第 30 卷 第 12 期
Vol. 30 No. 12

控 制 与 决 策
Control and Decision

2015 年 12 月
Dec. 2015

文章编号: 1001-0920 (2015) 12-2233-08 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2014.1517

基于折衷型变权向量的直觉语言决策方法

余高锋[1], 刘文奇[2], 李登峰[3]

(1. 三明学院 信息工程学院，福建 三明 365004；2. 昆明理工大学 理学院，昆明 650093；3. 福州大学 经济与管理学院，福州 350108)

摘 要: 研究一种基于折衷型变权向量的直觉语言决策方法. 首先, 定义折衷型变权向量, 提出与之对应的状态变权向量; 其次, 研究利用马氏效用函数诱导出折衷型变权向量; 再次, 定义直觉语言变量运算法则和大小比较方法, 提出直觉语言信息变权加权平均算子和直觉语言信息变权加权几何平均算子, 进而提出一种初始属性权重确定且属性值以直觉语言形式给出的多属性决策方法; 最后, 通过实例表明了所提出方法的有效性和合理性.

关键词: 折衷型变权向量；马氏效用函数；直觉语言信息

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Compromise type variable weight vector based method Intuitionistic linguistic making decision

YU Gao-feng[1], *LIU Wen-qi*[2], *LI Deng-feng*[3]

(1. School of Information Engineering，Sanming University，Sanming 365004，China；2. School of Science，Kunming University of Science and Technology，Kunming 650093，China；3. School of Economics and Management，Fuzhou University，Fuzhou 350108，China. Correspondent：LI Deng-feng，E-mail：lidengfeng@fzu.edu.cn)

Abstract: An intuitionistic linguistic making decision method based on the compromise type variable weight vector is proposed. Firstly, The definition of the compromise type variable weight vector is proposed, the state weight vector of this variable weight is discussed, and the compromise type variable weight vector is induced by using the Markov utility function. Then, some operational laws and comparison criteria of the intuitionistic linguistic variable are defined and the properties of comparison criteria of the intuitionistic linguistic variable are presented. Based on these operational laws, some aggregation operators are proposed, including the intuitionistic linguistic information variable weighted arithmetic averaging operator and the intuitionistic linguistic information variable weighted geometric averaging operator. Based on these operators, an approach for solving multi-attribute group decision making problems is proposed, in which the attribute initial weights are known and the attribute values are expressed with the intuitionistic linguistic variable. Finally, an example is given to illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Keywords: compromise type variable weight vector；Markov utility function；intuitionistic linguistic information

0 引 言

由于社会经济环境的日益复杂和不确定, 人们对事情的认识过程往往存在不同程度的犹豫或表现出一定程度的知识缺乏, 从而使得认知结果表现为肯定、否定或介于肯定与否定之间的犹豫度这 3 个方面. Atanassov[1-2]于 1986 年提出直觉模糊集的概念, 同时考虑了隶属度、非隶属度和犹豫度三方面的信息, 因此直觉模糊集理论得到迅速发展, 其理论和方法也引起了人们的广泛关注. 文献 [3] 提出了直觉模糊加权几何算子、直觉模糊有序加权几何算子和直觉模糊混合几何算子等及其在多属性决策中的应用; 文献 [4] 建立了一种基于两类三角直觉模糊数算子的决策方法; 文献 [5-7] 分别定义了基于直觉模糊不确定语言信息集成算子的群体决策方法; 文献 [8] 定义了区间直觉模糊梯形数的运算法则、大小比较方法、直觉模糊梯形集结算子, 并应用于多属性决策中; 文献 [9] 对区间直觉模糊信息的集成方法进行了研究, 并应用于决策中; 文献 [10] 建立了直觉模糊集多属性决

收稿日期: 2014-10-06；**修回日期:** 2015-02-02.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(71231003)；国家自然科学基金项目(71171055, 61573173)；福建省自然科学基金项目(2015J01287)；福建省教育厅科技项目(JA14295).

作者简介: 余高锋(1986−), 男, 助教, 硕士, 从事决策分析和博弈论的研究；李登峰(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策分析与博弈论等研究.

策的线性规划求解方法; 文献 [11] 定义了直觉语言数运算法则、期望值、得分值函数和精确函数, 并提出了直觉语言加权算术平均算子和加权几何平均算子, 将其应用于多属性决策中; 文献 [12] 定义了直觉不确定语言变量运算法则、大小比较方法、直觉不确定语言集成算子, 并应用于群体性决策中.

上述文献是通过某种集结方法进行求解的. 线性加权综合是一种常用的集结方法, 称为常权综合方法. 然而在实际应用中, 这种方法可能存在一定的局限性. 为了避免这个问题, 我国著名学者汪培庄教授[13]于 20 世纪 80 年代率先提出了变权综合思想. 文献 [14-16] 对变权的本质和原理进行了系统的研究, 定义了变权向量、状态变权向量和均衡函数等一系列概念, 提出了变权综合原理, 并且得到了一种变权向量构造方法; 同时, 对状态变权向量和均衡函数的性质及其构造方法也进行了研究. 文献 [17-18] 对变权原理和效用函数的关系进行了系统研究, 提出了一般变权原理.

综上所述, 本文定义一种折衷型变权向量, 并提出一种基于折衷型变权向量的直觉模糊信息决策方法, 为这类复杂决策方法提供了一种新的途径.

1 折衷型变权原理

1.1 折衷型变权向量

假设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 表示因素状态向量, $I_m = \{(x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}} | 0 \leqslant x_j \leqslant 1\}$ 表示 R^m 中的正方体, I_m^+ 表示 I_m 的内部. 记 $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$, $e = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$, $p = (p_1, p_2, \cdots, p_m)^{\mathrm{T}}$ 均为 m 维列向量; $w(x) = (w_1(x), \cdots, w_m(x))$ 和 $s(x) = (s_1(x), \cdots, s_m(x))$ 为 m 维函数列向量. $a \geqslant b$ 是指 a 的各分量大于或等于 b 的对应分量.

下面给出折衷型变权向量的定义.

定义 1 设 $p \in I_m$, $w(x) \in C^2(I_m^+)$, $0 < p < e$. 若 $w(x)$ 满足:

1) $w(x) \geqslant 0$;

2) $e^{\mathrm{T}} w(x) = 1$;

3) 对于任意 $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 有

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j} \begin{cases} \leqslant 0, \ x_j \leqslant p_j; \\ \geqslant 0, \ x_j > p_j. \end{cases}$$

则称 $w(x)$ 为以 p 为参考点的折衷型变权向量, 称 p 为折衷型变权向量 $w(x)$ 的参考点.

折衷型变权向量具有丰富的意义, 通俗地讲, 根据决策者对决策源的认知态度和偏好给出参考点, 对属性值高于参考点的进行激励, 对属性值低于参考点的进行惩罚. 因此, 折衷型变权向量与惩罚型变权向量、激励型变向量、混合型变权向量是不一样的.

文献 [2] 指出, 变权向量是因素常权向量 w 与状态变权向量 $s(x)$ 的 (归一化) Hardarmard 乘积. 下面的定义给出了折衷型状态变权向量的概念.

定义 2 设 $p \in I_m$, 若 $s(x)$ 满足:

1) $s(x) \geqslant 0$;

2) $s_j(\delta_{ij}(x_1, x_2, \cdots, x_m)) = s_j(x_1, x_2, \cdots, x_m)$;

3) 对于任意 $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 有

$$\frac{\partial s_j}{\partial x_j} \begin{cases} \leqslant 0, \ x_j \leqslant p_j; \\ \geqslant 0, \ x_j > p_j; \end{cases}$$

4) 对于任意权向量 $w^0 = (w_1^0, w_2^0, \cdots, w_m^0)^{\mathrm{T}}$, 有

$$w_j(x) = \frac{w_j^0 s_j(x)}{\sum_{i=1}^{m} w_i^0 s_i(x)}. \tag{1}$$

则称 $s(x)$ 为折衷型状态变权向量, 称 p 为折衷型状态变权向量 $s(x)$ 的参考点.

定理 1 若 $s(x)$ 是以 p 为参考点的折衷型状态变权向量, 则由 $s(x)$ 得到的变权向量 $w(x)$ 是以 p 为参考点的折衷型变权向量.

证明 $w(x)$ 的非负性 1) 和归一性 2) 是显然的. 又因

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j} = \frac{w_j^0 \dfrac{\partial s_j}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{m} w_i^0 s_i(x) - w_j^0 s_j(x) w_j^0 \dfrac{\partial s_j}{\partial x_j}}{\Big[\sum_{i=1}^{m} w_i^0 s_i(x)\Big]^2} = w_j^0 \frac{\partial s_j}{\partial x_j} \sum_{k \neq j}^{m} \frac{w_k^0 s_k(x)}{\Big[\sum_{i=1}^{m} w_i^0 s_i(x)\Big]^2} \begin{cases} \leqslant 0, \ x_j \leqslant p_j; \\ \geqslant 0, \ x_j > p_j. \end{cases}$$

故 3) 成立. 因此, 由 $s(x)$ 得到的变权向量 $w(x)$ 是以 p 为参考点的折衷型变权向量. □

1.2 马氏效用函数诱导折衷型变权向量

Markowitz[20] 对 Friedman 和 Savage 的效用函数进行了研究, 将参考点引入效用函数中. 在一定财富或收益水平之下是凹函数, 而在一定财富或收益之上是凸函数, 其函数图形呈反 S 的形状. 即马氏效用函数满足: 1) $\forall\, t \in R$, $u'(t) > 0$; 2) 当 $t < t^*$ 时, $u''(t) \leqslant 0$, 当 $t > t^*$ 时, $u''(t) \geqslant 0$; 3) 当 $t = t^*$ 时, $u''(t) = 0$. 在经济意义上表现为: 面对损失时风险厌恶, 而面对盈利时则风险喜好.

设 $w^0 = (w_1^0, w_2^0, \cdots, w_m^0)^{\mathrm{T}}$ 为一常权向量, 即满足 $\sum_{j=1}^{m} w_j^0 = 1$, 且 $w_j^0 > 0$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$; $u(x) = (u_1(x_1), u_2(x_2), \cdots, u_m(x_m))^{\mathrm{T}} \in C^2(I_m^+)$ $(u_j(t) \in C^2(0,1))$, $u'(x) = (u_1'(x_1), u_2'(x_2), \cdots, u_m'(x_m))^{\mathrm{T}}$.

定理 2　设 $\{u_j(t)\}_j^m \in C^2(0,1)$ 且有界, $u(x) = (u_1(x_1), u_2(x_2), \cdots, u_m(x_m))$ 为马氏效用函数, w^0 为常权, $p \in I_m$, 对于任意 $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 有 $u_j''(p_j) = 0$, 则由

$$w_j(x) = \frac{w_j^0 u_j'(x_j)}{\sum_{j=1}^{m} w_j^0 u_j'(x_j)} \tag{2}$$

构成的 $w(x)$ 是以 p 为参考点的折衷型变权向量.

证明　$w(x)$ 的非负性 1) 和归一性 2) 是显然的. 又因

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big[\frac{w_j^0 u_j'(x_j)}{\sum_{k=1}^{m} w_k^0 u_k'(x_k)}\Big] = \frac{w_j^0 \sum_{k\neq j}^{m} w_k^0 u_k'(x_k)}{\Big[\sum_{k=1}^{m} w_k^0 u_k'(x_k)\Big]^2} u_j''(x_j),$$

$$\frac{w_j^0 \sum_{k\neq j}^{m} w_k^0 u_k'(x_k)}{\Big[\sum_{k=1}^{m} w_k^0 u_k'(x_k)\Big]^2} > 0,$$

$$u_j''(t) \begin{cases} \leqslant 0, \ 0 < t \leqslant p_j; \\ \geqslant 0, \ p_j \leqslant t < 1; \end{cases}$$

所以

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j} \begin{cases} \leqslant 0, \ 0 < t \leqslant p_j; \\ \geqslant 0, \ p_j \leqslant t < 1. \end{cases}$$

□

推论 1　设 $\{u_j(t)\}_j \in C^2(0,1)$ 且有界, $u(x) = (u_1(x_1), u_2(x_2), \cdots, u_m(x_m))$ 为马氏效用函数族, w^0 为常权, $p \in I_m$, 对于任意 $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 有 $u_j''(0) = 0$, 则由

$$w_j(x) = \frac{w_j^0 u_j'(x_j)}{\sum_{j=1}^{m} w_j^0 u_j'(x_j)} \tag{3}$$

构成的 $w(x)$ 是激励型变权向量, 并且其参考点为 $\mathbf{0}$.

推论 2　设 $\{u_j(t)\}_j \in C^2(0,1)$ 且有界, $u(x) = (u_1(x_1), u_2(x_2), \cdots, u_m(x_m))$ 为马氏效用函数族, w^0 为常权, $p \in I_m$, 对于任意 $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 有 $u_j''(1) = 0$, 则由

$$w_j(x) = \frac{w_j^0 u_j'(x_j)}{\sum_{j=1}^{m} w_j^0 u_j'(x_j)} \tag{4}$$

构成的 $w(x)$ 是惩罚型变权向量, 并且其参考点为 e.

2　基于折衷型变权向量的直觉语言决策方法

2.1　直觉语言变量的定义及其大小比较

设 S 是预先定义好的由奇数个元素构成的有序自然语言评价集, 即 $S = \{s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{2l}\}$, 则 S 具有如下性质:

1) 若 $i < j$, 则 $s_i \preceq s_j$;

2) 存在负算子 $\mathrm{neg}(s_i) = s_j$, 使得 $s_j = 2l - s_i - 1$;

3) 若 $s_{\theta_i} \preceq s_j$ (即 s_i 不优于 s_j), 则 $\min(s_i, s_j) = s_i$;

4) 若 $s_i \succeq s_j$ (即 s_i 不劣于 s_j), 则 $\max(s_i, s_j) = s_i$.

在决策信息集结过程中, 集结成果往往与语言评估标度 S 中的元素不匹配. 为便于计算和避免决策信息的丢失, 在原有语言评估标度 S 的基础上定义了拓展语言标度 $S = \{s_i | s_1 \preceq s_i \preceq s_q, i \in [1, q]\}$, 其中 q 是一个足够大的自然数. 若 $s_i \in S$, 则称 s_i 为本原术语, 否则, 称 s_i 为拓展术语. 通常, 决策者运用本源术语评估决策方案, 而拓展术语主要用于语言术语的计算和决策方案排序过程中.

在直觉模糊集的基础上, 考虑语言评价, 给出直觉语言集[11]的定义如下.

定义 3　设 X 是给定论域, $s_x \in S$, 称 $A = \{\langle x[s_x, \mu_A(x), \nu_A(x)] \mid x \in X\rangle\}$ 为直觉语言集 (IL), 其中 $\mu_A(x): X \to [0,1]$ 和 $\nu_A(x): X \to [0,1]$ 分别为 X 中元素 x 对于语言评价值 s_x 的隶属度和非隶属度, 并且满足条件 $0 \leqslant \mu_A(x) + \nu_A(x) \leqslant 1$, $x \in X$. 此外, $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$ 表示 X 中元素 x 对于 s_x 的犹豫度或不确定度. 易知, 当 $\mu_A(x) = 1, \nu_A(x) = 0$ 时, 直觉语言集退化为语言评价集.

定义 4　设 $A = \{\langle x[s_x, \mu_A(x), \nu_A(x)] \mid x \in X\rangle\}$ 为直觉语言集, 则称三元组 $\langle s_x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle$ 为直觉语言变量; 称 s_x 为 IFLV 的语言部, $(\mu_A(x), \mu_A(x))$ 为 IL 的直觉部, $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x), x \in X$ 为 IFLV 的犹豫度. 记 $\tilde{a} = \langle s_a, \mu(\tilde{a}), \nu(\tilde{a})\rangle$ 为直觉语言变量, 其相反的直觉语言变量可以表示为 $\tilde{a}^c$, 即 $\tilde{a}^c = \langle s_a, \nu(\tilde{a}), \mu(\tilde{a})\rangle$.

定义 5　设 $\tilde{a} = \langle s_a, \mu(\tilde{a}), \nu(\tilde{a})\rangle$ 为直觉语言变量, 则称 $\mathrm{E}(\tilde{a})$ 为 $\tilde{a}$ 的期望值, 即

$$\mathrm{E}(\tilde{a}) = \frac{1}{2} a(1 + \mu(\tilde{a}) - \nu(\tilde{a})), \tag{5}$$

其中 $\mathrm{E}(\tilde{a}) \in [0, 2l]$. 特别地, 如果 $\tilde{a}^+ = \langle s_{2l}, 1, 0\rangle$, 则

$E(\tilde{a})=2l$; 如果 $\tilde{a}^-=\langle s_0,0,1\rangle$, 则 $E(\tilde{a})=0$.

设 $\tilde{a}_1=\langle s_{a_1},\mu(\tilde{a}_1),\nu(\tilde{a}_1)\rangle$ 和 $\tilde{a}_2=\langle s_{a_2},\mu(\tilde{a}_2),\nu(\tilde{a}_2)\rangle$ 为任意两个直觉语言变量, 则有如下计算法则:

1) $\tilde{a}_1+\tilde{a}_2=$

$\langle s_{a_1+a_2},\mu(\tilde{a}_1)\bigwedge\mu(\tilde{a}_2),\nu(\tilde{a}_1)\bigvee\nu(\tilde{a}_2)\rangle$;

2) $\tilde{a}_1\tilde{a}_2=$

$\langle s_{a_1a_2},\mu(\tilde{a}_1)\bigwedge\mu(\tilde{a}_2),\nu(\tilde{a}_1)\bigvee\nu(\tilde{a}_2)\rangle$;

3) $\omega\tilde{a}_1=\langle s_{\omega a_1},\mu(\tilde{a}_1),\nu(\tilde{a}_1)\rangle$,

$\tilde{a}_1^{\omega}=\langle s_{a_1^{\omega}},\mu(\tilde{a}_1),\nu(\tilde{a}_1)\rangle$.

其中符号 $\bigvee$ 和 $\bigwedge$ 表示取大和取小运算. 直觉语言变量应采取保守稳妥的原则, 其结果不应放大隶属度和缩小非隶属度, 否则将丢失信息. 例如, 对 $\langle s_2,0.4,0.2\rangle$ 和 $\langle s_1,0.5,0.4\rangle$ 求积, 由上述法则计算的结果为 $\langle s_2,0.4,0.4\rangle$, 没有放大(缩小)隶属度和缩小(放大)非隶属度. 而文献[11]得到的结果 $\langle s_2,0.2,0.6\rangle$, 其隶属度 0.4 和 0.5 被进一步缩小为 0.2, 非隶属度 0.2 和 0.4 则被放大为 0.6, 导致运算结果信息的扭曲. 因此, 本文运算法则更加简单、合理, 而且更利于决策者进行信息的集成.

定义 6 对于任意两个直觉语言变量 $\tilde{a}_1$ 和 $\tilde{a}_2$, 容易证明如下计算法则成立:

1) $\tilde{a}_1+\tilde{a}_2=\tilde{a}_2+\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_1\tilde{a}_2=\tilde{a}_2\tilde{a}_1$;

2) $\omega(\tilde{a}_1+\tilde{a}_2)=\omega\tilde{a}_1+\omega\tilde{a}_2$, $\omega>0$;

3) $(\tilde{a}_1^{\omega})^k=\tilde{a}_1^{k\omega}$, $\tilde{a}_1^{\omega}\tilde{a}_1^{k}=\tilde{a}_1^{k+\omega}$, $\omega,\ k>0$.

定义 7 设 $\tilde{a}_1=\langle s_{a_1},\mu(\tilde{a}_1),\nu(\tilde{a}_1)\rangle$ 和 $\tilde{a}_2=\langle s_{\tilde{a}_2},\mu(\tilde{a}_2),\nu(\tilde{a}_2)\rangle$ 为任意两个直觉语言变量, 它们之间的距离为

$$d(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)=\frac{1}{2}\Big|[a_1(1+\mu(\tilde{a}_1)-\nu(\tilde{a}_1))-a_2(1+\mu(\tilde{a}_2)-\nu(\tilde{a}_2))]. \tag{6}$$

当 $\mu(\tilde{a}_1)=\mu(\tilde{a}_2)=1$ 和 $\nu(\tilde{a}_1)=\nu(\tilde{a}_2)=0$ 时, 式(6)退化为语言变量的距离公式.

容易证明距离公式(6)具有如下性质:

1) $d(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)\geqslant 0$;

2) $d(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)=d(\tilde{a}_2,\tilde{a}_1)$;

3) 设 $\tilde{a}_1$ 为直觉语言变量, 则有 $d(\tilde{a}_1,\tilde{a}_3)+d(\tilde{a}_2,\tilde{a}_3)\geqslant d(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)$.

定义 8 设 $\tilde{a}=\langle s_a,\mu(\tilde{a}),\nu(\tilde{a})\rangle$ 为直觉语言变量, 称

$$\mathrm{LG}(\tilde{a})=\frac{a[\mu(\tilde{a})+\lambda(1-\mu(\tilde{a})-\nu(\tilde{a}))]}{2}$$

为 $\tilde{a}$ 的总精确度.

设 $\lambda\in[0,1]$, λ 反映决策者的偏好: 若 $\lambda>0.5$, 则决策者是风险型; 若 $\lambda<0.5$, 则决策者是保守型; 若 $\lambda=0.5$, 则决策者是中间型. 一般情况下取 $\lambda=0.5$.

$\tilde{a}_1$ 和 $\tilde{a}_2$ 为两个直觉语言变量, 规定两个直觉语言变量的大小关系如下:

1) 若 $\mathrm{LG}(\tilde{a}_1)>\mathrm{LG}(\tilde{a}_2)$, 则 $\tilde{a}_1>\tilde{a}_2$;

2) 若 $\mathrm{LG}(\tilde{a}_1)=\mathrm{LG}(\tilde{a}_2)$, 则 $\tilde{a}=\tilde{a}_2$;

3) 若 $\mathrm{LG}(\tilde{a}_1)\geqslant\mathrm{LG}(\tilde{a}_2)$, 则 $\tilde{a}_1\geqslant\tilde{a}_2$.

类似地, 可以定义小于关系、小于等于关系.

容易验证总精确度具有以下性质.

性质 1 设 $\tilde{a}=\langle s_a,\mu(\tilde{a}),\nu(\tilde{a})\rangle$ 为直觉语言变量, 则其总精确度 $\mathrm{LG}(\tilde{a})\in(0,2l)$.

性质 2 设 $\tilde{a}=\langle s_a,k,1-k\rangle$ 为直觉语言变量, 则其总精确度 $\mathrm{LG}(\tilde{a})=ka$. 特别地, 如果 $\tilde{a}=\langle s_a,1,0\rangle$, 则其总精确度 $\mathrm{LG}(\tilde{a})=a$; 如果 $\tilde{a}=\langle s_a,0,1\rangle$, 则其总精确度 $\mathrm{LG}(\tilde{a})=0$; 如果 $\tilde{a}=\langle s_a,0,0\rangle$, 则其总精确度 $\mathrm{LG}(\tilde{a})=\lambda a$.

性质 3 设 $\tilde{a}_1=\langle s_a,\mu(\tilde{a}_1),\nu(\tilde{a}_1)\rangle$ 和 $\tilde{a}_2=\langle s_a,\mu(\tilde{a}_2),\nu(\tilde{a}_2)\rangle$ 为直觉语言变量, 若 $\mu(\tilde{a}_1)>\mu(\tilde{a}_2)$, $\nu(\tilde{a}_1)<\nu(\tilde{a}_2)$, 则 $\tilde{a}_1>\tilde{a}_2$.

证明 根据定义 8, 有

$$\mathrm{LG}(\tilde{a}_1)=a[\mu(\tilde{a}_1)+\lambda(1-\mu(\tilde{a}_1)-\nu(\tilde{a}_1)]/2,$$

$$\mathrm{LG}(\tilde{a}_2)=a[\mu(\tilde{a}_2)+\lambda(1-\mu(\tilde{a}_2)-\nu(\tilde{a}_2)]/2,$$

因此

$$\mathrm{LG}(\tilde{a}_1)-\mathrm{LG}(\tilde{a}_2)=$$

$$a[(1-\lambda)(\mu(\tilde{a}_1)-\mu(\tilde{a}_2))+(\nu(\tilde{a}_1)-\nu(\tilde{a}_1))]/2.$$

因 $\mu(\tilde{a}_1)>\mu(\tilde{a}_2)$ 和 $\nu(\tilde{a}_1)<\nu(\tilde{a}_2)$, 故 $\mathrm{LG}(\tilde{a}_1)-\mathrm{LG}(\tilde{a}_2)>0$, 即 $\tilde{a}_1>\tilde{a}_2$. □

性质 4 设 $\tilde{a}_1=\langle s_a,\mu(\tilde{a}_1),\nu(\tilde{a}_1)\rangle$ 和 $\tilde{a}_2=\langle s_a,\mu(\tilde{a}_2),\nu(\tilde{a}_2)\rangle$ 为直觉语言变量, 若 $\tilde{a}_1>\tilde{a}_2$, 则 $\tilde{a}_1+\tilde{a}_3>\tilde{a}_2+\tilde{a}_3$.

证明 设 $\tilde{a}_3=\langle s_{a_3},\mu(\tilde{a}_3),\nu(\tilde{a}_3)\rangle$, 有

$$\tilde{a}_1+\tilde{a}_3=\langle s_{a_1+a_3},\mu(\tilde{a}_1)\bigwedge\mu(\tilde{a}_3),\nu(\tilde{a}_1)\bigvee\nu(\tilde{a}_3)\rangle,$$

$$\tilde{a}_2+\tilde{a}_3=\langle s_{a_2+a_3},\mu(\tilde{a}_2)\bigwedge\mu(\tilde{a}_3),\nu(\tilde{a}_2)\bigvee\nu(\tilde{a}_3)\rangle.$$

因为 $\tilde{a}_1>\tilde{a}_2$, 有 $\mu(\tilde{a}_1)>\mu(\tilde{a}_2)$, $\nu(\tilde{a}_1)<\nu(\tilde{a}_2)$, 所以 $\mu(\tilde{a}_1)\bigwedge\mu(\tilde{a}_3)\geqslant\mu(\tilde{a}_2)\bigwedge\mu(\tilde{a}_3)$, $\nu(\tilde{a}_1)\bigvee\nu(\tilde{a}_3)\leqslant\nu(\tilde{a}_2)\bigvee\nu(\tilde{a}_3)$. 根据性质 3, 有 $\tilde{a}_1+\tilde{a}_3>\tilde{a}_2+\tilde{a}_3$. □

性质 5 设 $\tilde{a}_1=\langle s_a,\mu(\tilde{a}_1),\nu(\tilde{a}_1)\rangle$ 和 $\tilde{a}_2=\langle s_a,\mu(\tilde{a}_2),\nu(\tilde{a}_2)\rangle$ 为直觉语言变量, 若 $\tilde{a}_1>\tilde{a}_2$, 则 $\tilde{a}_1\tilde{a}_3>\tilde{a}_2\tilde{a}_3$, 其中 $\tilde{a}_3$ 为任意的直觉语言变量.

证明 设 $\tilde{a}_3=\langle s_{a_3},\mu(\tilde{a}_3),\nu(\tilde{a}_3)\rangle$, 有

$$\tilde{a}_1\tilde{a}_3=\langle s_{a_1a_3},\mu(\tilde{a}_1)\bigwedge\mu(\tilde{a}_3),\nu(\tilde{a}_1)\bigvee\nu(\tilde{a}_3)\rangle,$$

$$\tilde{a}_2\tilde{a}_3=\langle s_{a_2a_3},\mu(\tilde{a}_2)\bigwedge\mu(\tilde{a}_3),\nu(\tilde{a}_2)\bigvee\nu(\tilde{a}_3)\rangle.$$

因为 $\tilde{a}_1>\tilde{a}_2$, 有 $\mu(\tilde{a}_1)>\mu(\tilde{a}_2)$, $\nu(\tilde{a}_1)<\nu(\tilde{a}_2)$, 所以 $\mu(\tilde{a}_1)\bigwedge\mu(\tilde{a}_3)\geqslant\mu(\tilde{a}_2)\bigwedge\mu(\tilde{a}_3)$, $\nu(\tilde{a}_1)\bigvee\nu(\tilde{a}_3)\leqslant\nu(\tilde{a}_2)\bigvee\nu(\tilde{a}_3)$. 根据性质 3, 有 $\tilde{a}_1\tilde{a}_3>\tilde{a}_2\tilde{a}_3$. □

性质 6　设 $\tilde{a} = \langle s_{\theta(\tilde{a})}, \mu(\tilde{a}), \nu(\tilde{a})\rangle$ 为任意的直觉语言变量, 有 $\mathrm{LG}(\tilde{a}) + \mathrm{LG}(\tilde{a}^c) \leqslant a/2$, 其中 $\lambda \in [0,1]$. 特别地, 当 $\lambda = 0.5$ 时, $\mathrm{LG}(\tilde{a}) + \mathrm{LG}(\tilde{a}^c) = a/2$.

证明　根据定义 6, 有 $\tilde{a}^c = \langle s_a, \nu(\tilde{a}), \mu(\tilde{a})\rangle$. 因此

$$\begin{aligned}&\mathrm{LG}(\tilde{a}) + \mathrm{LG}(\tilde{a}^c) = \\ &\frac{a[\mu(\tilde{a}) + \lambda(1-\mu(\tilde{a})-\nu(\tilde{a}))]}{2} + \\ &\frac{a[\nu(\tilde{a}) + \lambda(1-\mu(\tilde{a})-\nu(\tilde{a}))]}{2} = \\ &\frac{a[(1-2\lambda)(\mu(\tilde{a})+\nu(\tilde{a})+2\lambda)]}{2} \leqslant \\ &\frac{a[(1-2\lambda)+2\lambda]}{2} = \frac{a}{2}.\end{aligned}$$

故 $\mathrm{LG}(\tilde{a}) + \mathrm{LG}(\tilde{a}^c) \leqslant a/2$, 其中 $\lambda \in [0,1]$. 特别地, 当 $\lambda = 0.5$ 时, $\mathrm{LG}(\tilde{a}) + \mathrm{LG}(\tilde{a}^c) = a/2$. □

设 $\tilde{a}$、$\tilde{b}$ 和 $\tilde{c}$ 为任意 3 个直觉语言变量, 除了满足定理 1 和定理 2 之外, 本文提出的排序方法还满足 Wang 等[19]提出的如下性质:

1) $\tilde{a} \geqslant \tilde{a}$;

2) 若 $\tilde{a} \geqslant \tilde{b}$ 和 $\tilde{b} \geqslant \tilde{a}$, 则 $\tilde{a} = \tilde{b}$;

3) 若 $\tilde{a} \geqslant \tilde{b}$ 和 $\tilde{b} \geqslant \tilde{c}$, 则 $\tilde{a} \geqslant \tilde{c}$.

2.2 直觉语言变权集成算子

根据直觉语言变量的运算法则和折衷型变权向量, 定义直觉语言信息集相关算子如下.

定义 9　设 $\tilde{a}_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为一组直觉语言变量, $\mathrm{E}(\tilde{a}_i)$ 为其对应的期望值, 并设 IL-WAA: $I^n \to I$. 若

$$\text{IL-WAA}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i(\mathrm{E}(\tilde{a}))\tilde{a}_i, \quad (7)$$

则称函数 IL-WAA 为 n 维 IL 的变权加权算术平均算子. 其中: I 为全体 IFLV 的集合; $w(\mathrm{E}(\tilde{a}))$ 是以 p 为参考点的折衷型变权向量, $0 \leqslant w_i(\mathrm{E}(\tilde{a})) \leqslant 1, i = 1, 2, \cdots, n, \sum_{i=1}^{n} w_i(\mathrm{E}(\tilde{a})) = 1$.

若参考点 $p = \mathbf{0}$, 则 $w(\mathrm{E}(\tilde{a}))$ 为激励型变权向量, 变权加权算术平均算子变为激励型变权加权平均算子; 若参考点 $p = e$, 则 $w(\mathrm{E}(\tilde{a}))$ 为惩罚型变权向量, 变权加权算术平均算子变为惩罚型变权加权平均算子; 若 $w(\mathrm{E}(\tilde{a}))$ 为常数权向量, 则变权加权算术平均算子退化为加权平均算子.

定义 10　设 $\tilde{a}_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为一组直觉语言变量, $\mathrm{E}(\tilde{a}_i)$ 为其对应的期望值, 并设 IL-WGA: $I^n \to I$. 若

$$\text{IL-WGA}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n) = \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_i^{w_i(\mathrm{E}(\tilde{a}))}, \quad (8)$$

则称函数 IL-WGA 为 n 维 IL 的变权加权几何平均算子. 其中: I 为全体 IL 的集合; $w(\mathrm{E}(\tilde{a}))$ 是以 p 为参考点的折衷型变权向量, $0 \leqslant w_i(\mathrm{E}(\tilde{a})) \leqslant 1, i = 1, 2, \cdots, n, \sum_{i=1}^{n} w_i(\mathrm{E}(\tilde{a}))) = 1$.

若参考点 $p = \mathbf{0}$, 则 $w(\mathrm{E}(\tilde{a}))$ 为激励型变权向量, 变权加权几何平均算子变为激励型变权加权几何平均算子; 若参考点 $p = e$, 则 $w(\mathrm{E}(\tilde{a}))$ 为惩罚型变权向量, 变权加权几何平均算子变为惩罚型变权加权几何平均算子; 若 $w(\mathrm{E}(\tilde{a}))$ 为常权权向量, 则变权加权几何平均算子退化为加权几何平均算子.

注 1　直觉语言加权算术平均算子和直觉语言变权加权几何平均算子与传统的算子相比, 引入了变权的思想, 综合考虑了属性值的期望值. 当期望值高于参考点时, 权重函数是属性值的期望值增函数, 即对于期望值高于参考点的属性权重进行激励; 反之, 当期望值低于参考点时, 权重函数是属性值的期望值减函数, 即对于期望值低于参考点的属性权重进行惩罚, 因此, 本文算子比传统的算子更加科学合理, 更能体现决策者的心理状态和认知程度.

定理 3　设 $\tilde{a}_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为一组 IL, 则由式 (1) 得到的结果仍为 IL, 且

$$\begin{aligned}&\text{IL-WGA}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n) = \\ &\langle s_{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i(\mathrm{E}(\tilde{a}))a_i}, \mu(\tilde{a}_1) \bigwedge \cdots \bigwedge \mu(\tilde{a}_n), \\ &\nu(\tilde{a}_1) \bigvee \cdots \bigvee \nu(\tilde{a}_n)\rangle.\end{aligned}$$

定理 4　设 $\tilde{a}_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为一组 IL, 则由式 (2) 得到的结果仍为 IL, 且

$$\begin{aligned}&\text{IL-WGA}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n) = \\ &\langle s_{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{w_i(\mathrm{E}(\tilde{a}))}}, \mu(\tilde{a}_1) \bigwedge \cdots \bigwedge \mu(\tilde{a}_n), \\ &\nu(\tilde{a}_1) \bigvee \cdots \bigvee \nu(\tilde{a}_n)\rangle.\end{aligned}$$

定理 3 和定理 4 可利用数学归纳法证明, 证明步骤如文献 [9], 此略.

容易验证本文算子具有如下性质:

定理 5　设 $\tilde{a}_i = \tilde{a}(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则 IL-WAA$(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n) =$ IL-WGA$(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$.

证明　设 $\tilde{a}_i = \tilde{a}(i = 1, 2, \cdots, n)$, 由定义 9 可知

$$\begin{aligned}&\text{IL-WAA}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n) = \\ &\sum_{i=1}^{n} \tilde{a} w_i(\mathrm{E}(\tilde{a})) = \tilde{a} \sum_{i=1}^{n} w_i(\mathrm{E}(\tilde{a})) = \tilde{a}.\end{aligned}$$

同理 IL-WGA$(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$. □

定理 6　设 $\tilde{a}_i = \tilde{a}(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则 IL-WAA$(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$ 和 IL-WGA$(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$ 有界.

证明　设 $\tilde{a}_i = \langle s_{a_i}, \mu(\tilde{a}_i), \nu(\tilde{a}_i)\rangle$, $\mu = \mu(\tilde{a}_1) \bigwedge$

$\cdots\bigwedge\mu(\tilde{a}_n)$ 和 $\nu=\nu(\tilde{a}_1)\bigvee\cdots\bigvee\nu(\tilde{a}_n)$. 由定义 9 可知

$$\text{IL-WAA}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_i w_i(\mathrm{E}(\tilde{a}))=\langle s_{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i w_i(\mathrm{E}(\tilde{a}))},\mu(\tilde{a}_1)\bigwedge\cdots\bigwedge\mu(\tilde{a}_n),\nu(\tilde{a}_1)\bigvee\cdots\bigvee\nu(\tilde{a}_n)\rangle.$$

令 $a^-=\min\limits_i\{a_i\}$, $a^+=\max\limits_i\{a_i\}$, $\mu=\mu(\tilde{a}_1)\bigwedge\cdots\bigwedge\mu(\tilde{a}_n)$ 和 $\nu=\nu(\tilde{a}_1)\bigvee\cdots\bigvee\nu(\tilde{a}_n)$, 有

$$a^-<\sum_{i=1}^{n}a_i w_i(\mathrm{E}(\tilde{a}))<a^+,$$

因此

$$\langle s_{a^-},\mu,\nu\rangle<\text{IL-WAA}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)<\langle s_{a^+},\mu,\nu\rangle.$$

同理可得

$$\langle s_{a^-},\mu,\nu\rangle<\text{IL-WGA}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)<\langle s_{a^+},\mu,\nu\rangle.$$

因此 IL-WAA$(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\tilde{a}$ 和 IL-WGA$(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\tilde{a}$ 有界. □

定理 7 设 $\tilde{a}_i=\langle s_a,\mu(\tilde{a}_i),\nu(\tilde{a}_i)\rangle$ 和 $\tilde{b}_i=\langle s_a,\mu(\tilde{b}_i),\nu(\tilde{b}_i)\rangle$ 为直觉语言变量, 若对于任意 i, 有 $\tilde{a}_i>\tilde{b}_i$, 则

$$\text{IL-WAA}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)>\text{IL-WAA}(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\cdots,\tilde{b}_n),$$
$$\text{IL-WGA}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)>\text{IL-WGA}(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\cdots,\tilde{b}_n).$$

证明 设 $\tilde{a}_i=\langle s_a,\mu(\tilde{a}_i),\nu(\tilde{a}_i)\rangle$, 由定义 9 可知

$$\text{IL-WAA}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_i w_i(\mathrm{E}(\tilde{a}))=\langle s_a,\mu(\tilde{a}_1)\bigwedge\cdots\bigwedge\mu(\tilde{a}_n),\nu(\tilde{a}_1)\bigvee\cdots\bigvee\nu(\tilde{a}_n)\rangle.$$

同理可得

$$\text{IL-WAA}(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\cdots,\tilde{b}_n)=\sum_{i=1}^{n}\tilde{b}_i w_i(\mathrm{E}(\tilde{b}))=\langle s_a,\mu(\tilde{b}_1)\bigwedge\cdots\bigwedge\mu(\tilde{b}_n),\nu(\tilde{b}_1)\bigvee\cdots\bigvee\nu(\tilde{b}_n)\rangle.$$

对于任意 i, 有 $\tilde{a}_i>\tilde{b}_i$, 即 $\mu(\tilde{a}_i)>\mu(\tilde{a}_i)$, $\nu(\tilde{a}_i)<\nu(\tilde{a}_i)$, 有

$$\mu(\tilde{a}_1)\bigwedge\cdots\bigwedge\mu(\tilde{a}_n)>\mu(\tilde{b}_1)\bigwedge\cdots\bigwedge\mu(\tilde{b}_n),$$
$$\nu(\tilde{a}_1)\bigvee\cdots\bigvee\nu(\tilde{a}_n))<\nu(\tilde{b}_1)\bigvee\cdots\bigvee\nu(\tilde{b}_n),$$

因此

$$\text{IL-WAA}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)>\text{IL-WAA}(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\cdots,\tilde{b}_n).$$

同理可得

$$\text{IL-WGA}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)>\text{IL-WGA}(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\cdots,\tilde{b}_n).$$

3 基于直觉语言信息变权集成算子的决策步骤

对于一个多属性决策问题, 方案集为 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$, 属性集为 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$, 对应的属性权重向量为 $w^0=\{w_1^0,w_2^0,\cdots,w_m^0\}$. 其中: $w_j^0\in[0,1]$, $\sum\limits_{j=1}^{m}w_j^0=1$, $j=1,2,\cdots,m$. 设方案 b_i 在属性 c_j 下的直觉模糊语言评价值为 $\tilde{a}_{ij}=\langle s_{ij},\mu(\tilde{a}_{ij}),\nu(\tilde{a}_{ij})\rangle$. 本文探讨的是, 根据各方案中各属性的直觉模糊语言评价值对方案进行排序, 确定出最佳方案.

下面给出一种基于直觉语言信息变权集成算子的决策方法, 具体步骤如下.

Step 1: 将评价信息转化为矩阵 $A=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$, 其中 $\tilde{a}_{ij}=\langle s_{ij},\mu(x_{ij}),\nu(x_{ij})\rangle$.

Step 2: 对直觉语言变量矩阵进行去量纲, 转化为 $\bar{r}_{ij}=\langle r_{\theta(x_{ij})},\mu_{r_{ij}},\nu_{r_{\theta(x_{ij})}}\rangle$.

对于成本型属性, 有

$$\bar{r}_{ij}=\Big\langle\frac{s_{2t}}{s_{x_{ij}}},\mu(x_{ij}),\nu(x_{ij})\Big\rangle;\tag{9}$$

对于效益型属性, 有

$$\bar{r}_{ij}=\Big\langle\frac{s_{ij}}{s_{2t}},\mu(x_{ij}),\nu(x_{ij})\Big\rangle.\tag{10}$$

Step 3: 计算它们的期望值, 并根据决策者的心理状态和认知程度, 给出参考点 p, 构造折衷型变权向量.

Step 4: 利用直觉语言变量的变权加权算数平均算子或者变权加权几何平均算子对方案 b_i 的评价信息进行集结, 得到关于方案 b_i 的综合评价 r_i, $i=1,2,\cdots,n$.

Step 5: 计算 r_i 的总精确度, 对方案进行排序.

Step 6: 结束.

4 实例分析

4.1 数值分析

考虑某一个地区电子商务企业信用评估, 包括 5 个对象, 每个对象具有 5 个属性, 其中属性分别为: 创新能力 c_1, 抵御市场风险能力 c_2, 生产能力 c_3, 财务质量 c_4, 管理能力 c_5.

决策步骤如下.

1) 根据式 (9) 和 (10) 进行规范化, 结果见表 1.

2) 利用式 (6) 计算它们的期望值; 决策者根据认知程度和心理状态, 给出参考点为 0.5, 由此构造马氏效用函数为

$$u(t)=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2+\frac{13}{12}t.$$

于是折衷型变权向量为

$$w_{ij}(\mathrm{E}(r_{i1}),\mathrm{E}(r_{i2}),\cdots,\mathrm{E}(r_{i5}))=\frac{w_j^0\Big(\frac{1}{2}\mathrm{E}(r_{ij})^2-\frac{1}{2}\mathrm{E}(r_{ij})+\frac{13}{6}\Big)}{\sum\limits_{k=1}^{5}w_k^0\Big(\frac{1}{2}\mathrm{E}(r_{ik})^2-\frac{1}{2}\mathrm{E}(r_{ik})+\frac{13}{6}\Big)},$$

其中 $i,j=1,2,\cdots,5$.

表 1　规范化的决策信息

企业	属性值				
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
b_1	$\langle s_{0.28}, 0.7, 0.3\rangle$	$\langle s_{0.43}, 0.7, 0.3\rangle$	$\langle s_{0.43}, 0.6, 0.2\rangle$	$\langle s_{0.57}, 0.7, 0.2\rangle$	$\langle s_{0.29}, 0.8, 0.2\rangle$
b_2	$\langle s_{0.57}, 1.0, 0.0\rangle$	$\langle s_{0.43}, 0.6, 0.3\rangle$	$\langle s_{0.57}, 0.8, 0.2\rangle$	$\langle s_{0.71}, 0.8, 0.2\rangle$	$\langle s_{0.43}, 0.9, 0.1\rangle$
b_3	$\langle s_{0.29}, 0.6, 0.4\rangle$	$\langle s_{0.86}, 0.7, 0.1\rangle$	$\langle s_{0.43}, 0.8, 0.1\rangle$	$\langle s_{0.57}, 0.9, 0.1\rangle$	$\langle s_{0.71}, 0.7, 0.2\rangle$
b_4	$\langle s_{0.57}, 0.9, 0.1\rangle$	$\langle s_{0.71}, 0.8, 0.2\rangle$	$\langle s_{0.29}, 0.6, 0.3\rangle$	$\langle s_{0.29}, 0.7, 0.2\rangle$	$\langle s_{0.43}, 0.6, 0.4\rangle$
b_5	$\langle s_{0.86}, 0.9, 0.0\rangle$	$\langle s_{0.43}, 0.8, 0.2\rangle$	$\langle s_{0.71}, 0.9, 0.1\rangle$	$\langle s_{0.57}, 0.7, 0.3\rangle$	$\langle s_{0.71}, 0.7, 0.3\rangle$

3) 利用直觉语言信息变权集成算子, 得到直觉语言信息变权集成算子的综合评价值, 如表 2 所示.

表 2　直觉语言信息变权集成算子的综合评价值

方法	属性值				
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
IL-WAA	$\langle s_{0.27}, 0.6, 0.3\rangle$	$\langle s_{0.44}, 0.6, 0.3\rangle$	$\langle s_{0.44}, 0.6, 0.4\rangle$	$\langle s_{0.33}, 0.6, 0.4\rangle$	$\langle s_{0.57}, 0.7, 0.3\rangle$
IL-WGA	$\langle s_{3.89}, 0.6, 0.3\rangle$	$\langle s_{4.24}, 0.6, 0.3\rangle$	$\langle s_{4.20}, 0.6, 0.4\rangle$	$\langle s_{3.97}, 0.6, 0.4\rangle$	$\langle s_{4.39}, 0.7, 0.3\rangle$
常权综合	$\langle s_{0.29}, 0.6, 0.3\rangle$	$\langle s_{0.47}, 0.6, 0.3\rangle$	$\langle s_{0.46}, 0.6, 0.4\rangle$	$\langle s_{0.34}, 0.6, 0.4\rangle$	$\langle s_{0.60}, 0.7, 0.3\rangle$

4) 计算总的精确度, 对方案进行排序, 见表 3.

表 3　方案排序

方法	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	方案排序
IL-WAA	0.18	0.29	0.26	0.20	0.40	$b_5 > b_2 > b_3 > b_4 > b_1$
IL-WGA	2.53	2.76	2.52	2.38	3.07	$b_5 > b_2 > b_1 > b_3 > b_4$
常权综合	0.19	0.31	0.28	0.20	0.42	$b_5 > b_2 > b_3 > b_4 > b_1$

4.2　与相关文献比较分析

利用文献 [11] 和 [12] 的方法对 4.1 节的结果进行计算, 得到电子商务企业信用的排序结果如表 4 所示.

表 4　其他方法排序的结果

方法	方案排序	最优企业
文献 [11]	$b_5 > b_2 > b_3 > b_4 > b_1$	b_5
文献 [12]	$b_5 > b_2 > b_1 > b_3 > b_4$	b_5

由表 3 和表 4 可知, 本文方法的最优企业与文献 [11] 和文献 [12] 的一样, 由此表明了本文方法的可行性和有效性.

由表 3 可知, IL-WAA 计算的值比常权综合的值都低, 由于规范化直觉语言变量的期望值部分低于 0.5, 受到了惩罚, 变权决策效果比常权决策效果更能体现决策者的认知程度和心理状态, 即参考点可以取不同的值, 这充分体现了决策过程的柔性, 而在文献 [11] 和文献 [12] 中是无法体现的, 可见本文的结果更加合理.

5　结　论

本文提出了一种基于折衷型变权向量的直觉语言决策方法. 系统地研究了折衷型变权向量及其性质; 定义了直觉语言变量运算法则和大小比较方法, 提出了直觉语言信息变权加权算子和直觉语言信息几何变权加权算子; 提出一种属性值以直觉语言信息形式给出的多属性决策方法. 该方法逻辑清晰、计算方便, 为解决这类直觉模糊决策问题, 如电子商务信任问题、企业质量信用评价问题等提供了一种新的途径, 具有实际应用价值.

参考文献(References)

[1] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[2] Atanassov K T. Operators over interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 64(2): 159-174.

[3] Xu Z S, Yager R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Int J of General Systems, 2006, 35(4): 417-433.

[4] Zhang X, Liu P D. Method for aggregating triangular fuzzy intuitionistic fuzzy information and its application to decision making[J]. Technological and Economic Development of Economy, 2010, 16(2): 280-290.

[5] Liu P D, Jin F. Methods for aggregating intuitionistic uncertain linguistic variables and their application to group decision making[J]. Information Sciences, 2012, 205(1): 58-71.

[6] Liu P D, Liu Z M, Zhang X. Some intuitionistic uncertain linguistic heronian mean operators and their application to group decision making[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 230(3): 570-586.

[7] Liu P D, Wang Y M. Multiple attribute group decision making methods based on intuitionistic linguistic power generalized aggregation operators[J]. Applied Soft Computing, 2014, 17(4): 90-104.

[8] 万树平. 基于区间直觉模糊梯形的多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2011, 26(6): 857-860.
(Wan S P. Multi-attitude decision making method based on interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy number[J]. Control and Decision, 2011, 26(6): 857-860.)

[9] 徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2007, 22(2): 215-219.
(Xu Z S. Methods for aggregating interval-valued intuitionistic fuzzy information and their application to decision making[J]. Control and Decision, 2007, 22(2): 215-219.)

[10] Li D F, Chen G H, Huang Z G. Linear programming method for multiattribute group decision making using IF sets[J]. Information Sciences, 2010, 180(9): 1591-1609.

[11] 王坚强, 李寒波. 基于直觉语言集结算子的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1571-1574.
(Wang J Q, Li H B. Multi-criteria decision-making method based on aggregation operators for intuitionistic linguistic fuzzy number[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1571-1574.)

[12] 刘培德, 张新. 直觉不确定集成算子及在群决策中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(12): 2704-2711.
(Liu P D, Zhang X. Intuitionistic uncertain linguistic aggregation operators and their application to group decision making[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2012, 32(12): 2704-2711.)

[13] 汪培庄. 模糊集与随机集落影[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1985: 47-59.
(Wang P Z. Shadow of fuzzy sets and random sets[M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 1985: 47-59.)

[14] 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架(Ⅷ)[J]. 模糊系统与数学, 1995, 9(3): 1-9.
(Li H X. Factor spaces and mathematical frame of knowledge represention(Ⅷ)[J]. Fuzzy Systems and Mathematical, 1995, 9(3): 1-9.)

[15] 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架(IX)[J]. 模糊系统与数学, 1996, 10(2): 12-19.
(Li H X. Factor spaces and mathematical frame of knowledge represention(IX)[J]. Fuzzy Systems and Mathematical, 1996, 10(2): 12-19.)

[16] 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架(X)[J]. 模糊系统与数学, 1996, 10(4): 110-118.
(Li H X. Factor spaces and mathematical frame of knowledge represention(X)[J]. Fuzzy Systems and Mathematical, 1996, 10(4): 110-118.)

[17] 刘文奇. 均衡函数及其在变权综合中应用[J]. 系统理工程论与实践, 1998, 17(4): 41-47.
(Liu W Q. Balanced function and its Application for variable weighted synthesizing [J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 1997, 17(4): 41-47.)

[18] 刘文奇. 一般变权原理与多目标决策[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 3(3): 1-11.
(Liu W Q. The ordinary variable weight principle and multiobjective decision-making[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2000, 3(3): 1-11.)

[19] Wang X Z, Kerre E E. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities(I)[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 118(3): 375-385.

[20] Markowitz H M. Portfolio selection[J]. J of Finance, 1952, 7: 77-91.

(责任编辑：李君玲)