

非匹配不确定离散系统的无抖振积分滑模控制

董文瀚, 马振强, 解武杰, 马骏

(空军工程大学 航空航天工程学院, 西安 710038)

摘要: 针对一类非匹配不确定离散系统, 设计一种无抖振离散积分滑模控制器. 为了抑制非匹配不确定性对系统的影响, 采用线性矩阵不等式方法设计一种新型的切换函数和对应的滑模控制律, 并证明了闭环系统的 Lyapunov 稳定性. 同时, 引入饱和函数设计控制器, 使系统状态在积分滑模面的某个小邻域内做准滑模运动, 并通过合理选择饱和函数的边界层厚度, 使控制信号不含任何抖振. 理论分析和数值仿真验证了所提出方法的有效性.

关键词: 非匹配不确定性; 离散系统; 积分滑模控制; 无抖振; 鲁棒性

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Chattering-free discrete time integral sliding-mode control for systems with unmatched uncertainties

DONG Wen-han, MA Zhen-qiang, XIE Wu-jie, MA Jun

(Aeronautics and Astronautics Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China.

Correspondent: DONG Wen-han, E-mail: dongwenhan@sina.com)

Abstract: A chattering-free integral sliding-mode control method is proposed for the discrete-time linear systems with unmatched uncertainties. Based on the linear matrix inequality(LMI) technique, a new switching function and a sliding-mode controller are proposed to minimize the effect of unmatched uncertainties, and the Lyapunov stability is proved. The saturation function is introduced to ensure that the system states move in a small neighborhood of the sliding surface as quasi-sliding motion. The boundary layer thickness of the saturation function is chosen to make sure the controller chattering-free with strong robustness. The results of theoretical analysis and simulation show the effectiveness of the proposed integral sliding-mode control scheme.

Keywords: unmatched uncertainties; discrete system; integral sliding-mode control; chattering-free; robustness

0 引言

一般而言, 滑模控制系统中发生的运动可分为两个部分: 趋近运动和滑动模态. 系统从任意初始状态趋向滑模面, 直到到达滑模面的运动称为趋近运动; 系统状态到达滑模面后沿着滑模面向原点的运动称为滑动模态. 滑模控制的滑动模态在系统受到扰动和外界干扰时具有完全的鲁棒性, 或称为不变性, 然而滑模控制的趋近运动却不具有不变性, 甚至鲁棒性. 高为炳^[1]从趋近运动的品质考虑, 比如系统状态向滑模面运动的速度快慢等, 提出了趋近律的概念, 尽管不能具体地刻画或者算出趋近运动的过程和某些品质指标, 却可以间接地对趋近运动的品质给出一个评价, 特别是可以给出直观、相对的品质比较, 从而给出改善系统品质的方法. 该方法简单、直观, 且适合

线性和非线性滑模控制系统, 但是仍然没有解决滑模控制的趋近运动的鲁棒性问题.

为了解决滑模控制趋近过程的鲁棒性问题, 文献[2]提出了积分滑模思想, 它可以使系统状态一开始就运动在滑模面上, 消除了传统滑模控制的趋近运动过程, 并解决了满足匹配条件的干扰抑制问题, 其基本思想是将控制量分为两部分: 连续的标称控制量和不连续控制量. 连续的标称控制量是为了使标称系统具有满意的控制性能, 不连续控制量是为了抑制系统的匹配干扰. 然而, 积分滑模控制系统无法解决对于系统非匹配不确定性的鲁棒性. 此后, 众多学者将积分滑模控制技术与其他方法相结合, 以此来达到既能消除滑模控制的趋近运动, 又能抑制系统存在的非匹配不确定性的目的, 在理论和工程应用上做出了大量

收稿日期: 2014-10-11; 修回日期: 2015-03-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273141, 60904038); 航空基金项目(20141396012).

作者简介: 董文瀚(1979—), 男, 副教授, 博士, 从事自适应控制、飞行控制等研究; 马振强(1991—), 男, 硕士生, 从事现代控制理论与应用的研究.

创新^[3-9].

通过分析上述文献可知, 积分滑模的相关研究目前仍存在以下不足: 1) 大多数研究皆为连续积分滑模控制方法, 对离散积分滑模控制方法的研究为数甚少; 2) 现有的离散滑模大多是针对满足匹配条件的不确定系统进行设计的^[10-13], 对具备不确定非匹配条件的离散系统缺乏研究; 3) 普遍存在于滑模控制的控制信号抖振现象在离散滑模中同样没有得到解决. 为此, 本文针对一类含有非匹配不确定性的离散系统, 研究了其无抖振离散积分滑模控制器的设计问题. 基本思想是: 考虑到系统不满足匹配条件的干扰对理想积分准滑动模态的影响最小, 应用线性矩阵不等式(LMI)方法来抑制非匹配不确定性对系统的影响, 从而使系统状态一开始就位于积分滑模面上, 消除滑模控制的趋近运动. 同时, 引入饱和函数设计, 使系统状态在离散积分滑模面的某个小邻域内做准滑模运动, 并通过合理选择饱和函数的边界层厚度, 使控制信号不含任何抖振.

1 问题描述

针对存在干扰的 n 阶线性不确定离散系统

$$x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + B[u(k) + d(k)]. \quad (1)$$

其中: $x(k) \in \mathbf{R}^n$, $u(k) \in \mathbf{R}$, $d(k) \in \mathbf{R}$ 分别为系统的状态、控制输入和扰动; ΔA 为矩阵 A 摄动矩阵; A 、 B 和 ΔA 具有适当的维数. 对于系统(1)给出如下假设.

假设 1 扰动 $d(k)$ 光滑有界.

假设 2 不确定性矩阵 ΔA 不满足匹配条件, 且可表示为 $\Delta A = DF(k)H$. 其中: D 和 H 为已知具有适当维数的矩阵; $F(k)$ 为 k 的光滑函数未知矩阵, 具有 Lebesgue 可测元, 且满足 $F^T(k)F(k) \leq I$, I 为具有适当维数的单位矩阵.

控制目标: 对于含非匹配不确定性离散系统(1), 设计积分滑模控制器, 使得闭环系统稳定, 同时系统不存在抖振.

2 离散积分滑模控制器设计

在设计离散积分滑模控制器之前, 必先进行离散积分滑模切换函数的设计. 定义如下离散积分滑模切换函数:

$$\begin{cases} s(k) = Gx(k) - Gx(0) + b(k), \\ b(k) = b(k-1) + Ex(k-1). \end{cases} \quad (2)$$

其中: $s \in \mathbf{R}$; $b \in \mathbf{R}$, $b(0) = 0$; G 和 E 为待设计的具有适当维数的矩阵, 且 $GB \neq 0$.

注 1 由式(2)可得 $s(0) = 0$, 即系统状态从一开始就位于滑模面上, 消除了滑模控制的趋近运动. 离散积分滑模切换函数的设计等同于矩阵 G 和 E 的设计, 接下来分析如何设计矩阵 G 和 E .

首先设计矩阵 G , 在此之前先给出如下定理.

定理 1 对于系统(1)的矩阵 $B \neq 0$ ($B \in \mathbf{R}^n$), 以下等式恒成立:

$$I_n = BB^+ + B^+B^{\perp+}. \quad (3)$$

其中: I_n 为 n 阶单位矩阵; B^+ 为矩阵 B 的广义逆矩阵; 矩阵 $B^{\perp} \in \mathbf{R}^{n \times (n-1)}$ 为矩阵 B 的正交补矩阵, 即为矩阵 B^T 核空间的一个矩阵; 矩阵 $B^{\perp+}$ 为矩阵 B^{\perp} 的广义逆矩阵.

证明 考虑到矩阵 $B \neq 0$, 故矩阵 B 列满秩, 由矩阵论知识不难得知 B^{\perp} 列满秩, 进而可得 $B^+B = 1$, $B^{\perp+}B^{\perp} = I_{n-1}$. 其中 I_{n-1} 为 $n-1$ 阶单位矩阵. 矩阵 B^{\perp} 为矩阵 B^T 核空间的一个矩阵, 由此可得 $B^TB^{\perp} = 0$. 结合广义逆矩阵性质, 进而可得

$$\begin{aligned} B^+B^{\perp} &= B^+B^{+T}B^TB^{\perp} = 0, \\ B^{\perp+}B &= B^{\perp+}B^{\perp+T}(B^TB^{\perp})^T = 0. \end{aligned}$$

令

$$P = \begin{bmatrix} B^+ \\ B^{\perp+} \end{bmatrix},$$

由等式

$$\begin{bmatrix} B^+ \\ B^{\perp+} \end{bmatrix} [B \ B^{\perp}] = \begin{bmatrix} B^+B & B^+B^{\perp} \\ B^{\perp+}B & B^{\perp+}B^{\perp} \end{bmatrix} = I_n$$

可知, 矩阵 P 非奇异, 其逆矩阵为 $P^{-1} = [B \ B^{\perp}]$, 进而可得

$$P^{-1}P = [B \ B^{\perp}] \begin{bmatrix} B^+ \\ B^{\perp+} \end{bmatrix} = I_n. \quad \square$$

结合定理 1 可知, 系统(1)的总干扰 $\phi = \Delta Ax(k) + Bd(k)$ 可分解为 $\phi = \phi_m + \phi_u$, $\phi_m = BB^+\phi$, $\phi_u = B^{\perp}B^{\perp+}\phi$, 其中 ϕ_m 和 ϕ_u 分别为匹配干扰和非匹配干扰. 由式(1)和(2)可得

$$s(k+1) = G[Ax(k) + Bu + \phi] - Gx(0) + b(k+1). \quad (4)$$

注意到, 若 $s(k+1) = s(k) = 0$, 则意味着系统的状态完全位于离散积分滑模面. 综合式(2)和(4)可知, 此时应取的等效控制为

$$u_{eq} = -(GB)^{-1}[(GA - G + E)x(k) + G\phi]. \quad (5)$$

将式(5)代入(1)可得理想的准滑动模态动态方程

$$x_{eq}(k+1) = [A - B(GB)^{-1}(GA - G + E)]x_{eq}(k) + [I_n - B(GB)^{-1}G]\phi_u. \quad (6)$$

注 2 由式(6)可知, 理想准滑动模态动态方程不含有系统的匹配干扰.

称理想的准滑动模态动态方程上的干扰为等效干扰 ϕ_{eq} , 即 $\phi_{eq} = [I_n - B(GB)^{-1}G]\phi_u$.

为了减小等效干扰对理想准滑动模态的影响, 观察等效干扰表达式可知, 仅有矩阵 G 为可设计矩阵, 故有必要寻求矩阵 G , 使等效干扰范数最小.

定理 2 存在 $G = B^+$, 使 ϕ_{eq} 的范数最小, 即

$$G^* = B^+ = \arg \min_{G \in \mathbb{R}^{1 \times n}} \|[I_n - B(GB)^{-1}G]\phi_u\|_2, \quad (7)$$

并且可得 $\phi_{eq} = \phi_u$.

证明 令 $\varphi = (GB)^{-1}G\phi_u$, 由此可得 $\|[I_n - B(GB)^{-1}G]\phi_u\|_2 = \|\phi_u - B\varphi\|_2$. 因此, 式(7)等价于 $\varphi^* = \arg \min_{\varphi \in \mathbb{R}^n} \|\phi_u - B\varphi\|_2$. 此时, 方程的一个解为 $\varphi^* = B^+\phi_u$. 当 $G = B^+$ 时, 有 $\varphi = (B^+B)^{-1}B^+\phi_u = \varphi^*$. 故存在矩阵 $G = B^+$, 使得 ϕ_{eq} 的范数最小. 将 $G = B^+$ 代入等效干扰表达式, 并结合定理 1, 可得 $\phi_{eq} = [I_n - B(GB)^{-1}G]\phi_u = \phi_u$. \square

由上述分析可知, 积分滑模等效控制对于非匹配干扰无能为力, 甚至如果矩阵 G 选择不当, 则会扩大非匹配干扰对理想的准滑动模态的影响.

下面分析滑模切换函数中矩阵 E 的设计. 结合上述分析, 理想的准滑动模态的动态方程可整理为

$$x_{eq}(k+1) = [\Phi - BE + \Gamma F(k)H]x_{eq}(k). \quad (8)$$

其中: $\Phi = A - BB^+A + BB^+$, $\Gamma = B^\perp B^\perp + D$.

观察式(8)可知, 理想的准滑动模态的动态方程中仅有一个未知矩阵 E 待设计, 使得式(8)所示系统鲁棒稳定.

定理 3 若存在对称正定矩阵 W 、矩阵 X 和标量 $\lambda > 0$, 使矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -W + \lambda\Gamma\Gamma^T & \Phi W - BX & 0 \\ (\Phi W - BX)^T & -W & WH^T \\ 0 & HW & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

成立, 则假设 2 满足时, 式(8)所示的理想准滑动模态方程是鲁棒渐近稳定的. 其中: $W = Q^{-1}$, $X = EW$.

证明 对于系统(8), 定义 Lyapunov 函数 $V(k) = x_{eq}^T(k)Qx_{eq}(k)$, 可得 $\Delta V(k) = x_{eq}^T(k)(M^TQM - Q) \times x_{eq}(k)$. 其中: Q 为对称正定矩阵, $M = [\Phi - BE + \Gamma F(k)H]$. 若当 $k \geq 0$ 时, 对于所有 $x_{eq}(k)$ (除 $x_{eq}(k) = 0$ 外), $\Delta V(k) < 0$, 即 $M^TQM - Q < 0$, 则式(8)所示的理想准滑动模态是鲁棒渐近稳定的. 由矩阵 Schur 补引理^[14]可得, 上式对应的矩阵不等式为

$$\begin{bmatrix} -Q^{-1} & M \\ M^T & -Q \end{bmatrix} < 0.$$

采用对称正定矩阵 $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix}$ 对上式进行左乘和右乘, 可得

$$\begin{bmatrix} -Q^{-1} & MQ^{-1} \\ Q^{-1}M^T & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

设 $W = Q^{-1}$, $X = EW$, 则 W 也为对称正定矩阵, 上式等价于

$$\begin{bmatrix} -W & N \\ N^T & -W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} F(k)[0 \quad HW] +$$

$$[0 \quad HW]^T F^T(k) \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0.$$

其中 $N = \Phi W - BX$. 由文献[15]可知, 当且仅当存在一个标量 $\lambda > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} -W & N \\ N^T & -W \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix}^T + \lambda^{-1}[0 \quad HW]^T [0 \quad HW] < 0$$

时, 上式对于所有满足 $F^T(k)F(k) \leq I$ 的矩阵 $F(k)$ 成立. 根据矩阵 Schur 补引理, 上式等价于

$$\begin{bmatrix} -W + \lambda\Gamma\Gamma^T & N & 0 \\ N^T & -W & WH^T \\ 0 & HW & -\lambda I \end{bmatrix} < 0.$$

如果该矩阵不等式是可行的, 则可得可行解矩阵 W 和 X , 进而可得 $Q = W^{-1}$ 和离散积分滑模切换函数的待设计矩阵 $E = XW^{-1}$. 进一步可知, 对于所有的 $x_{eq}(k)$ (除 $x_{eq}(k) = 0$ 外), $\Delta V(k) < 0$. \square

注 3 由定理 3 可知, 设计矩阵 E 的选择问题可转化为线性矩阵不等式的可行性问题, 而通过 Matlab LMI 工具箱容易求得定理 3 中矩阵不等式的可行解.

确定离散积分滑模切换函数的设计矩阵 G 和 E 后, 即完成了积分滑模面的设计, 下一步要设计整个系统的控制器. 在连续系统中, 对于所设计的积分滑模控制系统而言, 由于系统状态从一开始就位于滑模面上, 消除了滑模控制的趋近阶段, 故所设计的控制器在系统受到干扰的情况下, 应能够使系统状态沿着积分滑模面运动, 对于离散系统而言, 所设计的控制器应能够使系统状态在离散积分滑模面的某一邻域内做准滑模运动. 由于系统(1)中干扰 ϕ 是未知的, 根据文献[16], 可用扰动前一个值 $\phi(k-1)$ 来估计当前扰动 $\phi(k)$. 为了消除系统的抖振, 引入饱和函数

$$\text{sat}(s, \delta) = \begin{cases} \text{sign}(s), & |s| > \delta; \\ s/\delta, & |s| \leq \delta, \end{cases}$$

并设计控制律

$$u = s(k) - \varepsilon T \text{sat}(s(k), \delta) - (B^+A + E)x(k) + B^+x(0) - b(k) - B^+\phi(k-1). \quad (10)$$

其中: $\varepsilon T > 0$; $\phi(k-1) = x(k) - Ax(k-1) + Bu(k-1)$ 被称为一步延时干扰估计^[17]; $\delta = \varepsilon T$ 称为边界层厚度^[18], 其选择与采样时间 T 和干扰变化率的最大值有关, 稍后将作详细分析.

3 离散积分滑模切换函数收敛性分析

在上节中, 通过对矩阵 G 和 E 的设计来抑制非匹配干扰对系统的影响, 进而给出了系统的控制律. 下面分析当采用控制律(10)时, 离散积分滑模切换函数的收敛性.

由式(2)可知

$$s(k+1) = B^+[Ax(k) + Bu + \phi] - B^+x(0) + b(k) + Ex(k). \quad (11)$$

将式(1)和(10)代入(11)并整理,可得

$$s(k+1) = s(k) - \varepsilon T \text{sat}(s(k), \delta) + B^+\phi(k) - B^+\phi(k-1). \quad (12)$$

令扰动估计误差 $\tilde{d}(k) = B^+\phi(k) - B^+\phi(k-1)$, 则式(12)简化为

$$s(k+1) = s(k) - \varepsilon T \text{sat}(s(k), \delta) + \tilde{d}(k). \quad (13)$$

上式即为离散积分滑模切换函数的动态方程. 由假设1、假设2和文献[18]可知, 扰动估计误差的上界值很小, 可令

$$|\tilde{d}(k)| = |B^+\phi(k) - B^+\phi(k-1)| \leq Td_{\max}. \quad (14)$$

故可选边界层厚度 $\varepsilon T > Td_{\max}$.

由于 $|\tilde{d}(k)| \leq Td_{\max} < \varepsilon T$, 根据式(13), 并假设 $\Delta s(k) = s(k+1) - s(k)$, 可分如下两种情况对切换函数的收敛性进行分析.

1) 当 $0 \leq \tilde{d}(k) < \varepsilon T$ 时.

若 $s(k) > \delta$, 则根据饱和函数定义, 式(13)变为

$$s(k+1) = s(k) - \varepsilon T + \tilde{d}(k), \quad (15)$$

由此可得

$$\Delta s(k) = -\varepsilon T + \tilde{d}(k). \quad (16)$$

由 $0 \leq \tilde{d}(k) < \varepsilon T$ 可知 $\Delta s(k) < 0$, 则 $s(k)$ 递减, 直到进入 $0 \leq s(k) \leq \delta$ 的范围.

若 $0 \leq s(k) \leq \delta$, 则根据饱和函数的定义, 式(13)变为

$$s(k+1) = s(k) - \varepsilon T s(k) \delta^{-1} + \tilde{d}(k), \quad (17)$$

由此可得

$$\Delta s(k) = -\varepsilon T s(k) \delta^{-1} + \tilde{d}(k). \quad (18)$$

易知, 当 $s(k) > \frac{\tilde{d}(k)}{\varepsilon T \delta^{-1}}$ 时, $\Delta s(k) < 0$, $s(k)$ 递减; 当 $s(k) < \frac{\tilde{d}(k)}{\varepsilon T \delta^{-1}}$ 时, $\Delta s(k) > 0$, $s(k)$ 递增; 当 $s(k) = \frac{\tilde{d}(k)}{\varepsilon T \delta^{-1}}$ 时, $\Delta s(k) = 0$, $s(k)$ 不变.

采用上述方法分析 $s(k) < -\delta$, $-\delta \leq s(k) < 0$ 时的情况, 并注意到 $\delta = \varepsilon T$, 由此可知: 当 $0 \leq \tilde{d}(k) < \varepsilon T$ 时, 切换函数 s 单调趋近于 $h = \tilde{d}(k)$ 且不会出现穿越 $s = h$.

2) 当 $-\varepsilon T < \tilde{d}(k) < 0$ 时.

类似 $0 \leq \tilde{d}(k) < \varepsilon T$ 时的分析, 按上述4个区间进行研究, 同样可知: 当 $-\varepsilon T < \tilde{d}(k) < 0$ 时, 切换函数 s 亦将收敛于 $h = \tilde{d}(k)$ 且不会出现穿越 $s = h$.

综合上述两种情况, 不难得到最终的结论是: 当选择边界层厚度 $\varepsilon T > |\tilde{d}(k)|$ 时, 切换函数 s 将单调

收敛于 $h = \tilde{d}(k)$ 且不会穿越 $s = h$, 即不存在抖振现象. 注意到 $|\tilde{d}(k)| \leq Td_{\max} < \varepsilon T$, 意味着切换函数 s 在滑模面的某个邻域内运动. 此外, 上述结论的获得与切换函数的初始值无关, 即当 $s(0) \neq 0$ 时, s 仍然会单调收敛于 h .

在滑模控制中采用边界层来降低控制信号的抖振是一项常用技术. 近年来, 滑模控制系统在边界层上的行为以及边界层厚度的选择原则被广泛研究^[18-22]. 一般而言, 边界层厚度越大, 越能有效地缓解抖振现象, 但会减少控制精度, 反之亦然. 因此, 其厚度的具体选择应根据控制系统的具体使用环境和性能要求进行设计和调整. 对于常值干扰或慢时变干扰的系统而言, 外干扰的变化率非常小, 在应用本文所设计的滑模控制算法对这类系统进行控制时, 切换函数将单调收敛于零或接近零的稳态值.

4 仿真分析

考虑3阶离散系统

$$x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + B[u(k) + d(k)].$$

其中: 状态变量的初始值 $x_0 = [1 \ 1 \ 1]^T$, 且有

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0.012 \sin(0.01k) & 0 & 0.02 \sin(0.01k) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.02 \sin(0.01k) & 0 & 0.04 \sin(0.01k) \end{bmatrix}.$$

ΔA 可写为

$$\begin{bmatrix} 0.012 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0.04 \end{bmatrix} \sin(0.01k) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = DF(k)H.$$

其中 $F(k) = \sin(0.01k)$.

易知

$$\text{rank}[B \ DB \ D^2B] > \text{rank}[B],$$

$$F^T(k)F(k) = \sin(0.01k) \sin(0.01k) \leq 1.$$

上述系统满足假设1和假设2, 由定理2可得

$$G = B^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T,$$

选择

$$B^\perp = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

可得

$$B^{\perp+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

根据定理 3, 使用 LMI 工具箱可得可行解

$$W = \begin{bmatrix} 2.3783 & -3.8968 & 4.4848 \\ -3.8968 & 7.6922 & -8.8945 \\ 4.4848 & -8.8945 & 10.4020 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 2.7855 \\ -8.4339 \\ 10.3657 \end{bmatrix}^T,$$

进而有

$$E = \begin{bmatrix} -3.4384 \\ 2.4929 \\ 4.6106 \end{bmatrix}^T.$$

扰动 $d_1(k) = 0.2 \sin(0.04k)$, 切换函数 s 初始值 $s(0) = 0$, 控制器参数 $\varepsilon = 0.1$ 时的仿真结果如图 1 和图 2 所示.

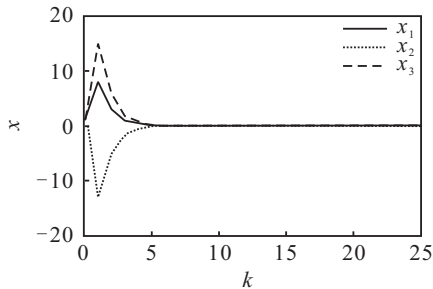


图 1 系统状态

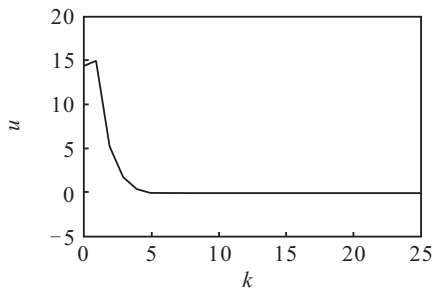


图 2 控制输入 u

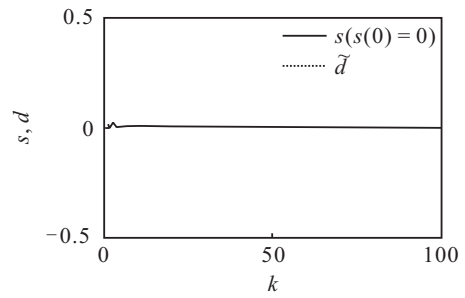
图 1 为系统状态的收敛情况, 图 2 为控制律 u . 可以看出, 系统状态 x_1 、 x_2 和 x_3 迅速回复到平衡状态, 具有良好的动态性能. 切换函数 s 单调收敛于扰动估计误差 \tilde{d} , 并随 \tilde{d} 的变化而变化, 不存在穿越现象, 即不含抖振成分.

分别设 $s(0) = 0, s(0) = 1.5, s(0) = 3$, 其余设置不变, 初始值不同时系统仿真情况如图 3 所示.

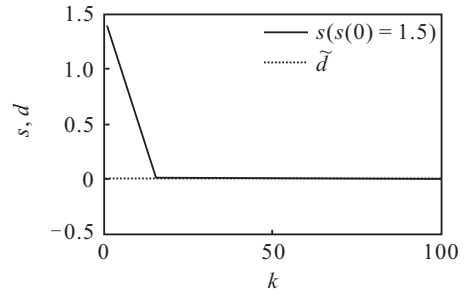
由图 3 可知, 第 3 节中关于切换函数收敛性的结论与初始值无关, 切换函数始终单调收敛于扰动估计误差 \tilde{d} , 且不存在穿越现象. 但可以看到, 初始值的大小影响着切换函数的收敛速度, 其绝对值越大, 收敛所花费的时间越长.

分别设置 $d_1(k) = 0.2 \sin(0.04k), s(0) = 0, d_2(k) = 0.15 \sin(0.04k)$, 其余设置不变, 此时的仿真结果如

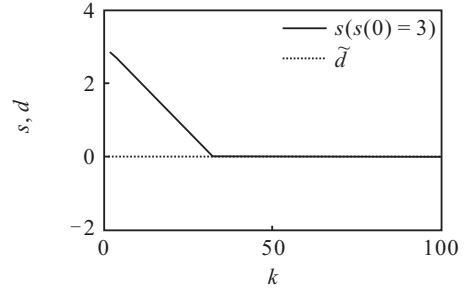
图 4 所示.



(a) $s(0)=0$ 时的切换函数



(b) $s(0)=1.5$ 时的切换函数



(c) $s(0)=3$ 时的切换函数

图 3 不同初始状态下的切换函数

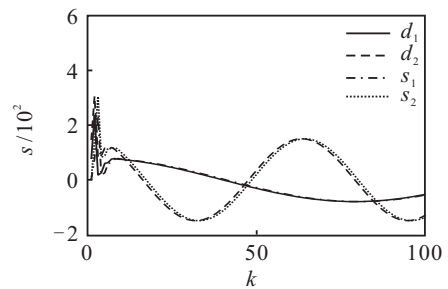


图 4 不同扰动作用下的切换函数

由图 4 可以看出, 在不同扰动下, 切换函数依然单调收敛于扰动估计误差 \tilde{d} , 且随 \tilde{d} 的变化而变化, 不存在穿越现象. 但显然, 所受扰动的变化率越大, 切换函数跟随 \tilde{d} 的变化也越大, 这与理论分析的结果是完全一致的.

5 结 论

本文针对一类非匹配不确定离散线性系统, 设计了离散积分滑模控制器. 运用线性矩阵不等式 LMI 方法, 设计了具有强鲁棒性的离散积分滑模面; 引入饱和函数设计控制器, 使系统状态在积分滑模面的某个小邻域内做准滑模运动; 并通过合理选择饱和函数的

边界层厚度,使被控对象和控制器各种信号中均不含有任何抖振;最后通过仿真分析验证了所提出方法的有效性。

参考文献(References)

- [1] 高为炳. 变结构控制的理论和设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1996: 205-211.
(Gao W B. Variable structure control theory and design method[M]. Beijing: Science Press, 1996: 205-211.)
- [2] Utkin V I, Shi J. Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions[C]. Proc Conf on Decision and Control. Los Alamitos: IEEE Press, 1996: 4591-4596.
- [3] Choi H H. LMI-based sliding surface design for integral sliding mode control of mismatched uncertain systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(4): 736-742.
- [4] Zhao F, Liu Y, Yao X M, et al. Integral sliding mode control of time-delay systems with mismatching uncertainties[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2010, 21(2): 273-280.
- [5] Fernando C, Fridman L. Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(5): 853-858.
- [6] 郭壁垒, 苏宏业, 柳向斌, 等. 带有非线性不确定奇异系统的积分滑模控制[J]. 控制理论与应用, 2010, 27(7): 873-879.
(Guo B L, Su H Y, Liu X B, et al. Integral sliding mode control for singular systems with nonlinear uncertainties[J]. Control Theory & Applications, 2010, 27(7): 873-879.)
- [7] Hamayun M T, Edwards C, Alwi H. Design and analysis of an integral sliding mode fault-tolerant control scheme[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2012, 57(7): 1783-1789.
- [8] Chiu C S. Derivative and integral terminal sliding mode control for a class of MIMO nonlinear systems[J]. Automatica, 2012, 48(2): 316-326.
- [9] Castanos F, Hernández D, Fridman L M. Integral sliding-mode control for linear time-invariant implicit systems[J]. Automatica, 2014, 50(3): 971-975.
- [10] Abidi K, Xu J X, Yu X H. On the discrete-time integral sliding mode control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(4): 709-715.
- [11] Mu L J, Gao C C, Li J. On the integral sliding-mode control for sample-data systems with state time-delay[C]. Proc of the 17th Int Federation of Automatic Control. New York: Elsevier, 2008: 5846-5849.
- [12] 刘涛, 刘贺平, 杨旭. 不确定离散时间系统积分滑模保性能控制[J]. 控制与决策, 2009, 24(12): 1786-1790.
(Liu T, Liu H P, Yang X. Integral-sliding-mode guaranteed cost control for discrete-time system with uncertainty[J]. Control and Decision, 2009, 24(12): 1786-1790.)
- [13] Hu J, Wang Z, Gao H, et al. Robust sliding mode control for discrete stochastic systems with mixed time delays, randomly occurring uncertainties, and randomly occurring nonlinearities[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2012, 59(7): 3008-3015.
- [14] Xie L. Output feedback control of systems with parameter uncertainty[J]. Int J of Control, 1996, 63(4): 741-750.
- [15] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 91-92.
(Yu L. Robust control: Approach with linear matrix inequality[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 91-92.)
- [16] Chen X T, Fukuda K D. Adaptive quasi-sliding mode tracking control for discrete uncertain input-output systems[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2001, 48(1): 216-224.
- [17] Young K D, Utkin V I, Ozguner U. A control engineer's guide to sliding mode control[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 1999, 7(3): 328-342.
- [18] Su W C, Drakunov S V, Ozguner U. An O(T²) boundary layer in sliding mode for sampled-data systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(3): 482-485.
- [19] Cupertino F, Naso D, Mininno E, et al. Sliding-mode control with double boundary layer for robust compensation of payload mass and friction in linear motors[J]. IEEE Trans on Industry Applications, 2009, 45(5): 1688-1696.
- [20] Boiko I M. Analysis of chattering in sliding mode control systems with continuous boundary layer approximation of discontinuous control[C]. American Control Conf. Los Alamitos: IEEE Press, 2011: 757-762.
- [21] Nguyen T, Su W C, Gajic Z. Variable structure control for singularly perturbed linear continuous systems with matched disturbances[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2012, 57(3): 777-783.
- [22] Edardar M, Tan X, Khalil H K. Design and analysis of sliding mode controller under approximate hysteresis compensation[J]. IEEE Trans on Control System Technology, 2015, 23(2): 598-608.