

多智能体时滞和无时滞网络的加权分组一致性分析

王玉振¹, 杜英雪¹, 王强²

(1. 山东大学控制科学与工程学院, 济南 250061; 2. 山东师范大学信息科学与工程学院, 济南 250014)

摘要: 针对连通二部图结构下的一阶多智能体系统, 考虑有无时滞两种情形下多智能体的加权分组一致问题. 设计一类基于竞争关系的分散协调控制协议, 利用矩阵论和代数图论等有利工具, 使得在该控制协议下, 多智能体系统均可全局收敛到任意指定的加权一致状态. 针对系统存在时滞的情形, 运用圆盘定理和广义奈氏准则, 得到系统达到收敛时可能容忍的最大时延上界. 仿真实例较好地验证了所得出结论的正确性.

关键词: 二部图; 加权分组一致; 圆盘定理; 多智能体系统

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Weighted group-consensus analysis of multi-agent systems with and without time-delay network

WANG Yu-zhen¹, DU Ying-xue¹, WANG Qiang²

(1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Ji'nan 250061, China; 2. School of Information Science and Engineering, Shandong Normal University, Ji'nan 250014, China. Correspondent: DU Ying-xue, E-mail: duyngxue@yeah.net)

Abstract: For single-integrator kinematics of multi-agent systems with connected bipartite topology, the system's weighted group-consensus problem with/without time-delay is investigated. A decentralized and coordinated control protocol is designed. Based on the matrix theory and the graph theory, it is proved that the multi-agent systems can converge to the arbitrary prescribed weighted state. For the cases with time-delay, a upper bound on the maximum time-delay that the system can tolerate is obtained by using the gerschgorin theorem and Nyquist's criterion. The simulation examples show the correctness of the obtained results.

Keywords: bipartite graph; weighted group consensus; gerschgorin theorem; multi-agent systems

0 引言

多智能体系统是分布式系统一个重要的研究分支, 其在多机器人的编队、无人机的联合侦察与搜索、无线传感器网络等方面的重要应用, 引起了广大学者的研究兴趣^[1-4]. 在多智能体系统的诸多研究问题中, 一致性问题是多智能体系统研究的最根本问题. 一致性问题即通过设计系统的控制协议, 使各个智能体在信息交换后状态达到一致. 各个智能体通过相互之间的通讯、协调、合作和竞争解决很多复杂的问题, 从而使得系统的鲁棒性、容错性、可靠性得到有效的提升.

近几年, 一致性问题的研究发展非常迅速, 取得了相当丰富的理论成果. Vicsek等^[5]根据Reynolds^[6]提出的模拟动物集结的计算机模型, 首次提出了非

平衡多智能体模型, 并验证了此类模型的收敛性. Jadhabaie等^[7]通过对Vicsek模型进行分析, 提出了角度一致性问题, 给出了模型的收敛性相应的结论. Moreau等^[8-9]对Jadhabaie的结果展开进一步研究, 将系统推广到有向拓扑网络, 并得到相应的收敛结果, 从而使一致性问题得到了高速发展.

在实际应用中, 随着系统复杂程度的不断加大, 人们对系统分组问题产生了极大兴趣. 多智能体系统的分组一致问题得到了学者的广泛关注, 并取得了丰硕的研究成果. 文献[10]利用矩阵半张量积方法对图的最大稳定集和着色问题进行了研究, 并使用该方法设计了多智能体系统分组一致控制协议, 将图的着色理论与多智能体系统分组一致问题进行了结合. 文献[11]分别对具有相同自动态和不同自动态的智能体

收稿日期: 2014-09-16; **修回日期:** 2014-11-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61374065); 国家青年科学基金项目(61403223).

作者简介: 王玉振(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统控制、布尔网络等研究; 杜英雪(1989—), 女, 硕士生, 从事多智能体系统协同控制的研究.

系统分组一致性问题进行分析,给出了相应的结果.文献[12]通过对无向图和强连通平衡图进行研究,设计了多智能体系统分组一致控制器,并给出了相关收敛判据.文献[13]针对智能体间仅存在竞争和智能体间既存在竞争又存在合作两种情况进行分析,给出了系统在有向二部图拓扑结构下实现分组同步的控制协议,并证明了协议的稳定性.

由于智能体间信息交流通常存在时延,对多智能体含有时延情况的研究具有较强的实际意义.利用双树模型的转化思想,文献[14]针对有时滞和无时滞两种情况进行研究,通过对原系统进行降阶,给出了系统收敛的条件.文献[15-16]在基于竞争的模型下,研究了系统在连通二部图拓扑结构下达到分组一致的情况,并给出了相应的时延上界,将含有时滞的系统与分组一致问题进行了结合.此外,多智能体系统加权一致性的研究也取得了丰厚的成果.文献[17]提出了加权一致性的概念,设计了一类分散协调控制器,使在该控制器下多智能体达到加权平均一致性.文献[18]考虑时延情况下智能体的加权平均一致问题,设计了线性与非线性两种控制器,并给出了线性控制器下系统可容忍的最大时延上界.然而,基于竞争关系设计分散协调控制器,使系统达到加权分组一致性的研究成果,还较少见到相关报道.

本文利用智能体间的竞争关系研究了一类新的加权一致问题,针对连通^[19]二部图结构下的一阶多智能体系统,考虑了有无时滞两种情形下多智能体的加权分组一致问题,设计了一类基于竞争关系的分散协调控制协议.利用矩阵论和代数图论等有利工具,使得在该控制协议下,多智能体系统均可全局收敛到任意指定的加权一致状态,比文献[19]协议具有更强的灵活性.针对系统存在时滞情形,运用圆盘定理和广义奈氏准则,得到了系统达到收敛时可能容忍的最大时延上界.仿真实例较好地验证了所得出结论的正确性.

1 预备知识

对于有 n 个节点的无向图 $\mathcal{G} := \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, A\}$, $\mathcal{V} := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 表示图的顶点集, $L = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示节点的下标集, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 表示图的边集, $e_{ij} = (v_i, v_j) \in \mathcal{E}$. 矩阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ 表示 \mathcal{G} 的邻接矩阵,且满足 $a_{ij} \geq 0$, $a_{ij} > 0$ 当且仅当 $i, j \in e_{ij}$ 成立. $\mathcal{N}_i = \{j | e_{ij} = (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\}$ 为节点 i 的邻接成员的集合,即 i 与 j 有信息交流.若 $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, 则矩阵 D 称为 G 的度矩阵,其中 $d_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}$.

本文仅考虑 \mathcal{G} 为无向简单图,即对于任意的顶点 $v_i \in \mathcal{V}$, 有 $e_{ii} \notin \mathcal{E}$. 因为 \mathcal{G} 为无向图, 所以有 $a_{ij} = a_{ji}$,

$i \in L$, 即矩阵 A 为一个对称矩阵.

若 $\mathcal{G} := \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ 是一个具有 n 个节点的二部图^[19], 则顶点集 \mathcal{V} 可以分割为两个互不相交的子集 $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$, 若 v_i 和 v_j 同属于一个子集 \mathcal{V}_1 或 \mathcal{V}_2 , 则 $\hat{i} = \hat{j}$, 否则 $\hat{i} \neq \hat{j}$, 其中 \hat{i} 为节点 v_i 所在的分组.

为了进一步研究,本文需要以下定义.

定义 1^[13] 对于含有 n 个节点的智能体系统,其中 $x(0) = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]^T$ 为初始状态, $x_i(0) \in \mathcal{R}$. 如果当 $\hat{i} = \hat{j}$ 时 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0$, 当 $\hat{i} \neq \hat{j}$ 时 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| > 0$, 则称系统可实现分组一致.

定义 2 对于含有 n 个节点的智能体系统,其中 $x(0) = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]^T$ 为初始状态. 给定决策函数 $\text{Wave}^*(x) := \sum_{i=1}^r b_i x_i - \sum_{i=r+1}^n b_i x_i, \sum_{i=1}^n b_i = 1, b_i > 0$, 如果当 $i \in L_1$ 时 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \text{Wave}^*(x(0))$, 当 $i \in L_2$ 时 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = -\text{Wave}^*(x(0))$, 其中 $L_1 = \{i | v_i \in \mathcal{V}_1\}, L_2 = \{i | v_i \in \mathcal{V}_2\}$, 则称系统可实现加权分组一致.

考虑具有 n 个节点的一阶多智能体系统

$$\dot{x}_i = u_i, i \in L. \quad (1)$$

其中: $x_i \in \mathcal{R}$ 为第 i 个智能体的状态, $u_i \in \mathcal{R}$ 为第 i 个智能体的控制输入.

基于竞争关系的控制器可设计为

$$u_i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_i(t) + x_j(t)), i \in L. \quad (2)$$

将控制器代入系统方程(1),整理可得

$$\dot{x} = -(D + A)x. \quad (3)$$

其中: D 为图 \mathcal{G} 的度矩阵, A 为图 \mathcal{G} 的邻接矩阵.

基于上述控制器(2)的设计方法,为了实现多智能体的加权分组一致,设计如下含有加权系数的控制器.下面分别针对系统不含时滞和含有时滞两种情况进行讨论.

情况 1 当系统不含时滞时,控制器设计如下:

$$u_i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{1}{b_i} a_{ij} (x_i(t) + x_j(t)), i \in L. \quad (4)$$

其中: $b_i > 0, i \in L, \sum_{i=1}^n b_i = 1$. 根据式(1)和(4),可得

$$\dot{x} = -B^{-1}(D + A)x. \quad (5)$$

其中: $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathcal{R}^n, B = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_n\}, D$ 为图 \mathcal{G} 的度矩阵, A 为图 \mathcal{G} 的邻接矩阵.

情况 2 当系统存在时滞时,控制器设计如下:

$$u_i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{1}{b_i} a_{ij} (x_i(t - \tau) + x_j(t - \tau)), \quad i \in L. \quad (6)$$

其中 $b_i > 0, i \in L, \sum_{i=1}^n b_i = 1, \tau > 0$ 为系统的时滞. 根据式 (1) 和 (6), 可得

$$\dot{x} = -B^{-1}(D + A)x(t - \tau). \quad (7)$$

其中: $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathcal{R}^n, B = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_n\}, D$ 为图 \mathcal{G} 的度矩阵, A 为图 \mathcal{G} 的邻接矩阵.

本文设计了上述具有加权系数的控制器, 通过调整控制器的加权系数, 可使得多智能体状态全局收敛到任意指定的加权状态, 与控制器 (2) 相比, 所设计控制器具有更强的灵活性.

引理 1^[16] 若拓扑结构 \mathcal{G} 为具有 n 个节点的连通二部图, $L_1 = \{1, 2, \dots, r\}$ 和 $L_2 = \{r + 1, r + 2, \dots, n\}$ 为系统的一个分割, A 为 \mathcal{G} 的邻接矩阵, 则 A 在适当的排序下可以表示为

$$A := \begin{bmatrix} 0_{r \times r} & A_1 \\ A_1^T & 0_{(n-r) \times (n-r)} \end{bmatrix},$$

其中 $A_1 \in \mathcal{R}^{(n-r) \times r}$.

引理 2^[19] 若拓扑结构 \mathcal{G} 为具有 n 个节点的连通的二部图, 则在控制协议 (2) 下, 可得矩阵 $-(D + A)$ 的秩为 $n - 1$, 且该矩阵的非零特征值具有负实部.

引理 3^[20] 对于 $\omega \in \mathcal{R}$, 凸包 $\text{Co}(0 \cup \{W_i(j\omega), i \in L\})$ 包含圆盘的集合 $\bigcup_{i \in L} G_i$. 其中: G_i 为系统特征根的圆盘, W_i 为原点到圆盘 G_i 中心连线的延长线与圆盘边界的交点.

引理 4^[20] 当 $\omega \in \mathcal{R}$ 时, 对于任意 $\zeta \in [0, 1)$, 凸包 $\zeta \text{Co}(0 \cup \{E_i(j\omega), i \in L\})$ 不包含 $-1 + j0$ 点. 其中: $E_i(j\omega) = \frac{\pi}{2\tau} \times \frac{\exp(-j\omega\tau)}{j\omega}$, τ 为系统的时滞且 $\tau > 0$.

注 1 在实际应用中, b_i 不宜过小. 如果 $b_i \rightarrow 0$, 则 $\dot{x}_i \rightarrow \infty$, 导致整个系统失去稳定.

2 主要结果

本节针对智能体系统不含时滞和含有时滞两种情况进行研究分析, 结合所给出的引理, 对以上两种情况进行分析论证, 使得在上述控制器下, 系统最终实现加权分组一致, 并给出系统达到加权一致时各个智能体最终的收敛值.

2.1 无时滞加权分组一致性控制器研究

定理 1 拓扑结构 \mathcal{G} 为具有 n 个节点的连通的二部图, 在控制协议 (4) 下, 系统能实现分组一致.

证明 设

$$x^* = \underbrace{[a, a, \dots, a]}_r, \underbrace{[-a, \dots, -a]}_{n-r}^T,$$

其中 a 为常数. 由于 \mathcal{G} 为连通二部图, 由引理 1 可知, 在适当的排序下, \mathcal{G} 的邻接矩阵 A 可表示为

$$A = \begin{bmatrix} 0_{r \times r} & A_1 \\ A_1^T & 0_{(n-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}.$$

由 D, B^{-1} 和 x^* 的定义可得 $-B^{-1}(D + A)x^* = 0$, 因此 x^* 为系统的平衡点.

下证系统平衡点的唯一性. 设 $\lambda_i (i \in L)$ 为矩阵 $-B^{-1}(D + A)$ 的特征根, 由引理 2 可知, 秩 $(-(A + D)) = n - 1$. 由于 B^{-1} 可逆, 秩 $(-B^{-1}(A + D)) = \text{秩}(-(A + D)) = n - 1$, 矩阵 $(-B^{-1}(A + D))$ 的零特征根为单根.

对于任意的 $1 \leq i \leq n, d_{ii} = \sum_{j \in N_i} a_{ij}$, 由圆盘定理可知, 特征根 $\lambda_i (i \in L)$ 满足

$$\left| \lambda_i - \left(-\frac{1}{b_i} d_{ii} \right) \right| \leq \sum_{j \in N_i} \left| -\frac{1}{b_i} a_{ij} \right| = \frac{1}{b_i} d_{ii}.$$

因此, 矩阵 $-B^{-1}(D + A)$ 非零特征根具有负实部. 由线性系统 Lyapunov 稳定性定理可知, 系统最终收敛至平衡点 x^* , 即实现分组一致. \square

定理 2 拓扑结构 \mathcal{G} 为具有 n 个节点的连通二部图, 在控制协议 (4) 下, 多智能体系统实现加权分组一致, 且最终收敛于 $x^* = \underbrace{[a, a, \dots, a]}_r, \underbrace{[-a, \dots, -a]}_{n-r}^T$,

$$\text{其中 } a = \sum_{i=1}^r b_i x_i(0) - \sum_{i=r+1}^n b_i x_i(0).$$

证明 由定理 1 可知, 系统 (5) 能够实现分组一致, 且一致状态为 $x^* = \underbrace{[a, a, \dots, a]}_r, \underbrace{[-a, \dots, -a]}_{n-r}^T$. 为了实现系统的加权分组一致, 下面求 a 的最终值为系统各个初始值的加权状态之和.

首先, 令决策值

$$\tilde{x} = \text{Wave}^*(x) = \sum_{i=1}^r b_i x_i - \sum_{i=r+1}^n b_i x_i, \quad (8)$$

可得

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \sum_{i=1}^r b_i \dot{x}_i - \sum_{i=r+1}^n b_i \dot{x}_i = \sum_{i=1}^r b_i u_i - \sum_{i=r+1}^n b_i u_i = \\ &= - \sum_{i=1}^r \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t) + x_i(t)) + \\ &= \sum_{i=r+1}^n \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t) + x_i(t)). \end{aligned} \quad (9)$$

由引理 1 可知, 邻接矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0_{r \times r} & A_1 \\ A_1^T & 0_{(n-r) \times (n-r)} \end{bmatrix},$$

则式 (9) 可转化为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= - \sum_{i=1}^r \sum_{j \in N_i, j > r} a_{ij} (x_j(t) + x_i(t)) + \\ &= \sum_{i=r+1}^n \sum_{j \in N_i, j \leq r} a_{ij} (x_j(t) + x_i(t)) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

由此可得 \tilde{x} 为一个常量.

由 $\text{Wave}^*(x)$ 的定义, 可知

$$\text{Wave}^*(x^*) = \sum_{i=1}^r b_i a - \sum_{i=r+1}^n b_i (-a) = a,$$

由于 \tilde{x} 为一个常量, 可得

$$a = \text{Wave}^*(x^*) = \text{Wave}^*(x(0)).$$

根据定理 1 的结论, 可知系统的任意解收敛至平衡点 x^* , 且

$$x^* = \underbrace{[a, \dots, a]}_r, \underbrace{[-a, \dots, -a]}_{n-r}^T,$$

其中 $a = \sum_{i=1}^r b_i x_i(0) - \sum_{i=r+1}^n b_i x_i(0)$. 故系统可实现加权分组一致. \square

2.2 有时滞加权分组一致性控制器研究

由于网络通信过程不可避免会产生时滞, 设计带有时滞的控制器具有重要的实际意义. 结合文献 [18] 的构建方法, 本文设计了一种含有时滞的控制器, 使得在该控制器下, 系统达到分组加权一致, 并给出系统可容忍的最大时滞上界和系统最终的收敛状态.

定理 3 假设拓扑结构 \mathcal{G} 为具有 n 个节点的连通的二部图, 每个节点在接收信息时具有一个固定的时间延迟 $\tau > 0$. 如果在控制协议 (6) 下, τ 满足 $\max_{i \in L} \{d_i \tau / b_i\} < \pi/4$, 且当 $t \leq 0$ 时, 智能体的状态满足 $x_i(t) = x_i(0), i \in L$, 则系统实现加权分组一致, 且各个智能体最终收敛状态为 $\underbrace{[a, \dots, a]}_r, \underbrace{[-a, \dots, -a]}_{n-r}^T$. 其中

$$a = \sum_{i=1}^r b_i x_i(0) - \sum_{i=r+1}^n b_i x_i(0), d_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}, i \in L.$$

证明 首先, 用频域分析方法证明系统 (6) 的收敛性. 对系统 (6) 进行拉氏变换, 可得系统 (6) 的特征方程

$$\det(sI_n + e^{-\tau s} B^{-1}(D + A)) = 0. \quad (11)$$

考虑系统的特征值, 如果式 (1) 的特征值 s 满足 $s = 0$ 为单根, 而非零特征值具有负实部, 则系统可以达到稳定状态.

当 $s = 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \det(sI_n + e^{-\tau s} B^{-1}(D + A)) &= \\ \det(B^{-1}(D + A)) &= 0, \end{aligned}$$

由于秩 $B^{-1}(D + A) = n - 1, s = 0$ 为特征方程的单根, 由 $B^{-1}(D + A)$ 的构造可知, 特征值 $s = 0$ 对应的特征向量为 $\underbrace{[a, \dots, a]}_r, \underbrace{[-a, \dots, -a]}_{n-r}$, 其中 a 为一个非零常数, 则该点正好为系统的平衡点.

当 $s \neq 0$ 时, 令

$$F(s) = \det\left(I_n + \frac{e^{-\tau s}}{s} B^{-1}(D + A)\right), \quad (12)$$

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s} B^{-1}(D + A), \quad (13)$$

取 $s = j\omega$, 则式 (13) 可记为

$$G(j\omega) = \frac{e^{(-\tau j\omega)}}{j\omega} B^{-1}(D + A).$$

由此可得, 式 (11) 与 (12) 在 $s \neq 0$ 的情况下等价. 如果方程 (12) 的非零特征根都有负实部, 则系统 (4) 可达到一致性. 根据广义的奈氏准则, 式 (12) 的非零特征根具有负实部, 等价于 $G(j\omega)$ 的特征值 $\lambda(G(j\omega))$ 的奈氏曲线不包围 $-1 + j0$ 点.

根据圆盘定理, 可得

$$\lambda(G(j\omega)) \in \bigcup_{i \in L} G_i. \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} G_i = \\ \left\{ \eta : \eta \in \mathcal{C}, \left| \eta - \frac{1}{b_i} \sum_{j \in N_i} a_{ij} \frac{\exp(-j\omega\tau)}{j\omega} \right| \leq \right. \\ \left. \left| \frac{d_i \exp(-j\omega\tau)}{b_i j\omega} \right| \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

\mathcal{C} 为复数域. 由矩阵 D 的定义可知, 圆盘中心为

$$G_{i0}(j\omega) = \frac{d_i \exp(-j\omega\tau)}{b_i j\omega}.$$

设复平面原点 O 与圆心 G_{i0} 连线的延长线与圆盘边界相交于 W_i 点, 当圆盘 $G_{i0}(j\omega)$ 的奈氏曲线随着 $\omega \in \mathcal{R}$ 变化时, 圆盘 G_i 也会发生变化. 从而可知, W_i 也会发生变化, 端点 W_i 的变化曲线为

$$W_i(j\omega) = \frac{2d_i \exp(-j\omega\tau)}{b_i j\omega}.$$

结合引理 4, 可得

$$W_i(j\omega) = \frac{2d_i}{b_i} \times \frac{2\tau}{\pi} E_i(j\omega) = \frac{4\tau d_i}{b_i \pi} E_i(j\omega). \quad (16)$$

令 $\zeta_i = \frac{4\tau d_i}{b_i \pi}$, 则式 (16) 可以转化成

$$W_i(j\omega) = \zeta_i E_i(j\omega).$$

由定理可知, $\zeta_i = \frac{4\tau d_i}{b_i \pi} < 1$, 取 $\zeta = \max_{i \in L} \{\zeta_i\}$, 显然 $\zeta < 1$, 对于 $\forall i \in L$, 有下式成立:

$$\begin{aligned} \zeta \text{Co}(0 \cup E_i(j\omega)) &\supseteq \\ \zeta_i \text{Co}(0 \cup E_i(j\omega)) &= \text{Co}(0 \cup W_i(j\omega)). \end{aligned}$$

结合引理 4, 有

$$\begin{aligned} -1 + j0 &\notin \zeta \text{Co}(0 \cup \{E_i(j\omega), i \in L\}) \supseteq \\ \text{Co}(0 \cup \{W_i(j\omega), i \in L\}). \end{aligned}$$

由引理 3, 可得

$$\text{Co}(0 \cup \{W_i(j\omega), i \in L\}) \supseteq \bigcup_{i \in L} G_i,$$

所以有 $-1 + j0 \notin \bigcup_{i \in L} G_i$, 特征值 $\lambda(G(j\omega))$ 的轨迹不包含 $-1 + j0$ 点. 根据广义奈氏判据, 零特征根为单根,

所有非零特征根都具有负实部, 从而系统收敛到平衡点 $[a, a, \dots, a, -a, -a, \dots, -a]^T$.

根据 $\text{Wave}^*(x)$ 定义, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \sum_{i=1}^r b_i \tilde{x}_i - \sum_{i=r+1}^n b_i \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^r b_i u_i - \sum_{i=r+1}^n b_i u_i = \\ & - \sum_{i=1}^r \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t-\tau) + x_i(t-\tau)) + \\ & \sum_{i=r+1}^n \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t-\tau) + x_i(t-\tau)) = 0. \end{aligned}$$

设 x^* 为系统的平衡点, 则

$$x^* = [a, a, \dots, a, -a, -a, \dots, -a]^T,$$

根据 $\text{Wave}^*(x)$ 的定义, 有

$$\text{Wave}^*(x^*) = \sum_{i=1}^r b_i a - \sum_{i=r+1}^n b_i (-a) = a.$$

由于 \tilde{x} 为一个常量, 可得

$$a = \text{Wave}^*(x^*) = \text{Wave}^*(x(0)).$$

系统最终收敛到平衡点 $[a, \dots, a, -a, \dots, -a]^T$, 其中

$a = \text{Wave}^*(x(0))$. 系统最终实现加权分组一致. \square

3 仿真实例

为了验证本文结论的正确性, 给出几个仿真实例. 如图 1 所示, 考虑具有 5 个节点的多智能体系统

$$\dot{x}_i = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, 5.$$

其中: $x_i \in \mathcal{R}$ 为第 i 个节点的状态, $u_i \in \mathcal{R}$ 为第 i 个节点的控制规则. 初始状态 $x(0) = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_5(0)]^T$.

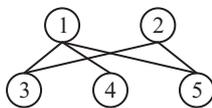


图 1 5 个节点构成的无向图

例 1 当系统不含时滞时, 设计具有 5 个节点的控制

$$u_i(t) = - \sum_{j \in N_i} \frac{1}{b_i} (x_i(t) + x_j(t)), \quad i = 1, 2, \dots, 5. \tag{17}$$

由定理 2 可知, 在控制协议 (4) 下, 系统 (1) 可实现分组加权一致.

为了验证上述结论的有效性, 给出以下仿真结果. 设计权值 $B = \text{diag}\{0.25, 0.2, 0.3, 0.1, 0.15\}$, 满足 $\sum_{i=1}^5 b_i = 1$, 给定初始条件 $x(0) = [12, -10, -8, -7, 6]^T$, 由定理 2 可知, 系统最终收敛到各个初始状态的权值, 即

$$\begin{aligned} [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t)]^T &\rightarrow \\ [3.2, 3.2, -3.2, -3.2, -3.2]^T, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

上述收敛状态的计算见式 (8).

为了验证上述系统在控制协议 (17) 下的收敛性, 给出如下仿真. 图 2 为含有 5 个节点的智能体系统在无时滞情况下的状态响应, 在控制协议 (18) 下, 各个状态会随着时间的变化而最终达到加权分组一致. 仿真结果有效验证了理论的正确性.

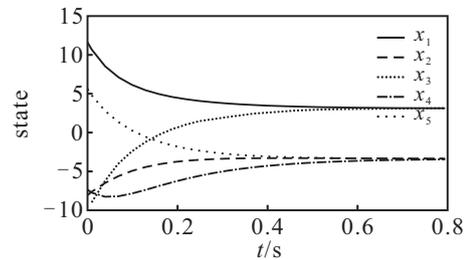


图 2 协议 (17) 下系统的状态响应

例 2 当系统存在时滞时, 图 1 对应的含有时滞环节的控制

$$\begin{aligned} u_i(t) &= - \sum_{j \in N_i} \frac{1}{b_i} (x_i(t-\tau) + x_j(t-\tau)), \\ & \quad i = 1, 2, \dots, 5, \end{aligned} \tag{18}$$

其中初始值与 b_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) 的设置与例 1 相同.

通过计算可知, $\max_{1 \leq i \leq 5} \left\{ \frac{d_i}{b_i} \right\} = 13.32$, 结合定理 3 系统的收敛条件可得, $\tau < \pi/53.28 \approx 0.06$.

图 3~图 5 为具有 5 个节点的智能体系统存在时滞情况时加权分组一致的仿真曲线, 随着 τ 取值的变化, 可以得到相应的仿真模拟图. 由图 3~图 5 可见, 当 $\tau < 0.06$ 时, 智能体实现加权分组一致. 当 $\tau = 0.07$ 不满足条件 $\max_{1 \leq i \leq 5} \{d_i \tau / b_i\} < \pi/4$ 时, 系统在协议

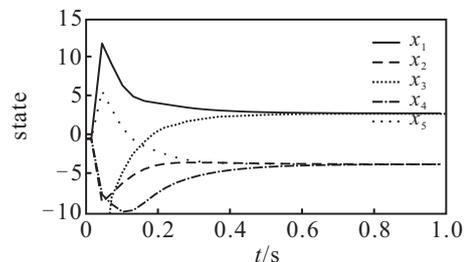


图 3 系统的状态响应 ($\tau = 0.03$)

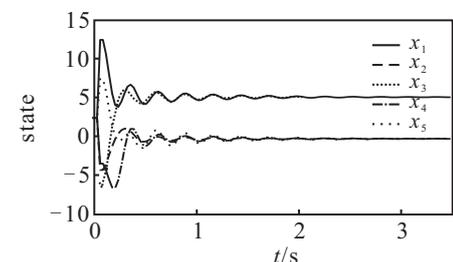


图 4 系统的状态响应 ($\tau = 0.06$)

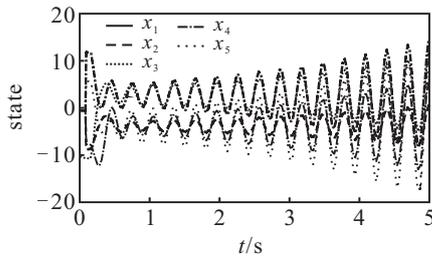


图5 系统的状态响应 ($\tau = 0.07$)

(18)下,各个智能体节点逐步发散.实验仿真有效验证了理论的正确性.

4 结论

本文针对连通二部图结构下的一阶多智能体系统,考虑了有无时滞两种情形下多智能体的加权分组一致问题.设计了一类基于竞争关系的分散协调控制协议,利用矩阵论与代数图论等有利工具,使得在该控制协议下,多智能体系统均可全局收敛到任意指定的加权一致状态,从而将现有文献的结果进行推广;此外,针对系统存在时滞情形、运用圆盘定理和广义奈氏准则,得到了系统达到收敛时可能容忍的最大时延上界.仿真实例对结果进行了有效验证.

参考文献(References)

- [1] Sun Y G. Average consensus in networks of dynamic agents with uncertain topologies and time-varying delays[J]. J of the Franklin Institute-engineering and Applied Mathematics, 2012, 349(3): 1061-1073.
- [2] Su H S, Chen M Z Q, Wang X F, et al. Semiglobal observer-based leader-following consensus with input saturation[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2014, 61(6): 2842-2850.
- [3] Su H S, Rong Z H, Chen M Z Q, et al. Decentralized adaptive pinning control for cluster synchronization of complex dynamical networks[J]. IEEE Trans on Cybernetics, 2013, 43(1): 394-399.
- [4] Gao Y P, Wang L. Sampled-data based consensus of continuous-time multi-agent systems with time-varying topology[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(5): 1226-1231.
- [5] Vicsek T, Czirok A, Ben-Jacob E. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. Physical Review Letters, 1995, 75(6): 1226-1229.
- [6] Reynolds C W. Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model[J]. Computer Graphics, 1987, 21(4): 25-34.
- [7] Jadhavaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(6): 988-1001.

- [8] Moreau L. Stability of multi-agent systems with time-dependent communication links[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(2): 169-182.
- [9] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.
- [10] Wang Y Z, Zhang C H, Liu Z B. A matrix approach to graph maximum stable set and coloring problems with application to multi-agent systems[J]. Automatica, 2012, 48(7): 1227-1236.
- [11] Xia W G, Cao M. Clustering in diffusively coupled networks[J]. Automatica, 2011, 47(11): 2395-2405.
- [12] Yu J Y, Wang L. Group consensus of multi-agent systems with undirected information exchange[J]. Int J of Systems Science, 2012, 43(2): 334-348.
- [13] Wang Q, Wang Y Z. Cluster synchronization of a class of multi-agent systems with a bipartite graph topology[J]. Science China Information Sciences, 2014, 57: 012203.
- [14] Yu J Y, Wang L. Group consensus of multi-agent systems with switching topologies and communication delays[J]. Systems and Control Letters, 2010, 59(6): 340-348.
- [15] Godsil C, Royle G. Algebraic graph theory[M]. New York: Springer, 2001: 1-443.
- [16] Horn R, Johnson C. Matrix analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1985: 1-662.
- [17] 俞辉, 蹇继贵, 王永骥. 多智能体有向网络的加权平均一致性[J]. 微计算机信息, 2007, 23(2): 239-241.
(Yu H, Jian J G, Wang Y J. Weighted average consensus for directed networks of multi-agent[J]. Microcomputer Information, 2007, 23(2): 239-241.)
- [18] 俞辉, 蹇继贵, 王永骥. 多智能体时滞网络的加权平均一致性[J]. 控制与决策, 2007, 22(5): 558-562.
(Yu H, Jian J G, Wang Y J. Weighted average consensus for networks of multi-agent with time delays[J]. Control and Decision, 2007, 22(5): 558-562.)
- [19] 王强, 王玉振, 杨仁明. 一类多智能体系统分组一致控制协议的设计与分析[J]. 控制与决策, 2013, 28(3): 369-374.
(Wang Q, Wang Y Z, Yang R M. Design and analysis of Group-consensus protocol for a class of multi-agent systems[J]. Control and Decision, 2013, 28(3): 369-374.)
- [20] 纪良浩, 廖晓峰, 刘群. 时延多智能体系统分组一致性分析[J]. 物理学报, 2012, 61(22): 220202.
(Ji L H, Liao X F, Liu Q. Group consensus analysis of multi-agent systems with delays[J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(22): 220202.)