

考虑直觉模糊偏好关系的双边稳定匹配及应用

林 杨^{1,2}, 王应明¹

(1. 福州大学 决策科学研究所, 福州 350108; 2. 福建师范大学 经济学院, 福州 350108)

摘要: 针对现有双边匹配决策要求主体给出另一方全体偏好序信息的条件过于苛刻的问题, 提出一种新的匹配方法. 一方主体先两两比较另一方全体成员, 给出直觉模糊集形式的评价值并由全体成员评价值组成直觉模糊偏好关系; 然后, 通过改进的最小对数二乘法对其进行转化, 间接得到主体满意度; 进一步以双方主体满意度最大为目标, 同时考虑稳定匹配约束条件, 建立单目标优化模型并求解获得匹配方案; 最后, 通过算例分析表明了所提出方法的可操作性和有效性.

关键词: 双边匹配; 直觉模糊偏好关系; 改进最小对数二乘法; 稳定约束; 优化模型

中图分类号: C934

文献标志码: A

Bilateral stable matching considering intuitionistic fuzzy preference relations and their application

LIN Yang^{1,2}, WANG Ying-ming¹

(1. Institute of Decision Science, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China; 2. Schools of Economics, Fujian Normal University, Fuzhou 350108, China. Correspondent: WANG Ying-ming, E-mail: msymwang@hotmail.com)

Abstract: Due to the harsh fact that existing bilateral matching required preference ordinals of opposite side members are provided by each agent, a novel method is developed. Agents provide evaluation in form of the intuitionistic fuzzy set through a pairwise comparison of alternatives, then generating an intuitionistic fuzzy preference relation of agents when applied to whole. By use of the improved minimum logarithmic square algorithm, the satisfaction degree of each agent is calculated based on the intuitionistic fuzzy preference relations(IFPR). Furthermore, a single-object optimization model with stability constraint is developed, which maximizes satisfaction degree on both two sides' agents. The results can be obtained by solving this model. Finally, a numerical example is given to illustrate the feasibility and effectiveness of this method.

Keywords: bilateral matching; intuitionistic fuzzy preference relations; improved logarithmic least squares method; stability constraint; optimization model

0 引言

双边匹配是对离散资源进行分配和交换的一种市场机制, 其理论和方法在经济管理领域有着广泛的实际背景, 如婚姻匹配问题^[1]、机制设计理论^[2]、人力资源与岗位匹配^[3-4]、双边拍卖^[5-6]、供需买卖双方选择^[7]等. 满意合理的匹配方案对于优化市场资源配置、提高组织管理效率具有重要作用. 目前, 双边匹配主要用于解决偏好效用下的市场均衡问题.

在匹配过程中, 往往需要双方给出偏好序(满意度)形式的评价信息^[8-9]. 传统价格机制理论不适用于该情况, 因此, 需要开辟新的研究途径. 双边匹配的研

究始于1962年Gale和Shapley^[1]对男女婚配问题进行探讨并提出G-S匹配机制, 随后引起学术界广泛重视. Roth^[10-11]和Balinski等^[12]在G-S匹配机制基础上进行全面讨论并提出了H-R算法, 该算法可以保证得到一对多双边匹配中一方最优稳定匹配结果, 并证明了当匹配双方均具有严格偏好时, 存在帕累托最优的匹配方案. Erdil等^[13]和Abdulkadiroğlu等^[14]研究了弱偏好序条件下的双边匹配及其特性, 并提出了有效适应延期接受机制. Halldorsson等^[15]考虑不完全偏好序信息的双边稳定匹配, 并给出一种随机匹配算法. 张振华等^[16]将G-S和H-R算法扩展到多对多双边匹配

收稿日期: 2014-10-19; 修回日期: 2015-01-06.

基金项目: 国家杰出青年科学基金项目(70925004); 国家自然科学基金项目(71371053); 福建省社科规划青年项目(FJ2015C111); 福建师范大学青年教师成长基金项目(VH-059).

作者简介: 林杨(1983—), 男, 博士生, 从事最优化理论、决策分析的研究; 王应明(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与方法、数据包络分析等研究.

的情形, 并针对电子中介处理稳定多对多双边匹配问题, 给出一种排序计算方法. 樊治平等^[9]考虑稳定匹配条件的满意双边匹配问题, 将偏好序值信息转化为主体满意度, 并通过最大化主体满意度来建立多目标优化模型, 得到的匹配方案在一定程度上兼顾了“稳定”和“满意”两方面要求. 李铭洋等^[17]研究了考虑双方主体心理行为的匹配问题, 根据失望理论将主体偏好序值转化为感知效用值, 构建并求解一种考虑稳定匹配条件的多目标优化模型. 陈希等^[18]通过建立双方主体的损益矩阵和前景决策矩阵, 并通过使双方收益最大化得到匹配结果. 万树平等^[19]考虑多种类型信息的多指标匹配问题, 结合前景理论及 TODIM 方法计算双方的总体感知价值, 在此基础上建立优化模型求解. 乐琦^[20]针对不完全序关系的双边匹配问题, 通过构建综合 Borda 分值矩阵和差异度矩阵, 得到不完全匹配度矩阵, 并建立了基于该矩阵的匹配模型以进行匹配.

现实中受多重因素的影响, 主体往往很难直接给出匹配方全体成员的偏好序^[21-22], 或对给出的偏好序存在不确定. 例如, 婚姻匹配中, 男女双方偶尔会面不足以对对方全面判断. 然而, 通过两两比较任意两个匹配对象得出模糊形式的评价值则相对容易. 直觉模糊集 (IFS)^[23]能够细致地描述和表达客观信息, 受此启发, 利用 IFS 描述由两两比较得到的对象评价值, 再转化为相应的满意度, 比直接给出偏好序更加合理客观, 具有可操作性. 目前, 尚未对考虑直觉模糊偏好的双边匹配进行研究, 而该问题具有广泛的实用价值.

从已有研究上看, 基于 (弱) 偏好序信息的双边匹配, 需要主体直接给出偏好信息这一条件限制了其应用范围; 而且, 主体对偏好存在不确定会导致匹配失效. 鉴于此, 本文考虑基于直觉模糊偏好关系 (IFPR) 的双边稳定匹配方法; 由一方主体对另一方全体成员进行两两比较, 得到任意两个成员之间的偏好关系并用 IFS 描述; 在此基础上, 使用改进的最小对数二乘法间接将 IFPR 转化为主体满意度 (偏好值) 信息; 最后, 建立优化模型并考虑稳定匹配条件, 求解模型并确定匹配方案.

1 问题描述

1.1 双边匹配相关定义

双边匹配涉及两方离散、不相交的主体集合. 设甲方为 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 乙方为 $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$. 其中: A_i, B_j 分别表示甲、乙方第 i, j 个主体, $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}, j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$. 不失一般性, 令 $m \leq n$.

定义 1^[8,24] 映射 $\mu: A \cup B \rightarrow A \cup B$ 称为双

边匹配, 当且仅当 $\forall A_i \in A, \forall B_j \in B, i \in I, j \in J$, 满足: 1) $\mu(A_i) \in B \cup \{A_i\}$; 2) $\mu(B_j) \in A$; 3) $\mu(A_i) = B_j$ 当且仅当 $\mu(B_j) = A_i$.

定义 2^[8,24] $\exists A_i, A_l \in A, B_j, B_k \in B, i \neq l, j \neq k$, 设 w_{ij}^A 和 w_{ij}^B 分别表示 A_i 对 B_j, B_j 对 A_i 的满意度. 如果 μ 中以下两种情况均未出现: 1) $\mu(A_i) = B_k, \mu(A_l) = B_j$, 满足 $w_{ij}^A > w_{ik}^A$ 且 $w_{ij}^B > w_{lj}^B$; 2) $\mu(A_i) = B_k, \mu(B_j) = B_j$, 满足 $w_{ij}^A > w_{ik}^A$; 则称 μ 为稳定匹配.

定义 3 若 $\mu(A_i) = B_j$, 则 (A_i, B_j) 是 μ 确定的一个匹配对; 若 $\mu(A_i) = A_i$, 则 A_i 在 μ 中未匹配. μ 确定的所有匹配对集合称为匹配方案.

1.2 直觉模糊偏好关系

直觉模糊集从隶属度、非隶属度和不确定程度三方面描述信息, 在处理模糊、不确定信息时具有很强的灵活性和实用性. 在双边匹配中, 由 A_i 对 B 中 n 个成员进行两两比较, B_j 对 A 中 m 个成员进行两两比较, 分别得到主体 A_i 和 B_j 的 IFPR.

定义 4^[23] 令 X 为非空论域, X 上的一个直觉模糊集 F 定义为 $F = \{\langle x, u_F(x), v_F(x) \rangle, x \in X\}$. 其中: $u_F(x) : X \rightarrow [0, 1]$, 表示 x 关于 F 的隶属度; $v_F(x) : X \rightarrow [0, 1]$, 表示 x 关于 F 的非隶属度; 且 $0 \leq u_F(x) + v_F(x) \leq 1, \forall x \in X. \exists x \in X$, 记 $\pi F(x) = 1 - u_F(x) - v_F(x)$, 表示 x 关于 F 的不确定程度.

定义 5 令 $A_i \in A, B_j \in B$, 给出的 IFPR 分别为 R^i 和 T^j , 则 $R^i = (r_{ef}^i)_{n \times n} \subset B \times B, T^j = (t_{gh}^j)_{m \times m} \subset A \times A$. 其中: r_{ef}^i, t_{gh}^j 均为 IFS, $r_{ef}^i = \langle (B_e, B_f), u_A(B_e, B_f), v_A(B_e, B_f) \rangle, t_{gh}^j = \langle (A_g, A_h), u_B(A_g, A_h), v_B(A_g, A_h) \rangle$, 简记为 $r_{ef}^i = (u_{ef}^A, v_{ef}^A), t_{gh}^j = (u_{ef}^B, v_{ef}^B), e, f \in J, g, h \in I; r_{ef}^i$ 的含义为: A_i 对 B 中的主体 B_e, B_f 进行两两对比, A_i 偏爱 B_e 的程度为 u_{ef}^A , 偏爱 B_f 的程度为 v_{ef}^A ; 对评价的不确定程度为 $1 - u_{ef}^A - v_{ef}^A; r_{ef}^i$ 满足: $0 \leq u_{ef} + v_{ef} \leq 1, u_{ef} = v_{fe}, v_{ef} = u_{fe}, u_{ee} = v_{ee} = 0.5$. 类似地可以定义 t_{gh}^j .

定义 6 设 A_i 偏爱 B_e, B_f 的程度分别为 u_{ef}^A 和 $v_{ef}^A; A_i$ 对于 B_e 和 B_f 的满意度分别为 w_{ie}^A 和 w_{if}^A . 称主体 A_i 是理性的, 若满足: 1) $w_{ie}^A \geq w_{if}^A$ 当且仅当 $u_{ef}^A \geq v_{ef}^A$; 2) $w_{ie}^A \leq w_{if}^A$ 当且仅当 $u_{ef}^A \leq v_{ef}^A$. 否则 A_i 是非理性的.

1.3 匹配模型

根据上文描述, 若求得 A_i 对 B_j, B_j 对 A_i 的满意度分别为 w_{ij}^A 和 $w_{ij}^B, i \in I, j \in J$; 设 x_{ij} 为 0-1 决策变量, 当 $\mu(A_i) = B_j$ 时 $x_{ij} = 1$, 否则 $x_{ij} = 0$. 考虑稳定

匹配约束条件, 构造如下的多目标优化模型 (I):

$$\max Y_A = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m w_{ij}^A x_{ij}, \quad (1)$$

$$\max Y_B = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij}^B x_{ij}. \quad (2)$$

$$\text{s.t. } x_{ij} + \sum_{k:w_{ik}^A > w_{ij}^A} x_{ik} + \sum_{l:w_{lj}^B > w_{ij}^B} x_{lj} \geq 1, \quad (3)$$

$$i \in I, j \in J; \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i \in I; \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1, j \in J. \quad (5)$$

其中: 式(1)和(2)是目标函数, 式(3)是稳定匹配条件, 式(4)和(5)是决策变量约束条件. 由于 $m \leq n$, 式(4)取等号, 式(5)取不等号. 其含义为 A_i 与 B 中某一个主体匹配; B_j 最多与 A 中一个主体匹配. 文献[9]中式(8)依据双方给出的偏好序确定稳定匹配条件. 受此启发, 模型(I)的式(3)根据主体满意度确定稳定匹配条件. 为便于理解, 设 c_{ik}^A, c_{ij}^A 分别为 A_i 对 B_k, B_j 的偏好序, 令 $w_{ik}^A = g(c_{ik}^A), w_{ij}^A = g(c_{ij}^A)$, 因满意度与偏好序成反比^[9], 所以 $g(\cdot)$ 为单调递减函数, 且 $0 < g(n), g(1) \leq 1$. 即当 $c_{ik}^A < c_{ij}^A$ 时有 $w_{ik}^A > w_{ij}^A$, 显然式(3)成立.

主体满意度的计算是建立模型(I)的前提, 因此, 如何合理高效地将主体给出的 IFPR 转化为满意度是本文探讨重点. 另外, 注意到模型(I)为多目标优化模型, 需变换为单目标优化模型以便于求解.

2 确定主体满意度

一方主体通过两两比较另一方所有成员, 并用 IFS 描述比较结果, 得到矩阵形式的 IFPR. IFPR 不仅反映了主体对于任意两个成员的偏好, 也反映了主体对另一方各个成员的满意度. 由定义6知, 若主体越偏爱某成员, 则对该成员的满意度越大. 下文以主体 A_k 为例, 阐述利用改进的最小对数二乘法^[26]确定满意度的过程.

设 A_k 是理性的, 且 $r_{ij}^k = (u_{ij}^A, v_{ij}^A), k \in I$. 设 A_k 对 B 方各成员的满意度为 $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, 其中 w_i 是 A_k 对 B_i 的满意度, $w_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. 根据定义6, 令

$$\frac{w_i}{w_i + w_j} \approx u_{ij}^A, i, j \in J, \quad (6)$$

整理得

$$(1 - u_{ij}^A)w_i \approx u_{ij}^A w_j, i, j \in J. \quad (7)$$

由定义3知, $1 - u_{ij}^A \approx v_{ij}^A + \pi_{ij}^A$, 代入式(7), 得

$$(v_{ij}^A + \pi_{ij}^A)w_i \approx u_{ij}^A w_j, i, j \in J. \quad (8)$$

式(8)两边取自然对数, 整理得

$$\ln w_i + \ln(v_{ij}^A + \pi_{ij}^A) - \ln w_j - \ln u_{ij}^A \approx 0, \quad i, j \in J. \quad (9)$$

设 $0 \leq \varepsilon_{ij} \leq 1$, 令

$$\varepsilon_{ij} = \ln w_i + \ln(v_{ij}^A + \pi_{ij}^A) - \ln w_j - \ln u_{ij}^A, \quad i, j \in J, \quad (10)$$

则建立关于 ε_{ij} 的最小对数二乘模型为

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^2; \quad (11)$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \geq 0, \quad (11)$$

$$i, j \in J.$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & u_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \\ 1, & \text{其他} \end{cases}$, 可避免式(10)取到无意义对数.

推论 1 若 $\delta_{ij} = 1 (i, j \in J)$, 则模型(11)存在最优解 $W^* = \{w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*\}$, 且

$$w_i^* = \frac{\prod_{j=1}^n (u_{ij}^A / (v_{ij}^A + \pi_{ij}^A))^{1/n}}{\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n (u_{ij}^A / (v_{ij}^A + \pi_{ij}^A))^{1/n} \right)}, i \in J. \quad (12)$$

证明 对式(11)构造拉格朗日函数

$$L(W, \lambda) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right), \quad (13)$$

其中 λ 为拉格朗日乘子. 令 $\frac{\partial L(W, \lambda)}{\partial w_i} = 0, i \in J$, 式(13)化简后得

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda w_i = 0, i \in J. \quad (14)$$

对 B 中的 n 个主体求和, 有

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda \sum_{i=1}^n w_i = 0. \quad (15)$$

由式(9)知 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \varepsilon_{ij} = 0, \sum_{i=1}^n w_i = 1$, 所以 $\lambda = 0$. 式(14)化为

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \varepsilon_{ij} = 0, i \in J, \quad (16)$$

即

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} (\ln w_i + \ln(v_{ij}^A + \pi_{ij}^A) - \ln w_j - \ln u_{ij}^A) = 0, \quad i \in J. \quad (17)$$

又已知 $\delta_{ij} = 1$, 代入式 (17), 得

$$n \ln w_i - \sum_{j=1}^n \ln w_j - \sum_{j=1}^n \ln u_{ij}^A + \sum_{j=1}^n \ln(v_{ij}^A + \pi_{ij}^A) = 0, \quad i \in J. \quad (18)$$

整理式 (17) 得

$$\ln w_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln w_j + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln(u_{ij}^A / (v_{ij}^A + \pi_{ij}^A)), \quad i \in J. \quad (19)$$

对式 (19) 取自然指数, 有

$$w_i = \left(\prod_{i=1}^n w_i \right)^{1/n} \cdot \left(\prod_{j=1}^n (u_{ij}^A / (v_{ij}^A + \pi_{ij}^A))^{1/n} \right), \quad i \in J. \quad (20)$$

将式 (20) 代入 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ 并化简, 即可得式 (12). \square

推论 2 若存在 $\delta_{ij} = 0 (i, j \in J)$, 则模型 (11) 的最优解为 $W^* = \{w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*\}$. 且

$$w_i^* = \begin{cases} \frac{e^{x_i^*}}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} e^{x_j^*} + 1\right)}, & i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} e^{x_j^*} + 1\right)}, & i = n. \end{cases} \quad (21)$$

其中 $x_i^* (i = 1, 2, \dots, n)$ 是下面证明中式 (23) 的解.

证明 式 (16) 可改写为

$$\left(\sum_{j=1}^n \delta_{ij}\right) \ln w_i - \left(\sum_{j=1}^n \delta_{ij}\right) \ln w_j = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} (\ln u_{ij}^A - \ln(v_{ij}^A + \pi_{ij}^A)). \quad (22)$$

将式 (22) 转化为矩阵形式, 有

$$\bar{A}X = Y. \quad (23)$$

其中: \bar{A} 为系数矩阵, X 为解向量, Y 为常数向量, 即

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \sum_{j \neq 1, j=2}^n \delta_{1j} & -\delta_{12} & \cdots & -\delta_{1n} \\ -\delta_{21} & \sum_{j=1, j \neq 2}^n \delta_{2j} & \cdots & -\delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\delta_{n1} & -\delta_{n2} & \cdots & \sum_{j=1, j \neq n}^n \delta_{nj} \end{bmatrix},$$

$$X = [\ln w_1, \ln w_2, \dots, \ln w_n]^T,$$

$$Y = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \delta_{1j} (\ln(u_{1j}^A / (v_{1j}^A + \pi_{1j}^A))) \\ \sum_{j=1}^n \delta_{2j} (\ln(u_{2j}^A / (v_{2j}^A + \pi_{2j}^A))) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \delta_{nj} (\ln(u_{nj}^A / (v_{nj}^A + \pi_{nj}^A))) \end{bmatrix}.$$

易知 $|\bar{A}| = 0, |\bar{A}_{n-1}| \neq 0$, 即 \bar{A}_{n-1} 是满秩矩阵, 令 $x_n = \ln w_n = 0$, 得到

$$X_{n-1} = \bar{A}_{n-1}^{-1} Y_{n-1}. \quad (24)$$

又已知 $w_i = e^{x_i}, w_n = 1, i = 1, 2, \dots, n-1$, 由式 (24) 和 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, 根据矩阵运算可解出 $X_{n-1} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$,

$$W^* = W_{n-1}^* \cup \{w_n\}. \quad (25)$$

整理后即可得式 (21). \square

3 双边匹配模型求解

根据推论 1 和推论 2, 可将 IFPR 转化为满意度; 然后, 采用线性加权法将模型 (I) 变换为以下单目标优化模型 (II):

$$\begin{aligned} \max \quad & \delta; \\ \text{s.t.} \quad & \delta \leq \phi \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m w_{ij}^A x_{ij} + (1-\phi) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij}^B x_{ij}, \\ & x_{ij} + \sum_{k:w_{ik}^A > w_{ij}^A} x_{ik} + \sum_{l:w_{lj}^B > w_{ij}^B} x_{lj} \geq 1, \\ & i \in I, j \in J, \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i \in I, \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1, j \in J. \end{aligned}$$

其中 ϕ 和 $1-\phi$ 为甲、乙各方满意度在目标函数中所占比重. 若 $\phi > 1-\phi$, 则说明匹配目标更偏重于甲方满意度; 反之亦然. 比重系数一般根据具体情境或由专家确定. 由于模型 (II) 的目标函数和约束条件均是线性的, 可使用线性规划方法求解, 或采用 Excel Solver、Cplex10.0 等软件包求解, 从而得到最终匹配方案.

综上所述, 基于 IFPR 的双边匹配问题的计算步骤如下:

1) 根据定义 4~定义 6, 通过两两比较对方全体成员, 得到双方各主体的 IFPR;

2) 使用改进的最小对数二乘法, 将主体的 IFPR 转化为主体满意度;

3) 依据求出的双方满意度信息, 构造优化模型 (I);

4) 将模型 (I) 变换为单目标优化模型 (II);

5) 求解模型 (II), 获得稳定匹配方案.

4 算例分析

为更好地满足企事业单位对高级人才的迫切需求, 某市人事局推出“高层次人才匹配服务”, 为实现地区跨越式发展提供人才保障. 在某轮财管金融人才对接会上, 有 5 名高层次人才和 4 家用人单位分别向人事部门递交材料. 为提高双方的匹配成功率, 人事部门决定先互相交换双方信息. 但由于受诸多因素制约, 且双方先前无合作历史, 很难给出对方的精确评价. 鉴于此, 双方以 IFPR 给予评价信息.

令 $A = \{A^1, A^2, \dots, A^5\}$ 表示高层次人才集合, $B = \{B^1, B^2, \dots, B^4\}$ 为用人单位集合. A^i 主要从发展前景、工作条件、福利待遇等指标对 B^j 进行评价; B^j 重点考察 A^i 的专业能力、管理经验、团队协作等. 通过两两比较对方全体成员, A^i 和 B^j ($i = 1, 2, \dots, 5, j = 1, 2, \dots, 4$) 给出矩阵形式的 IFPR 分别为

$$A^1 : \begin{bmatrix} (0.5, 0.5) & (0.5, 0.4) & & & \\ (0.4, 0.5) & (0.5, 0.5) & & & \\ (0.157, 0.823) & (0.44, 0.558) & & & \\ (0.31, 0.57) & (0.29, 0.656) & & & \\ & (0.823, 0.157) & (0.57, 0.31) & & \\ & (0.558, 0.44) & (0.656, 0.29) & & \\ & (0.5, 0.5) & (0.38, 0.54) & & \\ & (0.54, 0.38) & (0.5, 0.5) & & \end{bmatrix},$$

$$A^2 : \begin{bmatrix} (0.5, 0.5) & (0.71, 0.21) & & & \\ (0.21, 0.71) & (0.5, 0.5) & & & \\ (0.29, 0.68) & (0.34, 0.54) & & & \\ (0.59, 0.326) & (0.39, 0.51) & & & \\ & (0.68, 0.29) & (0.326, 0.59) & & \\ & (0.54, 0.34) & (0.51, 0.39) & & \\ & (0.5, 0.5) & (0.58, 0.29) & & \\ & (0.29, 0.58) & (0.5, 0.5) & & \end{bmatrix},$$

$$A^3 : \begin{bmatrix} (0.5, 0.5) & (0.45, 0.45) & & & \\ (0.45, 0.45) & (0.5, 0.5) & & & \\ (0.71, 0.185) & (0.312, 0.658) & & & \\ (0.11, 0.866) & (0.65, 0.25) & & & \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} (0.185, 0.71) & (0.866, 0.11) \\ (0.658, 0.312) & (0.25, 0.65) \\ (0.5, 0.5) & (0.08, 0.80) \\ (0.80, 0.08) & (0.5, 0.5) \end{bmatrix},$$

$$A^4 : \begin{bmatrix} (0.5, 0.5) & (0.67, 0.28) & & & \\ (0.28, 0.67) & (0.5, 0.5) & & & \\ (0.32, 0.68) & (0.32, 0.43) & & & \\ (0.73, 0.15) & (0.29, 0.6) & & & \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} (0.68, 0.32) & (0.15, 0.73) \\ (0.43, 0.32) & (0.6, 0.29) \\ (0.5, 0.5) & (0.72, 0.20) \\ (0.20, 0.72) & (0.5, 0.5) \end{bmatrix},$$

$$A^5 : \begin{bmatrix} (0.5, 0.5) & (0.31, 0.58) & & & \\ (0.58, 0.31) & (0.5, 0.5) & & & \\ (0.37, 0.6) & (0.5, 0.39) & & & \\ (0.61, 0.22) & (0.3, 0.6) & & & \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} (0.6, 0.37) & (0.22, 0.61) \\ (0.39, 0.5) & (0.6, 0.3) \\ (0.5, 0.5) & (0.65, 0.28) \\ (0.28, 0.65) & (0.5, 0.5) \end{bmatrix};$$

$$B^1 : \begin{bmatrix} (0.5, 0.5) & (0.55, 0.36) & (0.41, 0.48) & & \\ (0.36, 0.55) & (0.5, 0.5) & (0.84, 0.11) & & \\ (0.48, 0.41) & (0.11, 0.84) & (0.5, 0.5) & & \\ (0.61, 0.29) & (0.28, 0.65) & (0.61, 0.22) & & \\ (0.26, 0.63) & (0.32, 0.53) & (0.1, 0.77) & & \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} (0.29, 0.61) & (0.63, 0.26) \\ (0.65, 0.28) & (0.53, 0.32) \\ (0.22, 0.61) & (0.77, 0.1) \\ (0.5, 0.5) & (0.48, 0.40) \\ (0.40, 0.48) & (0.5, 0.5) \end{bmatrix},$$

$$B^2 : \begin{bmatrix} (0.5, 0.5) & (0.36, 0.57) & (0.81, 0.11) & & \\ (0.57, 0.36) & (0.5, 0.5) & (0.44, 0.50) & & \\ (0.11, 0.81) & (0.50, 0.44) & (0.5, 0.5) & & \\ (0.29, 0.41) & (0.18, 0.75) & (0.49, 0.45) & & \\ (0.35, 0.59) & (0.52, 0.32) & (0.31, 0.57) & & \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} (0.41, 0.29) & (0.59, 0.35) \\ (0.75, 0.18) & (0.32, 0.52) \\ (0.45, 0.49) & (0.57, 0.31) \\ (0.5, 0.5) & (0.79, 0.13) \\ (0.13, 0.79) & (0.5, 0.5) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 B^3: & \begin{bmatrix} (0.5, 0.5) & (0.87, 0.1) & (0.47, 0.45) \\ (0.1, 0.87) & (0.5, 0.5) & (0.74, 0.20) \\ (0.45, 0.47) & (0.20, 0.74) & (0.5, 0.5) \\ (0.39, 0.41) & (0.28, 0.65) & (0.39, 0.55) \\ (0.65, 0.29) & (0.52, 0.37) & (0.5, 0.41) \end{bmatrix} \rightarrow \\
 & \begin{bmatrix} (0.41, 0.39) & (0.29, 0.65) \\ (0.65, 0.28) & (0.37, 0.52) \\ \leftarrow (0.55, 0.39) & (0.41, 0.5) \\ (0.5, 0.5) & (0.74, 0.22) \\ (0.22, 0.74) & (0.5, 0.5) \end{bmatrix}, \\
 B^4: & \begin{bmatrix} (0.5, 0.5) & (0.25, 0.68) & (0.50, 0.39) \\ (0.68, 0.25) & (0.5, 0.5) & (0.54, 0.35) \\ (0.39, 0.50) & (0.35, 0.54) & (0.5, 0.5) \\ (0.30, 0.43) & (0.58, 0.36) & (0.29, 0.57) \\ (0.55, 0.49) & (0.69, 0.29) & (0.13, 0.81) \end{bmatrix} \rightarrow \\
 & \begin{bmatrix} (0.43, 0.30) & (0.49, 0.55) \\ (0.36, 0.58) & (0.29, 0.69) \\ \leftarrow (0.57, 0.29) & (0.81, 0.13) \\ (0.5, 0.5) & (0.44, 0.42) \\ (0.42, 0.44) & (0.5, 0.5) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

根据式 (12) 和 (21), 可将双方成员给出的 IFPR 转化为对应的满意度信息, 具体数据见表 1.

表 1 双方成员的满意度

满意度	双方成员								
	A ¹	A ²	A ³	A ⁴	A ⁵	B ¹	B ²	B ³	B ⁴
w ₁	0.368	0.319	0.16	0.232	0.171	0.172	0.234	0.219	0.148
w ₂	0.291	0.204	0.251	0.214	0.294	0.295	0.225	0.169	0.188
w ₃	0.134	0.218	0.225	0.28	0.287	0.145	0.157	0.159	0.269
w ₄	0.217	0.269	0.364	0.274	0.258	0.255	0.230	0.223	0.209
w ₅	-	-	-	-	-	0.133	0.154	0.23	0.186

根据上述描述, 引入变量 x_{ij} , $x_{ij} = 1$ 表示 $\mu(A_i) = B_j$, $x_{ij} = 0$ 表示 $\mu(A_i) \neq B_j$; w_{ij}^A 为 A^i 对 B^j 的满意度, w_{ij}^B 为 B^j 对 A^i 的满意度; 为体现劳资双方平等地位, 令双方满意度的比重系数相等, 均为 0.5. 根据模型 (II) 建立单目标优化模型如下:

$$\begin{aligned}
 & \max \delta; \\
 & \text{s.t. } \delta \leq 0.5 \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^5 w_{ij}^A x_{ij} + 0.5 \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^5 w_{ij}^B x_{ij}, \\
 & x_{ij} + \sum_{k:w_{ik}^A > w_{ij}^A} x_{ik} + \sum_{l:w_{lj}^B > w_{ij}^B} x_{lj} \geq 1, \\
 & \sum_{j=1}^4 x_{ij} = 1,
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{ij} \leq 1,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, 5, j = 1, 2, \dots, 4.$$

使用 Cplex10.0, 易求得目标函数 $\delta = 1.14$. 其中: $x_{12} = x_{21} = x_{34} = x_{53} = 1$, 其余 $x_{ij} = 0$. 即匹配方案为 $\{(A^1, B^2), (A^2, B^1), (A^3, B^4), (A^5, B^3)\}$; 主体 A^4 未匹配. 不难验证, 该匹配方案不仅使双方主体的满意度最大, 而且根据定义 2, 该匹配方案为稳定匹配.

5 结 论

本文提出了一种基于直接模糊偏好关系的双边稳定匹配决策方法. 考虑到“由主体直接给出满意度”这一条件比较苛刻, 转而通过两两比较对方全体成员, 间接得到主体的满意度; 并运用建模与优化的思想对双方匹配进行研究. 与已有方法相比, 该方法确定的匹配方案更加客观合理, 可操作性更强, 为解决实际活动中遇到的双边匹配问题, 提供了理论参考和决策支持.

参考文献(References)

- [1] Gale D, Shapley L S. College admissions and the stability of marriage[J]. American Mathematical Monthly, 1962, 69(1): 9-15.
- [2] Hurwicz L, Reiter S. Designing economic mechanisms[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2006: 26-29.
- [3] Lin H T. A job placement intervention using fuzzy approach for two-way choice[J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36(2): 2543-2553.
- [4] Toroslu I H. Personnel assignment problem with hierarchical ordering constraints[J]. Computers & Industrial Engineering, 2003, 45(3): 493-510.
- [5] McAfee R P. A dominant strategy double auction[J]. J of Economic Theory, 1992, 56(2): 434-450.
- [6] Nicolaisen J, Petrov V, Tesfatsion L. Market power and efficiency in a computational electricity market with discriminatory double-auction pricing[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2001, 5(5): 504-523.
- [7] Sarne D, Kraus S. Managing parallel inquiries in agents' two-sided search[J]. Artificial Intelligence, 2008, 172(4): 541-569.
- [8] 樊治平, 乐琦. 基于完全偏好序信息的严格双边匹配方法[J]. 管理科学学报, 2014, 17(1): 21-34.
(Fan Z P, Yue Q. Strict two-sided matching method based on complete preference ordinal information[J]. J of Management Sciences in China, 2014, 17(1): 21-34.)
- [9] 樊治平, 李铭洋. 考虑稳定匹配条件的双边满意匹配决策方法[J]. 中国管理科学, 2009, 22(4): 113-118.
(Fan Z P, Li M Y. Decision analysis method for two-sided satisfied matching considering stable matching

- condition[J]. Chinese J of Management Science, 2009, 22(4): 113-118.)
- [10] Roth A E. Common and conflicting interests in two-sided matching markets[J]. European Economic Review, 1985, 27(1): 75-96.
- [11] Roth A E. On the allocation of residents to rural hospitals: A general property of two-sided matching markets[J]. Econometrica, 1986, 54(2): 425-427.
- [12] Balinski M, Sönmez T. A tale of two mechanisms: Student placement[J]. J of Economic Theory, 1999, 84(1): 73-94.
- [13] Erdil A, Ergin H. What's the matter with tie-breaking? Improving efficiency in school choice[J]. American Economics Review, 2007, 98(3): 669-689.
- [14] Abdulkadiroğlu A, Pathak P A, Roth A E, et al. The Boston public school match[J]. American Economic Review, 2005, 95(2): 368-371.
- [15] Halldórsson M, Iwama K, Miyazaki S, et al. Randomized approximation of the stable marriage problem[J]. Theoretical Computer Science, 2004, 325(3): 439-465.
- [16] 张振华, 贾淑娟, 曲衍国. 基于稳定匹配的电子中介匹配研究[J]. 控制与决策, 2008, 23(4): 388-391.
(Zhang Z H, Jia S J, Qu Y G. Matching problem of electronic broker based on stable bipartite matching[J]. Control and Decision, 2008, 23(4): 388-391.)
- [17] 李铭洋, 樊治平. 考虑双方主体心理行为的稳定双边匹配方法[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(10): 2591-2599.
(Li M Y, Fan Z P. Method for stable two-sided matching considering psychological behavior of agents on both sides[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(10): 2591-2599.)
- [18] 陈希, 韩菁, 张晓. 考虑心理期望与感知的多属性匹配决策方法[J]. 控制与决策, 2014, 29(11): 2027-2033.
(Chen X, Han J, Zhang X. Method for multiple attribute matching decision making considering matching body's psychological aspiration and perception[J]. Control and Decision, 2014, 29(11): 2027-2033.)
- [19] 万树平, 李登峰. 具有不同类型信息的风险投资商与投资企业多指标双边匹配决策方法[J]. 中国管理科学, 2014, 22(2): 40-47.
(Wan S H, Li D F. Decision making method for multi-attribute two-sided matching problem between venture capitalists and investment enterprises with different kinds of information[J]. Chinese J of Management Science, 2014, 22(2): 40-47.)
- [20] 乐琦. 基于不完全序关系信息的双边匹配决策方法[J]. 浙江大学学报: 理学版, 2014, 41(5): 523-527.
(Yue Q. Decision method for two-sided matching based on incomplete order relation information[J]. J of Zhejiang University: Science Edition, 2014, 41(5): 523-527.)
- [21] Xu Z. A method for estimating criteria weights from intuitionistic preference relations[J]. Fuzzy Information and Engineering, 2009, 1(1): 79-89.
- [22] 徐泽水. 直觉模糊偏好信息下的多属性决策途径[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 27(11): 62-71.
(Xu Z S. Approaches to multiple attribute decision making with intuitionistic fuzzy preference information[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2008, 27(11): 62-71.)
- [23] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.
- [24] Echenique F. What matchings can be stable? The testable implications of matching theory[J]. Mathematics of Operations Research, 2008, 33(3): 757-768.
- [25] Wang Y M, Fan Z P. Group decision analysis based on fuzzy preference relations: Logarithmic and geometric least squares methods[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 194(1): 108-119.
- [26] Wang Y M, Fan Z P. Fuzzy preference relations: Aggregation and weight determination[J]. Computers & Industrial Engineering, 2007, 53(1): 163-172.
- [27] 梁海明, 姜艳萍. 一种基于弱偏好序信息的双边匹配决策方法[J]. 系统工程学报, 2014, 22(9): 154-159.
(Liang H M, Jiang Y P. Method for two-sided matching decision making based on the weak preference ordering information[J]. J of Systems Engineering, 2014, 22(9): 154-159.)

(责任编辑: 李君玲)