而任意函数 f 都可以展开为无穷阶多项式和的形式, 即

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0, \dots, k=0}^{i=\infty, \dots, k=\infty} p(s) x_1^i x_2^j \dots x_n^k,$$

其中 $p(s)$ 为多项式中每项的系数. 因此, 对系统的输入样本作如下处理得到增广输入矩阵:

$$\bar{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2, x_1 x_2, \dots]. \quad (1)$$

此时, T-S 模型后件形式为多项式, 其逼近任意线性多项式的能力是肯定的, 参照文献 [4,6] 中典型 T-S 模型的逼近性证明过程, 这种模型一样具有通用逼近能力. 对于 T-S 模型前件而言, 增广输入变量增加了样本之间的差异, 有利于获得更准确的模糊划分^[7]. 对于 T-S 模型后件而言, 增广输入变量增加了多项式的阶, 使其具有更高的拟合精度. 实际操作中, 并不需要对输入变量进行无穷阶增广, 只进行有限次增广使模型达到要求的精度即可, 因此对模糊系统复杂性的增加是有限的.

2.2 前件结构和前件参数的确定

目前一般采用模糊聚类算法将输入数据分成若干类, 以聚类数作为所需的模糊规则数, 以数据隶属于某类的隶属度作为模糊模型的前件参数, 采用得较多的模糊聚类算法有模糊 C 均值算法 (FCM)^[8]. 但是, FCM 算法需要预先设定聚类数, 因此它并不能独立获得 T-S 模型的规则数, 需要借助聚类有效性指标才可以自适应获得最佳聚类数^[9]. 另考虑到 FCM 的改进算法——核模糊 C 均值聚类 (KFCM) 具有比普通 FCM 算法更少的收敛次数和更优的聚类效果, 本文采用 KFCM 算法配合聚类有效性指标, 自适应地确定 T-S 模糊模型的最佳规则数以及其对应的前件参数.

2.2.1 核模糊 C 均值聚类

设待聚类样本集为 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 核非线性映射为 $\Phi: x \rightarrow \Phi(x)$, 则 KFCM 聚类的目标函数为

$$J_m(X; U, V) = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^N u_{ij}^m \|\Phi(x_j) - \Phi(v_i)\|^2. \quad (2)$$

其中: v_i 为第 i 类的中心, $\Phi(v_i)$ 为该类中心在相应核空间的像, 且有

$$\Phi(v_i) = \frac{\sum_{k=1}^N u_{ik}^m \Phi(x_k)}{\sum_{k=1}^N u_{ik}^m}. \quad (3)$$

最小化式 (2), 利用核函数 K 与特征空间内积的关系 $K(x_i, x_j) = \langle \Phi(x_i), \Phi(x_j) \rangle$ 可以得到

$$K(x_i, x_j) = \frac{\sum_{k=1}^N u_{ik}^m K(x_k, x_j)}{\sum_{k=1}^N u_{ik}^m}, \quad (4)$$

$$K(v_i, v_i) = \frac{\sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^N u_{ik}^m u_{is}^m K(x_k, x_s)}{\left(\sum_{k=1}^N u_{ik}^m\right)^2}. \quad (5)$$

当核函数选定为高斯函数时, 有 $K(x, x) = 1$, 则

$$J = 2 \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^N u_{ij}^m (1 - K(x_j, v_i)).$$

构造拉格朗日函数并对 u, v 分别求偏导, 可以得到 KFCM 算法的 v_j 和 u_{ij} 的更新公式

$$v_j = \frac{\sum_{i=1}^c u_{ij}^m K(x_i, v_j) x_i}{\sum_{i=1}^c u_{ij}^m K(x_i, v_j)}, \quad (6)$$

$$u_{ij} = \frac{[1 - K(x_i, v_j)]^{-1/(m-1)}}{\sum_{j=1}^c [1 - K(x_i, v_j)]^{-1/(m-1)}}. \quad (7)$$

2.2.2 改进的聚类评价指标

KFCM 模糊聚类算法需预先设定聚类的数目, 为使得算法自适应获得最佳聚类数, 可通过极小化模糊聚类评价指标函数的方法来实现^[10]. 在 Hilbert 空间中, Xie-Ben 指标^[11]的紧致性表现形式为

$$V_{KX} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^N u_{ij}^m \|\Phi(x_j) - \Phi(v_i)\|^2, \quad (8)$$

分离性评价指标表现为

$$V_{KB} = \min_{j \neq k} \|\Phi(v_j) - \Phi(v_k)\|^2. \quad (9)$$

紧致性指标和分离性指标的比值即为 Hilbert 空间中的 Xie-Ben 指标. 对于 T-S 模糊模型聚类, 较好的聚类结果应该考虑两方面的因素:

- 1) 表现在输入数据和输出数据上都应该具有较好的类内紧致性和类间分离性;
- 2) 表现在输入和输出的映射上则应该有较好的分离性.

根据这一原理可构建新聚类评价指标如下:

$$V_{TS} = \frac{V_{KX}(u) V_{KX}(y)}{V_{KB}(u) V_{KB}(y) V_{KB}(uy)}. \quad (10)$$

对于不同的聚类数 c , 当 V_{TS} 取到极小值时, 所对应的聚类数可认为是最佳聚类数目.

2.3 T-S 模型结构与后件辨识及算法整体描述

本文采用递推最小二乘算法 (RLS) 辨识 T-S 模型

的后件参数. 关于 RLS 算法, 本文不再赘述.

T-S 模糊模型的前件结构通常可通过动态增加输入变量并计算均方误差 MSE 得出, 然而这种方法需要反复建模多次, 计算量较大. 本文提出可通过对 T-S 模糊模型的后件参数的判断, 略去后件多项式中较小系数 p 所对应的输入变量, 在修剪阈值选取恰当的情况下, 仅通过较少次的重复建模便可获得 T-S 模型的输入变量.

综上, 对于一个 MISO 系统, 采用增广输入变量法对其进行 T-S 模糊建模的基本思想为: 首先对样本数据进行输入变量增广处理得到增广矩阵 \bar{X} , 将增广样本矩阵 \bar{X} 以及输出 y 用 KFCM 算法聚类, 得出包含输出在内的聚类中心, 截取聚类中心向量中输入数据对应的部分作为输入数据的聚类中心, 聚类中心中输出数据对应的部分作为输出的聚类中心; 然后采用式 (10) 的聚类性能评价指标结合 KFCM 算法, 自适应地计算 T-S 模型的最佳规则数和前件参数, T-S 模型后件则采用递推最小二乘计算得出. 整个模糊建模的具体实施步骤如下.

Step 1: 通过式 (1) 对输入矩阵 X 进行增广处理, 得到增广矩阵 \bar{X} , 取 \bar{X} 中的增广部分 \bar{X}_A 作为待选输入, 并令 $X = [X \ \bar{X}_A(:, 1)]$ 作为模糊系统的输入;

Step 2: 采用第 2 节提到的 KFCM 结合 T-S 聚类有效性指标函数 (10) 的方法, 将增广样本 $[X \ y]$ 进行分类, 计算出最佳聚类数 c 、隶属中心 V_{uy} 和模糊划分矩阵 U_{uy} ;

Step 3: 剔除隶属中心 V_{uy} 中输出 y 对应的项, 得到不包含 y 的隶属中心 V_u ;

Step 4: 采用递推最小二乘算法计算得出 T-S 模糊模型的后件参数 P ;

Step 5: 计算该模型输出与实际输出的均方误差 J , 若 $J > E$, 则令 $X = [X \ \bar{X}_A(:, 2)]$, 转 Step 1;

Step 6: 若所建 T-S 模型所有规则中某输入 x_i 对应的 p 均具有相对较小的绝对值, 则判断其对该系统仅具有较小的影响, 从输入变量 X 中剔除该项;

Step 7: 采用输入变量 X 建立 T-S 模型, 并用测试数据对所建模型进行测试, 若均方误差 J_{test} 在允许范围内, 则该 T-S 模型确定为最终模型, 否则调整参数重新建模.

上述 T-S 模糊建模方法仅需要通过较少次数的重复计算便可以快速确定 T-S 模糊模型的前件结构和参数. 建模精度可以通过设定不同的均方误差阈值加以控制.

3 仿真研究

为验证上述方法的有效性, 本文分别以 Box and

Jenkins 煤气炉数据和 DISO 数据进行仿真建模研究.

例 1 使用 Box 和 Jenkins 煤气炉数据^[12](以下简称 BJ 数据) 的前 150 组数据进行模糊建模, 用后 146 组数据进行模型验证. 为了方便, 本文直接选取 $u(t-4)$ 和 $y(t-1)$ 作为模型的原始输入变量. 模糊聚类所需核函数采用高斯核函数, 聚类精度 ε 设为 0.01, 模糊指数 $m = 2$, 最大迭代次数 $T = 100$, 核参数的值设为 $K = 10$. 仿真结果如图 1 和图 2 所示.

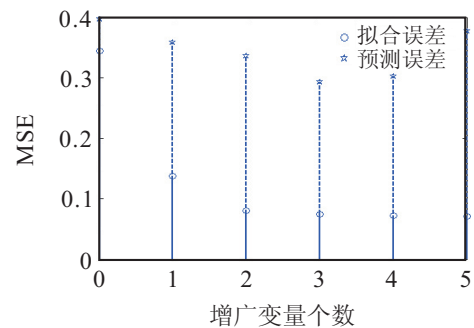


图 1 BJ 系统 MSE 随增广变量个数的变化情况 (实际测得规则数计算结果均为 2)

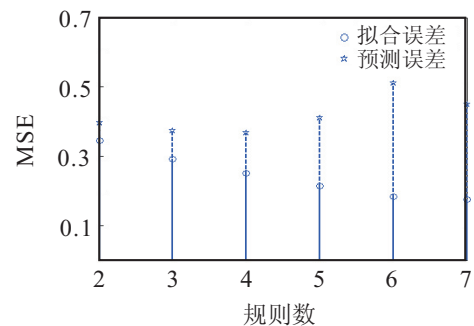


图 2 BJ 系统 MSE 随规则数的变化情况

由图 1 可看出, 仅加入 3 个增广项, 模型的拟合均方误差从初始无增广项的 0.3440 下降到了 0.0713, 预测误差也有较明显的下降, 对比图 2 中增加规则数的方法, 本文的方法明显具有更好的效果.

例 2 DISO 系统的 100 组样本数据由如下标准方程采样得到, 该标准方程已经被许多学者作为检验辨识算法有效性的标准例题之一^[8].

$$y = (1 + x_1^{-2} + x_2^{-1.5})^2, \\ 1 \leq x_1 \leq 5, 1 \leq x_2 \leq 5.$$

同样采用本文的方法对其进行 T-S 模糊建模. 模糊聚类所需核函数采用高斯核函数, 聚类精度 ε 设为 10^{-6} , 模糊指数 $m = 2$, 最大迭代次数 T 设为 100, 核参数的值设为 $K = 10$. 本仿真在实际操作中采取了 10 次重复计算取最小聚类数作为最佳聚类数的策略, DISO 仿真结果如图 3 和图 4 所示.

由图 3 可看出, 仅加入 4 个增广项后, 模型的拟合均方误差从初始无增广项的 0.2668 下降到了 0.0577, 模型的预测误差也有明显的下降, 对比图 4 增加规则数的方法, 本文的方法也同样具有更高的精度.

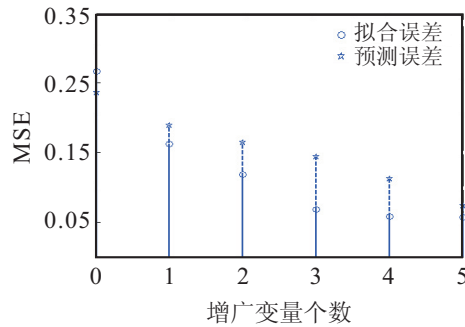


图 3 DISO 系统 MSE 随增广变量个数的变化情况
(实际测得规则数计算结果均为 2)

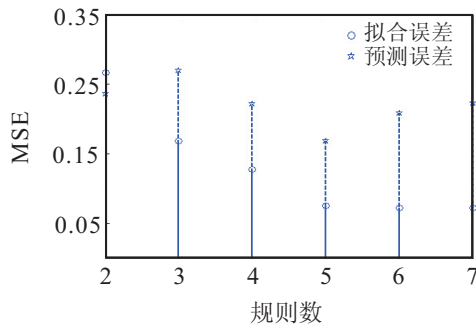


图 4 DISO 系统 MSE 随规则数的变化情况

4 结 语

本文结合 T-S 模糊建模的特点和无穷阶多项式拟合任意函数这一原理, 提出了利用增广输入变量作为系统输入从而建立 T-S 模糊模型的方法, 在确定 T-S 前件结构的策略上, 本文采用了利用后件参数反推断前件结构的方法, 该方法比传统计算均方误差的方法具有更快的计算速度. 本文最后通过对 Box and Jenkins 煤气炉数据和 DISO 数据的仿真, 验证了该方法相比普通方法具有更高的建模精度.

参考文献(References)

- [1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, 1985, 15(1): 116-132.
- [2] Zhu B, He C Z, Liatsis P. A GMDH-based fuzzy modeling approach for constructing T-S model[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2012, 189(1): 19-29.
- [3] Abonyi J, Babuska R, Szeifert F. Modified gath-geva fuzzy clustering for identification of takagi-sugeno fuzzy models[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, 2002, 32(5): 612-621.
- [4] 刘福才. 非线性系统的模糊模型辨识及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2006: 102.
(Liu F C. Identification and application of the fuzzy model for nonlinear systems[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2006: 102.)
- [5] 李目, 刘组润, 年晓红, 等. 基于 T-S 模型的非线性系统模糊聚类辨识算法[J]. 计算机与工程应用, 2007, 43(29): 239-241.
(Li M, Liu Z R, Nian X H, et al. Method of nonlinear systems identification with fuzzy clustering based on takagi-sugeno model[J]. Computer Engineering and Application, 2007, 43(29): 239-241.)
- [6] 曾珂, 张乃尧, 徐文立. 线性 T-S 模糊系统作为通用逼近器的充分条件[J]. 自动化学报, 2001, 27(5): 606-612.
(Zeng K, Zhang N Y, Xu W L. Sufficient condition for linear T-S fuzzy systems as universal approximators[J]. Acta Automatic Sinica, 2001, 27(5): 606-612.)
- [7] 刘福才, 刘砚, 王树恩. 输入变量个数对 T-S 模糊建模精度的影响[J]. 模糊系统与数学, 2013, 27(1): 40-54.
(Liu F C, Liu Y, Wang S E. The influence of the number of input variables on descriptive performance of T-S fuzzy model[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2013, 27(1): 40-54.)
- [8] Xu R, Donald C Wunsch. Survey of clustering algorithms[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2005, 16(3): 645-678.
- [9] Rezaee, Bakak. A cluster validity index for fuzzy clustering[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161(23): 3014-3025.
- [10] 唐苦, 王昕, 王振雷, 等. 一种基于高斯核化有效性指标的自适应优选聚类数目 FKCM[J]. 计算机与应用化学, 2012, 29(10): 1199-1203.
(Tang K, Wang X, Wang Z L, et al. An adaptive optimal clustering number of FKCM base on gaussian kernel validity index[J]. Computers and Applied Chemistry, 2012, 29(10): 1199-1203.)
- [11] Xie X L, Beni G. A validity method for fuzzy clustering[J]. IEEE Trans on PAMI, 1991, 13(8): 841-847.
- [12] Box G E P, Jenkins G M. Time series analysis forecasting and control[M]. San Francisco: Holden Day, 1970: 419-422.

(责任编辑: 孙艺红)