

基于切换控制的经济模型预测控制

黄静雯, 李宏光

(北京化工大学 信息科学与技术学院, 北京 100029)

摘要: 为了提升经济模型预测控制的经济性能指标, 提出一种切换控制策略. 首先, 依据 Lyapunov 稳定性理论给出理想和扰动下的两类估计可行域, 并实时检测系统状态; 然后, 根据系统状态所处不同区域, 采用相应的控制器分别实施经济优化、状态驱动和稳态驱动. 所提方法在保证稳定性的同时, 能够为经济性能优化提供更多的在线优化时间和优化自由度, 获得比传统方法更高的经济效益. 通过一个负阻振荡器实例验证了所提出方法的可行性和有效性.

关键词: 经济模型预测控制; 切换控制; Sontag 控制器; 可行域; 状态反馈控制器

中图分类号: TP29

文献标志码: A

Switching control-based economic model predictive control

HUANG Jing-wen, LI Hong-guang

(College of Information Science and Technology, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China. Correspondent: LI Hong-guang, E-mail: lihg@mail.buct.edu.cn)

Abstract: A switching control strategy is proposed for improving the economic performance of the economics-based model-predictive control(EMPC). Firstly, based on the Lyapunov stability theory, two kinds of feasible regions which are with and without disturbances are defined, and the system state is detected in real time. Then, the corresponding controller is implemented for economic optimization, state driving and stability driving respectively according to the different regions which the system state belongs to. This method provides more degrees of freedom and on line optimization time for economic optimization on the promise of guaranteeing stability, therefore obtaining higher economic performance than traditional methods. The proposed EMPC designs are illustrated through a negative resistance oscillator example and their feasibility and effectiveness are evaluated through simulations.

Keywords: economic model predictive control; switching control; Sontag controller; feasible region; state feedback controller

0 引言

经济模型预测控制(EMPC)将过程的动态模型引入决策层, 克服了传统双层模型预测控制(MPC)结构存在的模型不一致以及设定点不可达等问题^[1]. 同时, 研究发现, 对于渐近稳定的EMPC, 动态约束下所获得的经济性能的平均指标要至少优于稳态约束条件下的经济性能指标^[2-3]. 其原因在于, 传统MPC将状态限制于稳定状态下, 减少了优化的自由度, 而EMPC打破了稳态约束条件对经济目标的限制, 将MPC对设定点的跟踪变换为在动态过程中实时保证经济目标函数的最优性. 此类研究已经取得了一系列的成果, 并得到了推广和应用^[4-5]. 但是, 动态约束下的优化往往带来更多的稳定性问题.

传统的EMPC在处理稳定性问题时采用终端等式约束、终端代价函数和终端集约束等方法在原始EMPC优化问题上附加稳定条件, 补偿有限时域后的无穷时域部分. 例如, 采用终端等式约束, 强制状态终端返回平衡点^[6-7]; 采用终端约束集策略, 在约束集内利用 k 时刻的可行解构造EMPC在 $k+1$ 时刻的候选解^[8-9]. 当系统状态进入约束集内部时, 采用线性反馈控制器进行控制. 但此类方法在每个滚动时刻都将优化问题限制在稳定点上, 寻优可行域小, 优化自由度少. 同时, 人为约束的加入使得在线计算量、控制性能和系统初始可行域之间的矛盾更加突出^[10]. 在终端集不变条件下, 只有增大控制时域长度才能扩大系统的初始可行域, 获取好的控制性能, 但如此操作加大

收稿日期: 2014-09-23; 修回日期: 2015-02-12.

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(21376014); 中央高校基本科研业务费(YS1404, zz1310); 国家质检总局科技计划项目(2015IK048).

作者简介: 黄静雯(1978—), 女, 讲师, 博士, 从事模型预测控制、大系统优化的研究; 李宏光(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事过程性能监督与优化等研究.

了控制器的在线计算量. 众多的研究表明, EMPC 的经济性能与稳定性能之间存在着一定的矛盾. 如何在确保稳定性条件下更大幅度地提升其经济性能指标, 是 EMPC 研究的关键问题之一.

本文针对该问题, 研究设计了切换控制策略, 将基于 Lyapunov 函数的有界控制与 EMPC 的优化有机结合, 在不同状态下实施经济优化、状态驱动和稳态驱动. 该策略一方面给 EMPC 动态优化赋予最大自由度, 扩大了寻优可行域, 另一方面在减少稳定驱动时间的前提下为 EMPC 提供了稳定性保障.

1 传统 EMPC 及存在的问题

考虑如下连续时间约束非线性系统:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad x(t) \in X, \quad u(t) \in U, \quad (1)$$

其中 X 和 U 分别为操纵变量 $x(t)$ 和状态变量 $u(t)$ 的约束集合.

EMPC 打破了稳态约束对经济目标的限制, 将 MPC 对稳态点的跟踪变为在动态过程中实时优化经济目标函数, 即直接将经济目标作为 EMPC 的目标函数, 表示为

$$\begin{aligned} \max(J(\tilde{x}(t_k), u)) &= \max \frac{1}{N} \sum_{t=t_k}^{t=t_k+N} \int_{t_k}^{t_f} L(\tilde{x}(t), u(t)) dx; \\ \text{s.t. } \dot{\tilde{x}}(t) &= f(\tilde{x}(t)) + g(\tilde{x}(t))u(t), \\ \tilde{x}(t_k) &= x(t_k), \\ \tilde{x}(t_{k+N}) &= x(t_k), \\ \tilde{x}(t_{k+N}) &\in \Omega, \\ u(t) &\in U, \\ \tilde{x}(t) &\in X, \\ t_k < t < t_{k+N}. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $L(\tilde{x}(t), u(t))$ 为 EMPC 对应的经济目标函数, N 为 EMPC 的预测时域长度值, t_f 为优化时间终端. 为了简便起见, 令优化时间长度 $(t_f - t_k)$ 等于给定采样间隔. Ω_s 表示终端稳态约束集; $\tilde{x}(t_k)$ 表示 EMPC 每个滚动时刻的状态初始值, $\tilde{x}(t_k) = x(t_k)$ 表示状态初始值来源于 k 时刻的状态测量变量 $x(t_k)$. 状态初始值是函数 (2) 求解最优解 $(\tilde{x}^*(t), u^*(t))$ 的重要元素. 同时, 输入序列 $u = (u(t_k), u(t_{k+1}), \dots, u(t_{k+N}))$ 是否可行也取决于控制输入序列及状态初始值 $\tilde{x}(t_k)$ 共同作用下的状态序列是否满足优化问题的约束.

传统方法求解问题 (1) 时, 采用罚函数将附加约束 $\tilde{x}(t_{k+N}) \in \Omega$ 惩罚于目标函数中. 但该罚函数的引入会使系统在经济寻优的同时寻找到达该约束条件的最短路径, 这必然将经济指标的最优路径限制在稳定性最优的路径上, 严重影响了经济寻优的自由度. 如果能够找到一个可行域, 既能最大限度地进行经济

寻优, 又能够保证在有限的时间内将系统状态驱动到期望的点上或区域内, 那么就能在保证稳定性的前提下扩大寻优可行域, 增加自由度, 提升经济性能指标. 更进一步, EMPC 不需要在每个有限时域内都进行稳态驱动, 而只需在优化的最终阶段实施稳态驱动, 可为在线经济优化争取更多的在线优化时间.

2 基于切换控制的 EMPC 策略

2.1 切换控制策略

给定扰动和理想状态下的两类可行域 $\Omega_{\rho'}$ 和 Ω_{ρ} , 并在线检测每个滚动时域的状态值. 当初始状态位于扰动可行域 $\Omega_{\rho'}$ 时, 采用 EMPC 控制器实施经济模型预测控制; 当初始状态位于扰动可行域 $\Omega_{\rho'}$ 和理想可行域 Ω_{ρ} 之间时, 采用 Sontag 控制器将状态驱动到扰动可行域 $\Omega_{\rho'}$ 内部, 重新选取 $\Omega_{\rho'}$ 内部的状态作为 EMPC 的初始条件; 在优化的最后阶段, 采用状态反馈控制器将状态驱动到稳态点. 该策略的表达式为

$$\max(J(\tilde{x}(t_k), u)) = \max \frac{1}{N} \sum_{t=t_k}^{t=t_k+N} \int_{t_k}^{t_f} L(\tilde{x}(t), u(t)) dx. \quad (3)$$

$$\text{s.t. } \dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x}(t)) + g(\tilde{x}(t))u^i(t); \quad (4)$$

$$\tilde{x}(t_k) = x(t_k); \quad (5)$$

$$u^i(t) = u^{\text{EMPC}}(t), V(\tilde{x}(t)) \leq \rho, \quad i = 1, \\ \text{if } V(\tilde{x}(t)) \leq \rho' \text{ and } t \leq t_{k+1} - T; \quad (6)$$

$$u^i(t) = h(\tilde{x}(t_k)), \quad i = 2, \\ \text{if } \rho' \leq V(\tilde{x}(t)) \leq \rho \text{ and } t \leq t_{k+1} - T; \quad (7)$$

$$u^i(t) = p\tilde{x}(t) + g, \quad i = 3, \text{ if } t > t_{k+1} - T; \quad (8)$$

$$\tilde{x}(t) = x_s, \text{ if } t = t_{k+N} + T; \quad (9)$$

$$u^i(t) \in U; \quad (10)$$

$$t_k < t < t_{k+N}. \quad (11)$$

其中: $x(t_k)$ 为 k 时刻的状态测量变量, 是 EMPC 在滚动优化过程中对应的状态初始值; T 为状态驱动器将状态由 $\Omega_{\rho'}$ 边沿驱动到稳态点所需的驱动时间; x_s 为稳态点. 当检测到状态初始值 $x(t_k)$ 位于 $\Omega_{\rho'}$ 内部, 即符合式 (6) 所述条件时, 系统控制器切换为经济模型预测控制器 $u^{\text{EMPC}}(t)$ 进行经济模型预测控制, 并对 $t \in [t_k, t_{k+N}]$ 阶段的预测状态增添边界约束 $V(\tilde{x}(t)) \leq \rho$, 其中 $V(x)$ 为 Lyapunov 函数. 该边界约束将系统预测状态限制在理想可行域内, 也保证了即使在经济优化过程中发生状态逃逸, 系统也能够拥有足够的时间将状态驱动回稳态点. 经济模型预测控制器在 $\Omega_{\rho'}$ 内部不需要像传统模型预测控制一样将优化问题限制在稳定路径上, 而是以式 (3) 为目标进行动态优化, 可以最大程度地利用 $\Omega_{\rho'}$ 内的可行域寻优. 式 (7) 表示当检测到系统初始状态值 $x(t_k)$ 位于 $\Omega_{\rho'}$ 与 Ω_{ρ} 边界之间时, 控制器切换为 Sontag 控制器

$h(x(t))$, 其功能是将系统状态驱动进入 $\Omega_{\rho'}$ 内部. 在优化的最后阶段, Riccati 状态反馈控制器 $u^3(t) = p\tilde{x}(t) + g$ 将状态驱动到稳态点, 其中 p 和 g 代表最优控制律系数, 可利用 Riccati 方程求解.

2.2 切换控制策略的实施步骤

本文提出的策略中, 在不同的阶段采用不同的控制器以确保系统的稳定和运行的最优. 当检测到系统状态位于扰动可行域 $\Omega_{\rho'}$ 内时, 启动 EMPC 控制器, 用于经济优化; 当系统状态超出扰动可行域 $\Omega_{\rho'}$ 时, 采用 Sontag 控制器将状态驱动到扰动可行域 $\Omega_{\rho'}$ 内部. 优化最后阶段的稳态驱动采用线性化方法, 利用 Riccati 状态反馈控制器进行驱动. 算法的实施包括离线和在线两个部分.

1) 离线部分.

Step 1: 设计 Sontag 控制器和状态反馈控制器, 确定 Lyapunov 函数 $V(x)$ 、控制参数和系数;

Step 2: 令 $u^2(t) = h(x(t_k))$, 并在约束下求取 $\rho = \max(V(x))$ 的估计值, 获取无扰动可行域 Ω_{ρ} ;

Step 3: 根据扰动以及约束求取 $\rho' = \max(V(x))$ 的估计值, 获取扰动可行域 $\Omega_{\rho'}$;

Step 4: 计算采用驱动器 $u^3(t) = p\tilde{x}(t) + g$ 由 $\Omega_{\rho'}$ 边沿将状态驱动到稳态点所需时间 T .

2) 在线部分.

Step 1: 对于 $t \in [t_k, t_{k+N}]$, 若 $t < t_{k+1} - T$, 则实施 Step 2, 否则实施 Step 3.

Step 2: 判断初始值 $x(t_k)$ 所处区域, 如果初始值位于 $\Omega_{\rho'}$ 内, 则采用 $u^1(t) = u^{\text{EMPC}}(t)$ 进行经济模型预测控制; 如果状态初始值位于 $\Omega_{\rho'}$ 与 Ω_{ρ} 边界之间, 则采用驱动器 $u^2(t) = h(x(t_k))$, 将状态驱动到 $\Omega_{\rho'}$ 内部, $k = k + 1$, 并返回 Step 1.

Step 3: 采用 $u^3(t) = p\tilde{x}(t) + g$, 将系统状态驱动到稳态点.

3 切换控制策略的性能分析

3.1 扰动下的 EMPC 状态分析

假定存在有界扰动 $d(t)$, 系统分别存在无扰动和被扰动的两个状态 $x(t)$ 和 $x'(t)$, 且 $x(t_0) = x'(t_0)$. 其中, 有界扰动包括上一时刻有限时间预测产生的误差, 以及外界干扰等所有对下一时刻的影响.

由局部 Lipschitz 和 Gronwall-Bellman 引理可知, 对于扰动有界, 在任意 $t > t_0$ 时刻, 存在 k 函数 $\alpha_d(\cdot)$, 满足

$$\|x(t) - x'(t)\| \leq \alpha_d(t - t_0), \quad (12)$$

其中

$$\alpha_d = \frac{M\delta}{L}(e^{L(t-t_0)} - 1).$$

对于固定的初始时间点 t_0 , M 、 L 和 δ 均为大于

零的常数. 由泰勒展开式可知, $V(x)$ 可在 x' 处进行泰勒展开, 从而得到

$$V(x) \leq V(x') + \frac{\partial V}{\partial x}(|x - x'|) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2(|x - x'|)^2. \quad (13)$$

根据 Sontag 理论^[11], 存在 k 函数 $\alpha_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, 4$, 及连续可微 Lyapunov 函数 $V(x)$, 满足

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|); \quad (14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, h_1(x), \dots, h_m(x), 0) \leq -\alpha_3(|x|); \quad (15)$$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| \leq \alpha_4(|x|); \quad (16)$$

$$h_i(x) \in U_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (17)$$

其中

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{L_f V(x) + \sqrt{|L_f V(x)|^2 + |L_g V(x)|^4}}{|L_g V(x)|^2} |L_g V(x)|^T, \\ |L_g V(x)|^T \neq 0; \\ 0, |L_g V(x)|^T = 0; \end{cases} \quad (18)$$

$$L_f V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x);$$

$$L_g V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} g(x).$$

在 Sontag 控制器约束下求理想状态下的 Lyapunov 函数最大值, 可以获得无扰动可行域边界

$$\begin{aligned} \rho &= \max V(x); \\ \text{s.t. } x &\in X, \\ h(x) &\in U. \end{aligned} \quad (19)$$

同理可求得扰动下可行域边界值 ρ' , 并假定 $\rho' \leq \rho$.

根据式 (14) 和 (16), 式 (13) 变换为

$$\begin{aligned} V(x) &\leq \\ V(x') + \alpha_4(\alpha_1^{-1}(\rho))|x - x'| + (\alpha_4(\alpha_1^{-1}(\rho)))^2(|x - x'|)^2, \end{aligned} \quad (20)$$

由式 (12) 得

$$\begin{aligned} V(x) &\leq \\ V(x') + \alpha_4(\alpha_1^{-1}(\rho))\alpha_d(\Delta) + (\alpha_4(\alpha_1^{-1}(\rho)))^2(\alpha_d(\Delta))^2, \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\Delta = t - t_0.$$

令

$$\begin{aligned} \alpha(\Delta) &= \\ \alpha_4(\alpha_1^{-1}(\rho))\alpha_d(\Delta) + (\alpha_4(\alpha_1^{-1}(\rho)))^2(\alpha_d(\Delta))^2, \end{aligned} \quad (22)$$

则有

$$V(x) \leq V(x') + \alpha(\Delta). \quad (23)$$

当 $x'(t_k) \in \Omega_{\rho'}$, 即 EMPC 的初值位于可行域 $\Omega_{\rho'}$ 内时, 假定在滚动时域 N 步之内 EMPC 滚动时域控制下的扰动状态不变, 为

$$V(x'(t_{k+N})) \leq \rho', \quad (24)$$

即 $x'(t_{k+n}) \in \Omega_{\rho'}$.

对于式 (23), 有

$$V(x(t_{k+N})) \leq V(x'(t_{k+N})) + \alpha(\Delta). \quad (25)$$

令

$$\rho' \leq \rho - \alpha(\Delta), \quad (26)$$

由式 (24)~(26) 可得

$$V(x(t_{k+N})) \leq \rho, \quad (27)$$

$$x(t_{k+N}) \in \Omega_{\rho}. \quad (28)$$

结论 1 式 (28) 表明, 当 EMPC 的状态初始值位于 $\Omega_{\rho'}$ 内, 并在该可行域内进行经济优化时, 其状态终值可被限定在可行域 Ω_{ρ} 内.

当 $x'(t_k) \in (\Omega_{\rho} - \Omega_{\rho'})$, 即 EMPC 的初值位于 $\Omega_{\rho'}$ 与 Ω_{ρ} 之间时, 假定在滚动时域 N 步之内 EMPC 滚动时域控制下的扰动状态不变, 即为

$$\rho' \leq V(x'(t_{k+N})) \leq \rho, \quad (29)$$

$$V(x(t_{k+N})) \leq \rho + \alpha(\Delta). \quad (30)$$

结论 2 式 (30) 表明, 当初始值位于 $\Omega_{\rho'}$ 与 Ω_{ρ} 之间的区域时, EMPC 经历 N 步优化后可能出现状态位于 Ω_{ρ} 之外的情况, 即出现状态逃逸.

由结论 1 可知, $\Omega_{\rho'}$ 是 EMPC 的可行域, 当初值位于该可行域时, 经济优化是可行的, 但可能会导致状态终值位于 $\Omega_{\rho'}$ 与 Ω_{ρ} 之间. 由结论 2 可知, 当系统状态位于 $\Omega_{\rho'}$ 与 Ω_{ρ} 之间时, 进一步进行 EMPC 优化会出现状态逃逸, 不能保证系统的稳定性. 为此, 一旦检测到状态位于 $\Omega_{\rho'}$ 和 Ω_{ρ} 之间, 就需要启动状态驱动, 将在线状态驱动到 $\Omega_{\rho'}$ 内.

3.2 Sontag 控制器控制下的系统状态分析

状态驱动采用 Sontag 控制器. 根据式 (1), 有

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x}(t) = \frac{\partial V}{\partial x} (f(x(t)) + g(x(t))h(x(t))), \quad (31)$$

$$\dot{V}(x(t)) = L_f V(x(t)) + L_g V(x(t))h(x(t)), \quad (32)$$

$$\dot{V}(x) = -\sqrt{|L_f V(x)|^2 + |L_g V(x)|^4}. \quad (33)$$

给定采样间隔 Δ_1 , 则有

$$u(t) = h(x(k\Delta_1)) = h(k), \quad \forall k\Delta_1 \leq t \leq (k+1)\Delta_1. \quad (34)$$

结合式 (32) 和 (33) 可知

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(k\Delta_1)) &= \\ & -\sqrt{|L_f V(x(k\Delta_1))|^2 + |L_g V(x(k\Delta_1))|^4} = \\ & L_f V(x(k\Delta_1)) + L_g V(x(k\Delta_1))h(k). \end{aligned} \quad (35)$$

对式 (32) 作变换, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(k\Delta_1)) &= \\ & L_f V(x(k\Delta_1)) + L_g V(x(k\Delta_1))h(k) + \\ & L_f V(x(t)) - L_f V(x(k\Delta_1)) + \\ & (L_g V(x(t))h(x(t)) - L_g V(x(k\Delta_1))h(k)). \end{aligned} \quad (36)$$

由式 (12) 可以推理

$$\|x(t) - x(k\Delta_1)\| \leq \alpha_d(t - k\Delta_1) \leq \alpha_d \Delta_1. \quad (37)$$

同理, 存在 k 函数 $\alpha_d(\cdot)$ 和 $\alpha_g(\cdot)$ 使得

$$\|L_f V(x(t)) - L_f V(x(k\Delta_1))\| \leq \alpha_f(x(k\Delta_1))\alpha_d \Delta_1, \quad (38)$$

$$\|(L_g V(x(t))h(x(t)) - L_g V(x(k\Delta_1))h(k))\| \leq \alpha_g(x(k\Delta_1))\alpha_d \Delta_1. \quad (39)$$

式 (36) 变化为

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq \\ & -\sqrt{|L_f V(x(k\Delta_1))|^2 + |L_g V(x(k\Delta_1))|^4} + \\ & \alpha_f(x(k\Delta_1))\alpha_d \Delta_1 + \alpha_g(x(k\Delta_1))\alpha_d \Delta_1. \end{aligned} \quad (40)$$

令

$$\rho_m = \sqrt{|L_f V(x(k\Delta_1))|^2 + |L_g V(x(k\Delta_1))|^4}, \quad (41)$$

$$K = \max(\alpha_f(x(k\Delta_1))\alpha_d + \alpha_g(x(k\Delta_1))\alpha_d), \quad (42)$$

且假定存在大于零的常数 ε , 则

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\rho_m + k\Delta_1 \leq -\varepsilon. \quad (43)$$

为了保证闭环系统的稳定性, 要求采样周期 Δ_1 满足

$$\Delta_1 \leq (\rho_m - \varepsilon)/K. \quad (44)$$

由式 (43) 和 (44) 可知, 当采样时间足够小时, 满足

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\varepsilon. \quad (45)$$

上式不等号两侧对时间积分得

$$V(x(t_{k+1})) \leq V(x(t_k)) - \varepsilon \Delta_1. \quad (46)$$

由此可得

$$V(x(t)) \leq V(x(t_k)) - (t - t_k)\varepsilon, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+N}]. \quad (47)$$

结论 3 对于位于 $\Omega_{\rho'}$ 与 Ω_{ρ} 边界之间的初值 $x(t_k)$, 存在 ε 使得状态能够在有限时间段内被 Sontag 控制器驱动到期望的可行域 $\Omega_{\rho'}$ 内.

3.3 状态反馈控制器及其复杂度分析

除了在空间上获得更多的优化自由度, 本策略还侧重于减少用于稳态驱动的时间, 将更多的时间用于优化. 为此, 在每个滚动时域内, 不考虑稳态驱动问题, 而仅在优化的最后时刻采用较少的时间将系统驱动到稳定点附近的邻域中.

在最后的稳态驱动过程中, 算法的效率和速度是影响实施的重要因素, 稳态驱动控制器的性能是否优良直接影响 EMPC 性能. 通过对比 Sontag 控制器和 Riccati 状态反馈控制器的时间复杂度, 选择状态反馈控制器作为收敛的控制器. 其理论分析如下:

在理想情况下, 令 $V(x) = x^T P x$, 由渐近稳定条件得

$$V(x(t)) \leq V(x(t_0)) + \int_{t_0}^t \dot{V}(x(t)) dt. \quad (48)$$

对于 Sontag 控制器和 Riccati 状态反馈控制器, 在相同初始条件下, 有限时间的收敛过程中的复杂度

是影响两者算法速度的关键因素。

已知 Sontag 控制器对应的 Lyapunov 函数为

$$\dot{V}_s(x(t)) = -\sqrt{|L_f V(x(t))|^2 + |L_g V(x(t))|^4}. \quad (49)$$

Riccati 的状态反馈控制器对应的 Lyapunov 函数为

$$\dot{V}_R(x(t)) = -x^T x. \quad (50)$$

定理 1 如果能够找到式 (1) 对应的非线性公式的最简规范型, 则在系统渐近稳定问题上, 状态反馈控制器比 Sontag 控制器要更加灵敏快速。

证明 取非线性系统 (1) 对应的最简规范型

$$f(x) = Ax + B^i(x), \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (51)$$

令 $A = 0, i = 2, B(x) = x$, 则得到

$$\dot{x} = x^2 + u. \quad (52)$$

对于 Sontag 控制器, 有

$$L_f V(x(t)) = (x^2)^T P x + x^T P x^2, \quad (53)$$

$$L_g V(x(t)) = P x + x^T P, \quad (54)$$

$$\dot{V}_s(x(t)) = -\sqrt{|(x^2)^T P x + x^T P x^2|^2 + |P x + x^T P|^4}. \quad (55)$$

如果存在常数 n_1, n_2 , 且 $n_1 > n_2$, 则 $O(x^{n_1}) > O(x^{n_2})$, 其中 O 为时间复杂度。比较式 (50) 和 (55), 有

$$O(\dot{V}_s(x(t))) > O(\dot{V}_R(x(t))). \quad (56)$$

从时间复杂度上可见, 使用状态反馈控制器的计算速度要比使用 Sontag 控制器快。□

采用 Riccati 状态反馈控制器控制非线性系统时, 需要在稳态点附近近似线性化。对于远离稳态点的状态而言, 线性化误差增大。因此, 此类控制器适用于稳态点附近较小邻域内的控制。同时, 时间复杂度小等特点决定了该控制器在稳态驱动方面的优势。

4 实例

已知一类负阻振荡器^[12]的电压 v 满足范德波尔振荡器函数 $h'(v) = -v + \frac{1}{3}v^3$, 选择变量 $x_1 = v, x_2 = \dot{v} + \varepsilon h'(v)$, 得到该负阻振荡器的动态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_2^3 + 2u. \end{cases} \quad (57)$$

其状态约束和控制约束为 $X = (-5 \leq x \leq 5, i = 1, 2), U = (-6 \leq u \leq 6)$ 。

给出其 EMPC 性能指标函数为

$$\max \frac{1}{N} \sum_{t=t_k}^{t=t_k+N} \int_{t_k}^{t_f} ((2-x_1)^2 + 2u^2) dx. \quad (58)$$

构造 Lyapunov 函数

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2). \quad (59)$$

本例中, Lyapunov 函数与经济目标函数并不一致。为了兼顾经济性能和稳态性能, 并在保证稳态的前提下进行经济寻优, 采用本文提出的切换控制策

略。首先根据算法离线部分策略, 获取各参数。根据式 (18) 设计 Sontag 控制器 $h(x)$, 使其具有镇定和驱动功能

$$\begin{cases} L_f V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = x_2^2 - \frac{1}{3}x_2^4, \\ L_g V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} g(x) = 2x_2; \end{cases} \quad (60)$$

$h(x) =$

$$\begin{cases} x_2^2 - \frac{1}{3}x_2^4 + \sqrt{|x_2^2 - \frac{1}{3}x_2^4|^2 + |2x_2|^4} \\ - \frac{|2x_2|^T}{|2x_2|^2} |2x_2|^T, \\ |2x_2|^T \neq 0; \\ 0, |2x_2|^T = 0. \end{cases} \quad (61)$$

根据约束 X, U 和式 (19), 求解 Lyapunov 函数 $V(x)$ 的最大值 ρ , 获取理想可行域 $\Omega_\rho = (\rho' < 15.26)$ 。考虑有界扰动噪声 $d = [d_1, d_2]^T, |d_1| < 1 \text{ kmol/m}^3, |d_2| < 1 \text{ kmol/m}^3$, 得到 $\Omega_{\rho'} = (\rho' < 10.75)$ 。在图 1 中, $\Omega_{\rho'}$ 和 Ω_ρ 分别用实、虚椭圆图形表示。计算采用状态驱动器将状态由 $\Omega_{\rho'}$ 边沿驱动到稳态点所需驱动时间, 得 $T = 10 \text{ s}$ 。

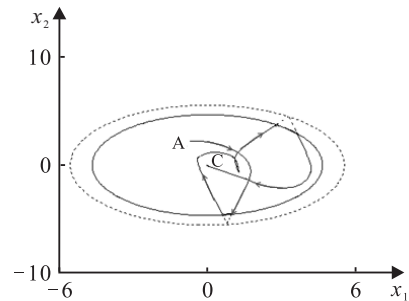
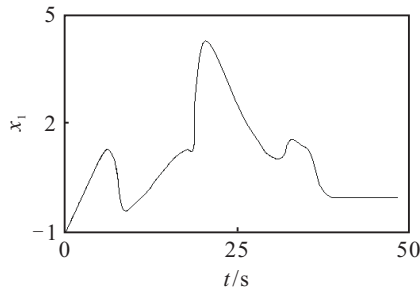
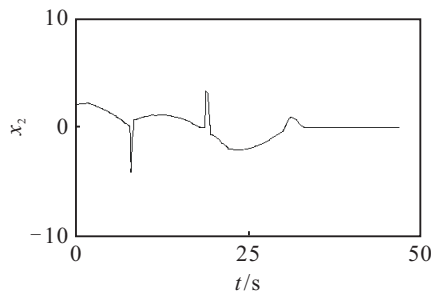


图 1 切换控制器作用下的系统轨迹

根据在线算法步骤, 在有足够优化时间的情况下, 在线检测状态变量, 并根据 ρ' 和 ρ 的值判断状态所处位置。若状态位于扰动可行域 $\Omega_{\rho'}$ 内, 则启用 EPMC 控制器, 采用滚动策略获取操纵变量序列, 并取第 1 个操作变量施加到实际系统, 再采用实际系统状态值更新 EMPC 的状态初值。在 EMPC 滚动优化过程中, 各类扰动使 EMPC 状态不断发生逃逸。根据本文策略, 一旦发现系统状态逃逸出扰动可行域 $\Omega_{\rho'}$, 则立刻启动 Sontag 驱动器, 将系统状态驱动到扰动可行域 $\Omega_{\rho'}$ 内部。本例中, 以 A 点 $(-1.1, 2)$ 作为初始点进行经济模型预测控制。如图 1 所示, 在优化过程中, 状态两次逃逸出 $\Omega_{\rho'}$ 。采用本文策略, 系统状态被驱动回 $\Omega_{\rho'}$ 内部。在优化的最优阶段, 启动状态反馈控制器, 将系统驱动到稳定点 C。图 2 和图 3 分别是此过程中对应的状态变量 x_1 和 x_2 随时间变化的曲线。

图 3 显示了系统状态 x_2 在 $t = 7 \text{ s}$ 和 19 s 时出现了逃逸。结合图 1 可以看出, 逃逸范围限制在 Ω_ρ (图 1 所示椭圆实线为扰动可行域, 椭圆虚线为理想可行

图 2 x_1 的状态曲线图 3 x_2 的状态曲线

域, 轨迹虚线为逃逸轨迹)内。一旦发现出现了状态逃逸, 系统启动 Sontag 控制器将其驱动回 $\Omega_{\rho'}$ 。系统在 $t = 30\text{s}$ 采用状态反馈控制器将状态向稳定点驱动, 历时 T 达到稳定。

传统 EMPC 在优化过程将稳定性问题作为约束条件, 为了保证系统的稳定性, 需要在每个滚动时域中同时进行经济目标寻优和稳态驱动, 其控制器作用下的系统轨迹如图 4 所示。

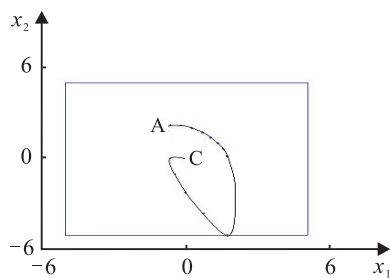


图 4 传统 EMPC 控制器作用下的系统轨迹

与传统 EMPC 方法相比, 基于切换控制的方法为经济性能提供了更多的寻优自由度和优化时间, 能够促进经济性能的进一步提升。本例中, 采用本文提出的方法获得的经济效益(动态平均目标函数值为 1.6066)优于 EMPC(动态平均目标函数值为 0.7258)。实例进一步验证了所提出方法的有效性。

5 结 论

传统的 EMPC 方法在优化的同时考虑稳态问题, 将优化限制在特定的寻优路线上, 并在每个滚动环节考虑稳态驱动问题。基于切换控制策略的优势在于, 在保证有足够的时间进行稳态驱动的情况下给经济优化提供更多的自由度和在线优化时间, 扩大了寻优的可行域和在线优化时间, 促进了经济效益和稳定性

能的同步提高。通过理论推导证明了所提方法的可行性, 同时, 基于此理论的仿真验证表明, 采用切换控制的 EMPC 方法实现的经济效益高于传统 EMPC 方法。

参考文献(References)

- [1] Engell S. Feedback control for optimal process operation[J]. J of Process Control, 2007, 17(3): 203-219.
- [2] Rawlings James B, Angeli David, Bates Cuyler N. Fundamentals of economic model predictive control[C]. The 51st IEEE Conf on Decision and Control. Hawaii: IEEE, 2012: 3851-3861.
- [3] Angeli David, Amrit Rishi, Rawlings James B. Receding horizon cost optimization for overly constrained nonlinear plants[C]. Proc of the 48th IEEE Conf on Decision and Control. Shanghai: IEEE, 2009: 7972-7977.
- [4] Chen Xianzhong, Heidarinejad Mohsen, Liu Jinfeng, et al. Distributed economic MPC: Application to a nonlinear chemical process network[J]. J of Process Control, 2012, 22(4): 689-699.
- [5] Müller Matthias A, Angeli David, Allgower Frank. Economic model predictive control with self-tuning terminal cost[J]. European J of Control, 2013, 19(5): 408-416.
- [6] Diehl Moritz, Amrit Rishi, Rawlings James B. A Lyapunov function for economic optimizing model predictive control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(3): 703-707.
- [7] Ajit Gopalakrishnan, Biegler Lorenz T. Economic nonlinear model predictive control for periodic optimal operation of gas pipeline networks[J]. Computers and Chemical Engineering, 2013, 52(10): 90-99.
- [8] 秦伟伟, 刘刚, 王剑, 等. 基于鲁棒一步集的 Tube 不变集鲁棒模型预测控制[J]. 自动化学报, 2014, 40(7): 1404-1411.
(Qin W W, Liu G, Wang J, et al. Robust MPC with Tube invariant set based on robust one-step set[J]. Acta Automatica Sinica, 2014, 40(7): 1404-1411.)
- [9] Amrit Rishi, Rawlings James B, Angeli David. Economic optimization using model predictive control with a terminal cost[J]. Annual Reviews in Control, 2011, 35(2): 178-186.
- [10] 席裕庚, 李德伟, 林姝. 模型预测控制-现状与挑战[J]. 自动化学报, 2013, 39(3): 222-236
(Xi Y G, Li D W, Lin S. Model predictive control-status and challenges[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(3): 222-236.)
- [11] Sontag Eduardo D. A 'Universal' construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization[J]. Systems and Control Letters, 1989, 13(2): 117-123.
- [12] Khalil Hassan K. Nonlinear systems[M]. 3rd ed. Pearson Education, 2002: 354.

(责任编辑: 齐 霖)