

## 变体飞行器平滑切换LPV鲁棒控制

江未来<sup>a</sup>, 董朝阳<sup>a</sup>, 王通<sup>b</sup>, 王青<sup>b</sup>

(北京航空航天大学 a. 航空科学与工程学院, b. 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

**摘要:** 针对一类变体飞行器控制问题, 提出一种平滑切换线性变参数(LPV)鲁棒控制器设计方法. 建立变体飞行器切换LPV模型, 设计平滑切换控制器, 其中偶数子系统控制器由相邻两个子系统控制器线性插值得到. 给出保证切换LPV系统指数稳定且具有一定鲁棒性能的充分条件, 由于考虑了调参变量的渐变特性, 所得切换律没有平均驻留时间的限制. 仿真结果表明, 所提出方法使得飞行器系统既具有良好的稳定性和鲁棒性, 又能实现平滑切换.

**关键词:** 变体飞行器; 切换系统; 线性变参数系统; 平滑切换; 鲁棒控制

中图分类号: V249.1

文献标志码: A

## Smooth switching LPV robust control for morphing aircraft

JIANG Wei-lai<sup>a</sup>, DONG Chao-yang<sup>a</sup>, WANG Tong<sup>b</sup>, WANG Qing<sup>b</sup>

(a. School of Aeronautical Science and Engineering, b. School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China. Correspondent: JIANG Wei-lai, E-mail: jiangweilai@126.com)

**Abstract:** A smooth switching linear parameter varying(LPV) robust controller is proposed for the control problem of a class of morphing aircraft. The LPV model of morphing aircraft is developed, and the smooth switching control law is designed, in which the controllers of the even subsystems are smoothly scheduled between the two controllers of adjacent subsystems. Then, a sufficient condition for ensuring the LPV system exponential stable and having a certain robust performance is presented. Considering the scheduling parameter changing gradually, a switching law without constraint on average dwell time is obtained. Simulation result shows that, by using the proposed method, the aircraft system not only has good stability and robustness, but also can switch smoothly during morphing.

**Keywords:** morphing aircraft; switched system; linear parameter varying system; smooth switching; robust control

### 0 引言

变体飞行器外形结构能够根据飞行环境、剖面、任务进行自适应变化, 以实现最优的飞行效能. 然而, 飞行器构型的变化会带来气动特性的变化, 这使得变体飞行器是一个依赖于外形结构的复杂参变系统. 相较于传统飞行器, 其控制系统的设计面临新的挑战, 是当下航空航天领域的研究热点<sup>[1]</sup>.

线性变参数(LPV)系统理论为这类飞行器的建模和控制问题提供了一种解决方案<sup>[2]</sup>. 然而, 当LPV系统调参变量变化范围较大时, 运用单一的LPV控制器, 可能会使得系统性能较差甚至无法求得控制器. 为此, 基于切换LPV系统理论的变增益控制得到了广泛关注<sup>[3-4]</sup>. 文献[3]针对导弹的切换LPV系统建模和 $H_\infty$ 控制问题, 提出了一种自动驾驶仪设计新方法. 文献[4]采用参数依赖多Lyapunov函数方法, 得

到了切换LPV系统稳定的充分条件和鲁棒控制器设计方法, 并应用于F-16飞机进行了仿真验证. 然而, 上述研究只针对一般的切换LPV系统, 所得结论对于调参变量具有渐变特性的切换LPV系统具有一定的保守性. 另一方面, 切换的引入可能会导致系统状态的抖振, 从而降低切换系统总体性能. 为此, 众多学者开展了LPV系统平滑切换控制的研究<sup>[5-6]</sup>. 文献[5]通过采用下降迭代算法求解一组非线性矩阵不等式, 设计了LPV系统的平滑切换控制器. 文献[6]研究了LPV系统在输入输出受限的情形下, 平滑切换增益调参控制器的设计方法. 但是, 上述文献只着重于LPV系统的平滑切换, 并未讨论系统的鲁棒性, 而将这两方面研究结合起来, 并应用于变体飞行器的控制系统设计, 则鲜有报道.

本文针对机翼后掠角可变飞行器控制问题, 提

收稿日期: 2014-10-09; 修回日期: 2015-02-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273083, 61374012).

作者简介: 江未来(1989—), 男, 博士生, 从事变体飞行器建模与控制的研究; 董朝阳(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器控制、切换系统等研究.

出一种平滑切换LPV鲁棒控制器的设计方法. 将变体飞行器建模成以机翼后掠角变形率为调参变量的LPV系统, 并将调参变量的取值区间划分为奇数个子区间. 设计平滑切换控制器, 其中偶数子系统控制器由相邻两个奇数子系统控制器线性插值得到, 给出了保证切换LPV系统指数稳定且具有一定鲁棒性能的充分条件. 考虑调参变量的渐变特性, 得到了没有平均驻留时间限制的切换律, 降低了结论的保守性. 仿真实例表明了所提出方法的有效性.

## 1 变体飞行器LPV建模

考虑如图1所示的机翼后掠角可变飞行器“火蜂(Fire-bee)”<sup>[7-8]</sup>, 它是美国NextGen航空公司设计的一款变体无人技术验证机. 在飞行过程中, 该飞行器机翼后掠角 $\lambda$ 能在 $15^\circ \sim 60^\circ$ 之间连续变化, 实现在“巡航”和“高速”两种构型间的切换. 定义 $\xi = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$ 为机翼后掠角变形率(以下简称变形率), 其中 $\lambda_0 = 15^\circ$ 为“巡航”构型对应的机翼后掠角, 易知 $\xi \in [0, 3]$ . 假设飞行器目标运动过程为在高度 $h = 9144 \text{ m}$ , 以马赫数 $Ma = 0.5$ 作水平无侧滑匀速平飞, 且只考虑纵向运动上的干扰, 故该过程只与飞行器纵向运动有关.

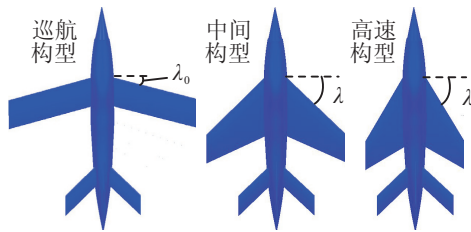


图1 机翼后掠角可变飞行器

变体飞行器纵向短周期非线性动力学模型可表示<sup>[7-8]</sup>为

$$\begin{aligned} m_T V_T (\dot{\alpha} - q) = & \\ gm_T (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) - & \\ S \bar{q} C_L (\lambda, H, Ma, \delta_e, q, \dot{\alpha}) + & \\ (m_w \ddot{x}_w + m_a \ddot{x}_a) \sin \alpha - 2(m_w \dot{x}_w + m_a \dot{x}_a) q \cos \alpha, & \\ J_f \dot{q} = & \\ S \bar{q} c C_m (\lambda, H, Ma, \delta_e, q, \dot{\alpha}) - (m_w x_w^2 + m_a x_a^2) \dot{q} - & \\ 2(m_w x_w \dot{x}_w + m_a x_a \dot{x}_a) q. & \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $C_L$ 、 $C_m$  分别为气动力和气动力矩系数, 可近似地表示为

$$\begin{aligned} C_L &= C_{L_{\alpha=0}} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{\delta_e}} \delta_e, \\ C_m &= C_{m_{\alpha=0}} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_{\delta_e}} \delta_e; \end{aligned}$$

$\alpha$ 、 $q$  分别为攻角、俯仰角速率;  $\delta_e$  为升降舵偏角;  $V_T$ 、 $H$ 、 $Ma$ 、 $\theta$  分别为飞行速度、高度、马赫数和航迹倾角;  $\bar{q}$ 、 $g$  分别为动压和重力加速度; 其他参数的物理

意义和数值见表1<sup>[7]</sup>.

表1 变体飞行器构型参数

参数	巡航构型	高速构型
后掠角 $\lambda/(\circ)$	15	60
俯仰转动惯量 $J_f/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	3107.5	3107.5
总重 $m_T/\text{kg}$	907.8	907.8
机翼重 $m_w/\text{kg}$	272	272
配重 $m_a/\text{kg}$	26.36	26.36
机翼质心位置 $x_w/\text{m}$	0	-0.6072
配重质心位置 $x_a/\text{m}$	-3.2	3.0656
翼面积 $S/\text{m}^2$	4.3621	6.0792
气动弦长 $c/\text{m}$	0.7101	1.9117

选定  $\xi = 0, 0.3, 0.6, \dots, 3$  共11个值作为计算参考点. 参考点选取的越多, 建模精度越高, 但计算量也会越大, 所以参考点的选取需综合考虑这两个因素. 运用Fluent软件计算每个 $\xi$ 下飞行器的纵向气动参数, 并借助Matlab软件对所得数据进行插值拟合, 得到飞行器气动参数与变形率之间的函数关系为

$$\begin{aligned} C_{L_{\alpha=0}} &= 0.05437\xi^3 - 0.208\xi^2 + 0.1476\xi - 0.1036, \\ C_{L_\alpha} &= -0.894\xi + 5.538, \\ C_{L_{\delta_e}} &= -0.00053\xi + 0.0065, \\ C_{M_{\alpha=0}} &= 0.5835\xi^3 - 2.223\xi^2 + 1.639\xi - 0.00035, \\ C_{M_\alpha} &= 0.04743\xi - 0.3003, \\ C_{m_{\delta_e}} &= -0.0066\xi - 0.0222. \end{aligned}$$

将式(1)所示的飞行器非线性模型表示成LPV模型, 通常有雅克比线性化、状态变换和方程替换3种方法<sup>[9]</sup>, 本文采用应用最为广泛的雅克比线性化方法.

首先, 选取一组覆盖待研究工作区域的平衡点. 在此, 同样选取 $\xi = 0, 0.3, 0.6, \dots, 3$ 这11个平衡点. 基于式(1), 令

$$\begin{aligned} f_1 &= \\ & \left( \frac{1}{m_T V_T} \right) (gm_T (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) - \\ & S \bar{q} C_L + (m_w \ddot{x}_w + m_a \ddot{x}_a) \sin \alpha - \\ & 2(m_w \dot{x}_w + m_a \dot{x}_a) q \cos \alpha) + q, \\ f_2 &= \frac{S \bar{q} c C_m - 2(m_w x_w \dot{x}_w + m_a x_a \dot{x}_a) q}{J_f + (m_w x_w^2 + m_a x_a^2)}. \end{aligned}$$

考虑飞行器平衡状态是在不同 $\xi$ 下定直平飞, 即 $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 0$ , 则可以计算得到各平衡点处变量 $\alpha_e(\xi)$ 、 $q_e(\xi)$ 、 $\delta_{ee}(\xi)$ 的值. 然后, 定义偏差变量

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= \alpha - \alpha_e(\xi), \\ \Delta q &= q - q_e(\xi), \\ \Delta \delta_e &= \delta_e - \delta_{ee}(\xi). \end{aligned}$$

将式(1)所示的非线性模型在各自不同 $\xi$ 下平衡点处

线性化, 得到 11 个小扰动线性模型为

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\alpha} \\ \Delta \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} \Delta \delta_e.$$

其中

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{\partial f_1}{\partial \alpha}, & A_{12} &= \frac{\partial f_1}{\partial q}, \\ A_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}, & A_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial q}, \\ B_{11} &= \frac{\partial f_1}{\partial \delta_e}, & B_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial \delta_e}. \end{aligned}$$

最后, 将得到的 11 个小扰动线性模型进行数值拟合, 即可构建变体飞行器纵向短周期运动 LPV 模型

$$\dot{x}(t) = A(\xi)x(t) + B(\xi)u(t). \quad (2)$$

其中: 状态变量  $x = [\Delta \alpha \ \Delta q]^T$ , 控制变量  $u = \Delta \delta_e$ , 且有

$$\begin{aligned} A(\xi) &= \begin{bmatrix} 0.2255\xi - 1.3967 & 1 \\ 0.0876\xi^2 - 0.4889\xi - 0.3775 & 0.4489\xi - 0.8229 \end{bmatrix}, \\ B(\xi) &= \begin{bmatrix} 0.00034\xi - 0.001638 \\ 0.000053\xi^2 - 0.044151\xi - 0.143984 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## 2 切换 LPV 系统

考虑如下 LPV 系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) + E(\rho)w(t), \\ y(t) = C(\rho)x(t) + D(\rho)u(t). \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $x(t) \in R^n$  为状态变量,  $y(t) \in R^p$  为控制输出,  $u(t) \in R^r$  为输入变量,  $w(t) \in R^q$  为扰动输入,  $\rho \in R$  为调参变量且实时可测, 系数矩阵  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  均为  $\rho$  的函数. 假定  $\rho$  及其变化率  $\dot{\rho}$  有界

$$\Theta = \{\rho \in R : \underline{\rho} \leq \rho \leq \bar{\rho}\}, \quad (4)$$

$$V = \{\dot{\rho} \in R : \underline{v} \leq \dot{\rho} \leq \bar{v}\}. \quad (5)$$

将  $\rho$  的取值区间  $\Theta$  划分为  $J$  个子区间, 第  $j$  个子区间  $\Theta_j$  可表示为

$$\Theta_j = \{\rho_j \leq \rho \leq \bar{\rho}_j\}, \quad j \in N_J, \quad (6)$$

其中  $N_J = \{1, 2, \dots, J\}$ .

对应于调参变量的  $J$  个子区间, 系统 (3) 被划分为  $J$  个子系统. 定义  $\sigma(t) : [t_0, \infty) \rightarrow N_J$  为系统的切换信号, 本文中,  $\sigma(t)$  取决于调参变量  $\rho$ , 且由式 (5) 可知, 调参变量具有渐变特性, 所以子系统间的切换仅发生在调参变量子区间的边界上. 得到切换 LPV 系统为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_j(\rho)x(t) + B_j(\rho)u(t) + E_j(\rho)w(t), \\ y(t) = C_j(\rho)x(t) + D_j(\rho)u(t), \quad j \in N_J. \end{cases} \quad (7)$$

构建如下形式的无记忆状态反馈控制器:

$$u(t) = K_j(\rho)x(t), \quad j \in N_J. \quad (8)$$

得到闭环切换 LPV 系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{cl,j}(\rho)x(t) + E_{cl,j}(\rho)w(t), \\ y(t) = C_{cl,j}(\rho)x(t). \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$A_{cl,j}(\rho) = A_j(\rho) + B_j(\rho)K_j(\rho),$$

$$C_{cl,j}(\rho) = C_j(\rho) + D_j(\rho)K_j(\rho),$$

$$E_{cl,j}(\rho) = E_j(\rho).$$

## 3 控制器设计

### 3.1 鲁棒控制器设计

**定义 1**<sup>[10]</sup> 对于切换 LPV 系统 (9), 假设切换律  $\sigma(t)$  在时间段  $\Delta T > 0$  内切换次数为  $N_\sigma(\Delta T)$ , 对于任意  $N_0 \geq 0$ , 若不等式

$$N_\sigma(\Delta T) \leq N_0 + \frac{\Delta T}{\tau_a}, \quad \forall \Delta T > 0 \quad (10)$$

成立, 则  $\tau_a$  称为平均驻留时间.

**定义 2** 如果存在切换律  $\sigma(t)$ , 使得系统的状态轨迹满足  $\|x(t)\| \leq \alpha \|x(t_0)\| e^{-\beta(t-t_0)}$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $t \geq t_0$ , 则称系统是指数稳定的.

**定理 1** 考虑闭环切换 LPV 系统 (9), 给定标量  $\beta > 0$ ,  $\mu > 1$ ,  $\gamma > 0$ , 对于所有的参数变化轨迹, 若存在连续可微的适维矩阵  $P_j(\rho) = P_j^T(\rho) > 0$ , 使得矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Phi_{cl,j} & P_j(\rho)E_{cl,j}(\rho) & C_{cl,j}^T(\rho) \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad j \in N_J; \quad (11)$$

$$\frac{1}{\mu} \underline{P}_{j+1}(\rho) \leq \bar{P}_j(\rho) \leq \mu \underline{P}_{j+1}(\rho), \quad j \in N_{J-1},$$

$$N_{J-1} = \{1, 2, \dots, J-1\} \quad (12)$$

成立. 其中

$$\begin{aligned} \Phi_{cl,j} &= A_{cl,j}^T(\rho)P_j(\rho) + P_j(\rho)A_{cl,j}(\rho) + \\ &\quad \beta P_j(\rho) + \{\underline{v}, \bar{v}\} \frac{\partial P_j}{\partial \rho}, \end{aligned}$$

$$\bar{P}_j(\rho) = P_j(\rho)|_{\rho = \bar{\rho}_j},$$

$$\underline{P}_{j+1}(\rho) = P_{j+1}(\rho)|_{\rho = \underline{\rho}_{j+1}},$$

$\{\bar{v}, \underline{v}\}$  表示取调参变量的上界或者下界. 且系统的平均驻留时间满足

$$\tau_B > \tau_B^* = \frac{\ln \mu}{\beta}. \quad (13)$$

则系统 (9) 指数稳定且具有鲁棒  $H_\infty$  性能  $\gamma$ .

**证明** 对于第  $j$  个子系统, 选取 Lyapunov 函数

$$V_j(t) = x^T(t)P_j(\rho)x(t). \quad (14)$$

求  $V_j(t)$  的时间导数

$$\begin{aligned} \dot{V}_j(t) = & \\ & x^T(t) \left( A_{cl,j}^T(\rho) P_j(\rho) + P_j(\rho) A_{cl,j}(\rho) + \right. \\ & \left. \rho \frac{\partial P_j(\rho)}{\partial \rho} \right) x(t) + 2x^T(t) P_j(\rho) E_{cl,j}(\rho) w(t). \end{aligned}$$

当  $w(t) = 0$  时, 由式(11)有  $\dot{V}_j(t) \leq -\beta V_j(t)$ , 则系统的  $V_j(t)$  满足不等式

$$V_j(t) \leq V_j(t_0^j) e^{-\beta(t-t_0^j)}, \quad t \geq t_0^j, \quad (15)$$

其中  $t_0^j$  表示第  $j$  个子系统运行的初始时刻.

将系统的运行时间区间分割成  $[t_0, t_1)$ ,  $[t_1, t_2)$ ,  $\dots$ ,  $[t_{n-1}, t_n)$ . 由于切换仅发生在子区间边界上, 由  $\mu > 1$  和式(12)可知, 在切换时刻

$$\frac{1}{\mu} V_{j+1}(t) \leq V_j(t) \leq \mu V_{j+1}(t), \quad j \in N_{J-1}, \quad (16)$$

当系统运行在  $t \in [t_k, t_{k+1})$  时, 由式(15)和(16)可知, 系统的 Lyapunov 函数满足

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V_{\sigma(t_k)}(t_k) e^{-\beta(t-t_k)} \leq \\ &\mu V_{\sigma(t_{k-1})}(t_k^-) e^{-\beta(t-t_k)} \leq \\ &\mu V_{\sigma(t_{k-1})}(t_{k-1}) e^{-\beta(t_k-t_{k-1})} e^{-\beta(t-t_k)} \leq, \dots, \leq \\ &\mu^k V_{\sigma(t_0)}(t_0) e^{-\beta(t-t_0)} = \\ &\mu^{N_\sigma(t,t_0)} V_{\sigma(t_0)}(t_0) e^{-\beta(t-t_0)} = \\ &V_{\sigma(t_0)}(t_0) e^{-\beta(t-t_0) + N_\sigma(t,t_0) \ln \mu} \leq \\ &V_{\sigma(t_0)}(t_0) e^{-\frac{1}{2}(\beta - \frac{\ln \mu}{\tau_\beta})(t-t_0)}. \end{aligned}$$

选取

$$a = \min_{j \in N_J} \lambda_{\min}(P_j(\rho)), \quad b = \max_{j \in N_J} \lambda_{\max}(P_j(\rho)),$$

可得

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{b}{a}} \|x(t_0)\| e^{-\frac{1}{2}(\beta - \frac{\ln \mu}{\tau_\beta})(t-t_0)}.$$

当系统的平均驻留时间满足式(13)时, 切换 LPV 系统(9)指数稳定. 系统(9)具有  $H_\infty$  性能约束  $\gamma$  的证明思路与过程同文献[11], 此处不再列出.  $\square$

**注1** 式(11)中存在 Lyapunov 函数矩阵  $P_j(\rho)$  与系统矩阵之间的耦合, 是一个非线性问题, 可通过引入附加矩阵和应用投影引理来实现解耦.

在下面的定理中, 基于解耦后的鲁棒  $H_\infty$  性能准则, 得到系统(7)的鲁棒状态反馈控制器.

**定理2** 考虑切换 LPV 系统(7), 给定标量  $\beta > 0$ ,  $\mu > 1$ ,  $\gamma > 0$ , 平均驻留时间满足式(13), 对于所有的参数变化轨迹, 若存在连续可微的适维矩阵  $\tilde{P}_j(\rho) = \tilde{P}_j^T(\rho) > 0$  和适维矩阵  $G_j, Q_j(\rho)$ , 使得线性矩阵不等式

$$\Gamma_j < 0, \quad j \in N_J, \quad (17)$$

$$\frac{1}{\mu} \tilde{P}_{j+1}(\rho) \leq \tilde{P}_j(\rho) \leq \mu \tilde{P}_{j+1}(\rho), \quad j \in N_{J-1} \quad (18)$$

成立. 其中

$$\Gamma_j = \begin{bmatrix} \Gamma_j^{11} & \Gamma_j^{12} & E_j(\rho) & 0 & G_j \\ * & \Gamma_j^{22} & 0 & \Gamma_j^{24} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\tilde{P}_j(\rho) \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_j^{11} = -(G_j + G_j^T),$$

$$\Gamma_j^{12} = A_j(\rho)G_j + B_j(\rho)Q_j(\rho) + \tilde{P}_j(\rho),$$

$$\Gamma_j^{22} = -\tilde{P}_j(\rho) + \beta \tilde{P}_j(\rho) + \{\underline{v}, \bar{v}\} \frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial \rho},$$

$$\Gamma_j^{24} = (C_j(\rho)G_j + D_j(\rho)Q_j(\rho))^T.$$

则系统(7)指数稳定且具有鲁棒  $H_\infty$  性能  $\gamma$ .

若上述不等式有可行解, 则状态反馈控制器的增益矩阵为  $K_j(\rho) = Q_j(\rho)G_j^{-1}$ .

证明过程见文献[12].

### 3.2 平滑切换鲁棒控制器设计

为抑制系统状态在切换过程中的抖振现象, 提升系统总体控制性能, 设计一种平滑切换控制器  $K(\rho)$ : 令  $J$  为奇数, 当  $\rho \in \Theta_j$  ( $j = 1, 3, \dots, J$ ) 时, 控制器  $K(\rho) = K_j(\rho)$ ; 当  $\rho \in \Theta_j$  ( $j = 2, 4, \dots, J-1$ ) 时, 控制器  $K(\rho) = K_{j-1,j+1}(\rho)$ ,  $K_{j-1,j+1}(\rho)$  由相邻两个子系统控制器  $K_{j-1}(\rho)$ 、 $K_{j+1}(\rho)$  线性插值算得. 即平滑切换控制器可表示为

$$K(\rho) = \begin{cases} K_j(\rho), & \rho \in \Theta_j, \quad j = 1, 3, \dots, J; \\ K_{j-1,j+1}(\rho), & \rho \in \Theta_j, \quad j = 2, 4, \dots, J-1. \end{cases} \quad (19)$$

其中

$$K_j(\rho) = Q_j(\rho)G_j^{-1}, \quad (20)$$

$$K_{j-1,j+1}(\rho) = Q_{j-1,j+1}(\rho)G_{j-1,j+1}^{-1},$$

$$Q_{j-1,j+1}(\rho) = \alpha_1(\rho)\underline{Q}_{j+1}(\rho) + \alpha_2(\rho)\overline{Q}_{j-1}(\rho), \quad (21)$$

$$G_{j-1,j+1} = \alpha_1(\rho)G_{j+1} + \alpha_2(\rho)G_{j-1}, \quad (22)$$

$$\alpha_1(\rho) = \frac{\rho - \bar{\rho}_{j-1}}{\underline{\rho}_{j+1} - \bar{\rho}_{j-1}}, \quad \alpha_2(\rho) = 1 - \alpha_1(\rho), \quad (23)$$

$$\overline{Q}_{j-1}(\rho) = Q_{j-1}(\rho)|\rho = \bar{\rho}_{j-1},$$

$$\underline{Q}_{j+1}(\rho) = Q_{j+1}(\rho)|\rho = \underline{\rho}_{j+1}. \quad (24)$$

**定理3** 考虑切换 LPV 系统(7), 给定标量  $\beta > 0$ ,  $\mu > 1$ ,  $\gamma > 0$ , 对于所有的参数变化轨迹, 若存在连续可微的适维矩阵  $\tilde{P}_j(\rho) = \tilde{P}_j^T(\rho) > 0$  和适维矩阵  $G_j, Q_j(\rho)$ , 使得线性矩阵不等式

$$\Gamma_j < 0, \quad j = 1, 3, \dots, J; \quad (25)$$

$$\tilde{\Gamma}_{j-1,j+1} < 0, \quad j = 2, 4, \dots, J-1; \quad (26)$$

$$\hat{\Gamma}_{j-1,j+1} < 0, \quad j = 2, 4, \dots, J-1 \quad (27)$$

成立. 其中:  $\Gamma_j$  的表达式同式 (17), 且有

$$\tilde{\Gamma}_{j-1,j+1} = \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_{j-1,j+1}^{11} & \tilde{\Gamma}_{j-1,j+1}^{12} & E_j(\rho) & 0 & G_{j+1} \\ * & \tilde{\Gamma}_{j-1,j+1}^{22} & 0 & \tilde{\Gamma}_{j-1,j+1}^{24} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\tilde{P}_{j+1}(\rho) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Gamma}_{j-1,j+1}^{11} = -(G_{j+1} + G_{j+1}^T),$$

$$\tilde{\Gamma}_{j-1,j+1}^{12} = A_j(\rho)G_{j+1} + B_j(\rho)Q_{j+1}(\rho) + \tilde{P}_{j+1}(\rho),$$

$$\tilde{\Gamma}_{j-1,j+1}^{22} =$$

$$\left(\beta - 1 + \frac{\{\underline{v}, \bar{v}\}}{\rho - \underline{\rho}_{j-1}}\right) \tilde{P}_{j+1}(\rho) + \{\underline{v}, \bar{v}\} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1}}{\partial \rho},$$

$$\tilde{\Gamma}_{j-1,j+1}^{24} = (C_j(\rho)G_{j+1} + D_j(\rho)Q_{j+1}(\rho))^T,$$

$$\hat{\Gamma}_{j-1,j+1} =$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Gamma}_{j-1,j+1}^{11} & \hat{\Gamma}_{j-1,j+1}^{12} & E_j(\rho) & 0 & G_{j-1} \\ * & \hat{\Gamma}_{j-1,j+1}^{22} & 0 & \hat{\Gamma}_{j-1,j+1}^{24} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{P}_{j-1}(\rho) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Gamma}_{j-1,j+1}^{11} = -(G_{j-1} + G_{j-1}^T),$$

$$\hat{\Gamma}_{j-1,j+1}^{12} = A_j(\rho)G_{j-1} + B_j(\rho)\bar{Q}_{j-1}(\rho) + \bar{P}_{j-1}(\rho),$$

$$\hat{\Gamma}_{j-1,j+1}^{22} =$$

$$\left(\beta - 1 + \frac{\{\underline{v}, \bar{v}\}}{\rho - \underline{\rho}_{j+1}}\right) \bar{P}_{j-1}(\rho) + \{\underline{v}, \bar{v}\} \frac{\partial \bar{P}_{j-1}}{\partial \rho},$$

$$\hat{\Gamma}_{j-1,j+1}^{24} = (C_j(\rho)G_{j-1} + D_j(\rho)\bar{Q}_{j-1}(\rho))^T.$$

则系统 (7) 指数稳定且具有鲁棒  $H_\infty$  性能  $\gamma$ .

若上述不等式有可行解, 则平滑切换控制器的增益矩阵可由式 (19) 得到.

**证明** 1) 当  $j = 2, 4, \dots, J-1$  时, 由式 (26) 和 (27) 可知其凸组合

$$\alpha_1(\rho)\tilde{\Gamma}_{j-1,j+1} + \alpha_2(\rho)\hat{\Gamma}_{j-1,j+1} < 0 \quad (28)$$

成立. 定义

$$\tilde{P}_{j-1,j+1}(\rho) = \alpha_1(\rho)\tilde{P}_{j+1}(\rho) + \alpha_2(\rho)\bar{P}_{j-1}(\rho), \quad (29)$$

则有

$$\begin{aligned} \{\underline{v}, \bar{v}\} \frac{\partial \tilde{P}_{j-1,j+1}}{\partial \rho} = & \\ \alpha_1(\rho) & (\{\underline{v}, \bar{v}\} \frac{\partial \tilde{P}_{j+1}}{\partial \rho} + \frac{\{\underline{v}, \bar{v}\}}{\rho - \underline{\rho}_{j-1}} \tilde{P}_{j+1}(\rho)) + \\ \alpha_2(\rho) & (\{\underline{v}, \bar{v}\} \frac{\partial \bar{P}_{j-1}}{\partial \rho} + \frac{\{\underline{v}, \bar{v}\}}{\rho - \underline{\rho}_{j+1}} \bar{P}_{j-1}(\rho)). \end{aligned} \quad (30)$$

综合式 (21) ~ (23)、(29) 和 (30) 可知, 式 (28) 等价于

$$\Gamma_{j-1,j+1} < 0. \quad (31)$$

其中

$$\Gamma_{j-1,j+1} = \begin{bmatrix} \Gamma_{j-1,j+1}^{11} & \Gamma_{j-1,j+1}^{12} & E_j(\rho) & 0 & G_{j-1,j+1} \\ * & \Gamma_{j-1,j+1}^{22} & 0 & \Gamma_{j-1,j+1}^{24} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\tilde{P}_{j-1,j+1}(\rho) \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{j-1,j+1}^{11} = -(G_{j-1,j+1} + G_{j-1,j+1}^T),$$

$$\Gamma_{j-1,j+1}^{12} = A_j(\rho)G_{j-1,j+1} + B_j(\rho)Q_{j-1,j+1}(\rho) + \tilde{P}_{j-1,j+1}(\rho),$$

$$\Gamma_{j-1,j+1}^{22} =$$

$$-\tilde{P}_{j-1,j+1}(\rho) + \beta \tilde{P}_{j-1,j+1}(\rho) + \{\underline{v}, \bar{v}\} \frac{\partial \tilde{P}_{j-1,j+1}}{\partial \rho},$$

$$\Gamma_{j-1,j+1}^{24} = (C_j(\rho)G_{j-1,j+1} + D_j(\rho)Q_{j-1,j+1}(\rho))^T.$$

令

$$Q_j(\rho) = Q_{j-1,j+1}(\rho),$$

$$G_j = G_{j-1,j+1},$$

$$\tilde{P}_j(\rho) = \tilde{P}_{j-1,j+1}(\rho),$$

则当  $j = 2, 4, \dots, J-1$  时, 式 (31) 等价于式 (17), 且控制器增益矩阵为

$$K(\rho) = K_{j-1,j+1}(\rho) = Q_{j-1,j+1}(\rho)G_{j-1,j+1}^{-1}. \quad (32)$$

结合式 (25) 可知, 对于  $\forall j \in N_J$ , 式 (17) 成立, 且平滑切换控制器的增益矩阵可由式 (19) 得到.

2) 由式 (29) 可知, 当  $j = 2, 4, \dots, J-1$  时,  $\tilde{P}_j(\rho) = \bar{P}_{j-1}(\rho)$  且  $\bar{P}_j(\rho) = \tilde{P}_{j+1}(\rho)$ . 所以有  $\forall j \in N_{J-1}$ ,  $\bar{P}_j(\rho) = \tilde{P}_{j+1}(\rho)$ , 等价于式 (18) 中  $\mu = 1$ , 由式 (13) 可知最小平均驻留时间  $\tau_\beta^* = 0$ .  $\square$

**注 2** 由于考虑了调参变量的渐变特性, 在定理 1 和定理 2 中, 只在调参变量子区间边界上对 Lyapunov 函数矩阵提出了式 (12) 和 (18) 所示的约束条件. 进而在定理 3 中, 通过设计平滑切换控制器以及定义  $\tilde{P}_{j-1,j+1}(\rho)$  如式 (29) 所示, 得到了没有平均驻留时间限制的切换律, 降低了结论的保守性.

**注 3** 本文只讨论了调参变量为一维的情形, 对于多维的情形, 所提出的方法同样适用. 主要区别在于, 将式 (21)、(22) 和 (29) 所示的线性插值由一维空间扩展到多维空间.

由于对参数的依赖性, 式 (25) ~ (27) 对应的是无限维的线性矩阵不等式组, 可采用近似基函数和网格技术将其转化为有限维的 LMIs<sup>[13]</sup>. 选取近似基函数为  $\sum_{i=1}^{n_f} f_i(\rho)$ , 则有

$$Q_j(\rho) = \sum_{i=1}^{n_f} f_i(\rho) Q_{i,j}(\rho),$$

$$\tilde{P}_j(\rho) = \sum_{i=1}^{n_f} f_i(\rho) \tilde{P}_{i,j}(\rho) > 0. \quad (33)$$

**推论 1** 考虑切换 LPV 系统 (7), 给定标量  $\beta$ , 对于任意的  $j \in N_J$ , 可以通过求解以下凸优化问题设计次优鲁棒控制器:

$$\min \gamma, \text{ s.t. 式 (25)~(27) 和 (33),} \quad (34)$$

满足要求的控制器增益矩阵可由式 (19) 求得.

**注 4** 将调参变量区间划分为奇数个子区间, 其个数和上下界的选取应在满足预期鲁棒性能指标的前提下, 使得子区间个数尽可能小, 以减少切换的次数. 调参变量区间划分方法可总结为如下算法.

**Step 1:** 设定  $J = 1$  且预期的鲁棒性能指标为  $\gamma_0$ .

**Step 2:** 将调参变量划分为  $J$  个子区间, 在所有可能的划分中, 通过求解式 (34) 所示的凸优化问题, 得到使鲁棒性能指标最小的划分方法, 此时性能指标为  $\gamma^*$ .

**Step 3:** 若  $\gamma^* \leq \gamma_0$ , 则终止算法, 否则令  $J = J + 2$ , 返回 Step 2.

### 4 仿真分析

为验证所设计平滑切换控制器的有效性, 以 Firebee 的 LPV 模型为例进行仿真验证. 考虑开环 LPV 系统 (3), 选取变形率为系统调参变量, 令  $A(\rho) = A(\xi)$ ,  $B(\rho) = B(\xi)$ ,  $A(\xi)$  和  $B(\xi)$  同式 (2),  $C(\rho) = I_{2 \times 2}$ ,  $D(\rho) = 0$ . 为了更加全面地考察系统的鲁棒性能,  $E(\rho)$  的设计应使得干扰信号  $w(t)$  对所有状态变量的干扰作用大体一致. 本文中, 由于状态变量可能的取值范围  $\Delta\alpha$  略小于  $\Delta q$ , 可令  $E(\rho) = [0.4 \ 0.5]^T$ .

图 2 为变体飞行器鲁棒 LPV 控制系统结构. 其中:  $G(\xi)$  为变体飞行器 LPV 模型,  $K(\xi)$  为系统控制器,  $w$  为测量噪声,  $r$  为系统参考输入,  $y$  为系统输出,  $u$  为控制输入,  $W_e$ 、 $W_u$ 、 $W_m$  分别为跟踪误差加权、控制加权和测量噪声加权, 设计过程可参见文献 [8].

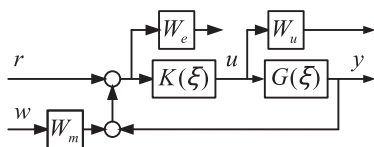


图 2 鲁棒 LPV 控制系统结构

设定后掠角变化速率小于  $3^\circ/\text{s}$ , 可知式 (4) 和 (5) 中  $\theta = [0, 3]$ ,  $V = [-0.2, 0.2]$ . 利用网格技术将  $\theta$  均匀划分为 30 个网格, 选择  $\beta = 0.8$ . 设定预期鲁棒性能水平  $\gamma_0 = 1.5$ , 通过求解式 (34) 的凸优化问题, 两步迭代后, 计算得到次优  $H_\infty$  噪声抑制水平  $\gamma^* = 1.4194$ , 调参变量划分为 3 个子区间  $\theta_1 = [0, 1.6]$ ,  $\theta_2$

$= [1.6, 2.2]$ ,  $\theta_3 = [2.2, 3]$ , 同时得到  $Q_1(\rho)$ 、 $Q_3(\rho)$ 、 $G_1$  和  $G_3$ , 代入式 (19) 得到 3 个子系统的控制器增益矩阵分别为

$$K_1 = [-45.4861 + 5.7176\xi \quad -17.9006 + 2.2419\xi],$$

$$K_2 = [-46.2842 + 6.2164\xi \quad -18.1576 + 2.4025\xi],$$

$$K_3 = [-48.2345 + 7.1029\xi \quad -18.8249 + 2.7058\xi].$$

假定变形率随时间的变化规律为

$$\xi(t) = \begin{cases} 0.2t - 1, & 5 \leq t \leq 20; \\ 3, & 20 \leq t \leq 30; \\ -0.2t + 9, & 30 \leq t \leq 45; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

易知飞行器在飞行过程中, 将会发生 4 次切换, 切换时刻分别为第 13 s、第 16 s、第 34 s 和第 37 s.

为验证控制系统的鲁棒性及平滑切换特性, 假定外界干扰信号为  $w(t) = e^{-0.1t} \sin(0.2\pi t)$ . 在同一区间划分下, 运用定理 2 设计非平滑切换控制器, 与本文所设计的平滑切换控制器一起, 分别进行变体飞行器非线性仿真. 仿真曲线如图 3~图 5 所示. 图中: o 标示了 4 个切换时刻,  $\alpha_{\text{com}}$ 、 $q_{\text{com}}$  分别为参考迎角和参考俯仰角速率仿真曲线,  $\alpha_{\text{nosm}}$ 、 $q_{\text{nosm}}$  分别为非平滑切换控制器作用下迎角和俯仰角速率仿真曲线,  $\alpha_{\text{sm}}$ 、 $q_{\text{sm}}$  分别为平滑切换控制器作用下迎角和俯仰角速率仿真曲线.

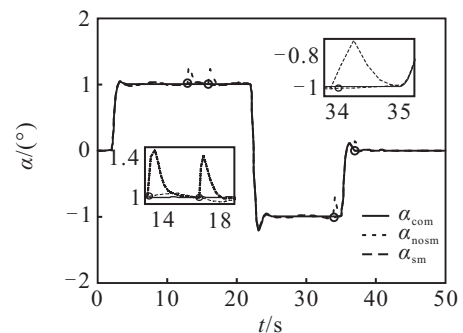


图 3 迎角变化曲线

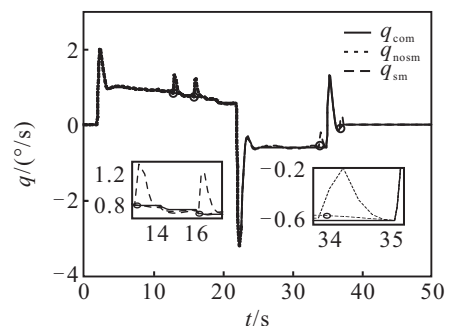


图 4 俯仰角速率变化曲线

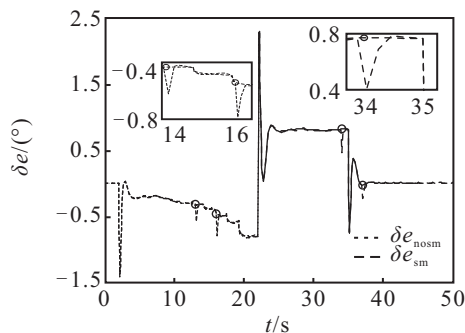


图 5 升降舵舵偏变化曲线

由图 3 和图 4 可见, 当飞行器后掠角连续变化且存在外部干扰时, 飞行器迎角和俯仰角速率能快速跟踪所给定的参考信号, 表现出良好的稳定性和鲁棒性。同时, 在图 3~图 5 中, 以第 13 s、第 16 s 和第 37 s 三个切换时刻为例, 通过细节放大图可知, 在系统发生切换时, 采用非平滑切换控制器, 飞行器状态和控制输入会出现明显的抖振, 而采用本文所设计的平滑切换控制器, 系统切换过程平滑, 控制性能良好。

## 5 结 论

本文将后掠角可变飞行器建模成切换 LPV 系统, 设计平滑切换控制器, 其中偶数子系统控制器由相邻子系统控制器线性插值得到。在进行稳定性分析和控制器设计时, 考虑调参变量的渐变特性, 得到了没有平均驻留时间限制的切换律, 降低了结论的保守性。仿真结果表明, 相比于非平滑切换控制器, 所设计的平滑切换鲁棒控制器使得变体飞行器不但具有良好的稳定性和鲁棒性, 而且能实现变形过程中的平滑切换。

### 参考文献(References)

- [1] Weisshaar T A. Morphing aircraft systems: Historical perspectives and future challenges[J]. *J of Aircraft*, 2013, 50(2): 337-353.
- [2] Shamma J S, Athans M. Gain scheduling: Potential hazards and possible remedies[J]. *IEEE Control System*, 1992, 12(3): 101-107.
- [3] Lim S, How J P. Modeling and  $H_\infty$  control for switched linear parameter-varying missile autopilot[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2003, 11(6): 830-838.
- [4] Lu B, Wu F, Kim S W. Switching LPV control of an F-16 aircraft via controller state reset[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2006, 14(2): 267-277.
- [5] Hanifzadegan M, Nagamune R. Smooth switching LPV controller design for LPV systems[J]. *Automatica*, 2014, 50(5): 1481-1488.
- [6] Chen P C. The design of smooth switching control with application to V/STOL aircraft dynamics under input and output constraints[J]. *Asian J of Control*, 2012, 14(2): 439-453.
- [7] Seigler T M. Dynamics and control of morphing aircraft[D]. Virginia: Department of Mechanical Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2005.
- [8] 王青, 王通, 后德龙, 等. 基于速度线性化的变体飞行器鲁棒 LPV 控制[J]. *系统工程与电子技术*, 2014, 36(6): 1130-1136.  
(Wang Q, Wang T, Hou D L, et al. Robust LPV control for morphing vehicles via velocity-based linearization[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2014, 36(6): 1130-1136.)
- [9] Marcos A, Balas G J. Development of linear-parameter-varying models for aircraft[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, 27(2): 218-228.
- [10] Hou Y, Wang Q, Dong C. Gain scheduled control: Switched polytopic system approach[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, 34(2): 623-629.
- [11] 李艳辉, 黄娜, 关正伟. 连续切换 LPV 系统的鲁棒  $H_\infty$  滤波[J]. *控制与决策*, 2013, 28(3): 456-460.  
(Li Y H, Huang N, Guan Z W. Robust  $H_\infty$  filtering for continuous switched LPV systems[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(3): 456-460.)
- [12] 王俊玲, 王常虹, 高会军. 时滞 LPV 系统的  $H_\infty$  控制新方法[J]. *控制理论与应用*, 2005, 22(1): 144-148.  
(Wang J L, Wang C H, Gao H J. Advanced  $H_\infty$  control approach for time-delayed LPV systems[J]. *Control Theory & Application*, 2005, 22(1): 144-148.)
- [13] Wu F, Grigoriadis K M. LPV systems with parameter-varying time delays: Analysis and control[J]. *Automatica*, 2001, 37(2): 221-229.

(责任编辑: 郑晓蕾)