文章编号: 1001-0920 (2016) 02-0361-06 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2014.1672

广义系统区间观测器设计

郭胜辉[1,2], 朱芳来[1]

(1. 同济大学 电子与信息工程学院，上海 201804；2. 苏州科技学院 电子与信息工程学院，江苏 苏州 215009)

摘 要: 对于不确定或者未知输入系统, 常规鲁棒观测器设计对系统和干扰有较多限制条件. 区间观测器对系统具有宽松的前提条件, 且对干扰只要求有界, 因而区间观测器更具有广泛性. 针对离散和连续的广义未知输入系统, 研究区间观测器的设计问题, 通过对离散系统和连续系统进行不同的变换, 将系统转化为易于求取区间观测器系数矩阵的形式; 然后基于相同的参数求取方式, 给出广义系统区间观测器的设计方法. 仿真结果表明了所提出方法的有效性和正确性.

关键词: 区间观测器；广义系统；非负矩阵；梅茨勒矩阵

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Interval observers design for descriptor systems

GUO Sheng-hui[1,2], *ZHU Fang-lai*[1]

(1. College of Electronics and Information Engineering，Tongji University，Shanghai 201804，China；2. College of Electronics and Information Engineering，Suzhou University of Science and Technology，Suzhou 215009，China. Correspondent：ZHU Fang-lai，E-mail：zhufanglai@tongji.edu.cn)

Abstract: For uncertain or unknown input systems, regular robust observers are usually constructed under some restrictive assumptions. Interval observer has more universality because it relaxes many restrictive assumptions and only needs the known boundary of the disturbance. Interval observer designing problems for both discrete and continuous descriptor systems with unknown inputs are considered. Discrete and continuous descriptor systems are respectively transformed into a form in which the coefficient matrices of interval observer can be obtained much more easily. Then the same interval observer design framework is developed. Simulation results show the effectiveness and correctness of the proposed method.

Keywords: interval observers；descriptor systems；nonnegative matrix；Metzler matrix

0 引 言

状态反馈在控制系统综合问题中显示出极大的优越性. 然而, 由于测量手段或其他因素的限制, 部分或全部系统状态难以直接获得. 因此, 关于观测器设计的研究引起了众多学者的关注, 取得了大量的研究成果[1-6]. 早期的观测器设计不考虑系统干扰(或不确定性), 但系统干扰往往是存在的, 因此鲁棒观测器成为学者研究的焦点[7-10]. 文献 [7] 针对含有未知输入的线性系统, 提出了一种降维未知输入观测器设计方法. 文献 [8] 利用高阶滑模的技术手段, 研究了未知输入观测器设计方法. 文献 [9] 设计了可以同时估计系统状态及输出噪声的鲁棒 H_∞ 滑模广义观测器. 此类鲁棒观测器设计方法通常对系统施加较严格的前提条件, 同时需要获知有关干扰的较多信息, 如缓慢变化、微分有界, 以及所谓的未知输入匹配条件等. 例如, 文献 [7] 要求未知输入矩阵与输出矩阵匹配, 文献 [8] 要求系统状态及状态的微分有界, 文献 [10] 要求干扰无穷可导. 因此, 常规鲁棒观测器设计依然存在很多限制条件, 这些条件都限制了现有方法的应用.

另一方面, Agresti 等[11]通过研究得出, 很多情况下, 估计出系统状态的上下边界比准确估计系统状态更有意义. 区间观测器随之出现, 作为现有方法的有力补充, 逐渐成为新的热点问题. 区间观测器对系统和干扰都只有较宽松的限制条件, 已经在诸如生物技术中取得了很好的应用[12-14]. 然而, 关于区间观测器设计的研究成果还不丰富[12-19]. 文献 [16] 针对可观测线性系统, 基于系统稳定的前提下, 采用时变线性变换研究了区间观测器设计方法. 文献 [17] 针对一类非

收稿日期: 2014-11-03；**修回日期:** 2015-03-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61074009)；高等学校博士学科点专项科研基金项目(20110072110015)；广西制造系统与先进制造技术重点实验室项目(PF110289)；上海重点学科项目(B004).

作者简介: 郭胜辉(1983−), 男, 博士生, 从事观测器、故障检测与重构的研究；朱芳来(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事观测器、故障检测等研究.

线性连续系统, 研究了区间观测器设计方法, 并提出了利用时不变线性变换求取区间观测器系数矩阵的方法. 文献[18]则将区间观测器与高阶滑模相结合, 用于解决LPV系统的状态区间估计.

广义系统可以用于描述更为普遍的实际系统, 自提出后一直是研究热点[20-24]. 然而, 尚未发现针对广义系统区间观测器的相关研究. 因此, 研究广义系统区间观测器设计对于丰富广义系统鲁棒观测器的设计方法具有积极意义. 本文针对广义系统研究区间观测器设计问题, 提出一种广义系统区间观测器设计方法. 对于离散情况, 直接利用线性变换将系统变为易于求解的形式. 而对于连续系统, 则通过两个变换达到转换的目的.

本文中, 向量比较 $x(t) \geqslant z(t)\,(x(t) > z(t))$, 其中 $x(t), z(t) \in \boldsymbol{R}^n$ 是指向量 $x(t)$ 与 $z(t)$ 所有对应的元素比较, 有 $x_i(t) \geqslant z_i(t)(x_i(t) > z_i(t))$, $i = 1,2,\cdots,n$; 矩阵比较 $A \geqslant B\,(A > B)$, $A, B \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是指矩阵 A 与 B 所有对应的元素比较, 有 $a_{ij} \geqslant b_{ij}\,(a_{ij} > b_{ij})$, $i = 1,2,\cdots,n, j = 1,2,\cdots,n$.

1 问题描述及相关概念

考虑如下广义系统:

$$\begin{cases} E\sigma x(t) = Ax(t) + w(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中: $\sigma x(t)$ 在连续系统中表示 $\dot{x}(t)$, 在离散系统则表示 $x(t+1)$; $x(t) \in \boldsymbol{R}^n$、$w(t) \in \boldsymbol{R}^n$ 和 $y(t) \in \boldsymbol{R}^p$ 分别是系统状态向量、干扰和输出状态向量; $E, A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $C \in \boldsymbol{R}^{p\times n}$, $\mathrm{rank}(E) = r < n$, $\mathrm{rank}(C) = p$. 假设系统初始状态满足 $x^-(0) \leqslant x(0) \leqslant x^+(0)$, 干扰 $w(t)$ 满足 $w^- \leqslant w(t) \leqslant w^+$. 其中 $x^-(0)$, $x^+(0)$ 和 w^-, w^+ 分别为初始状态和干扰已知的上下界. 不失一般性, 假设系统(1)是可观测的, 则有

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n.$$

因此, 存在行满秩矩阵 $[\,T \;\; N\,]$, 使得

$$TE + NC = I_n. \tag{2}$$

定义 1 基于原系统的可测信息 $y(t)$, 构造两个新系统, 它们能分别估计出原系统状态的上下边界 $x^+(t)$ 和 $x^-(t)$, 使得对于任何 $t \geqslant 0$, 都有 $x^-(t) \leqslant x(t) \leqslant x^+(t)$, 则两个新系统分别称为系统(1)的上、下界观测器, 它们共同称为系统(1)的区间观测器.

定义 2 若方阵 A 所有特征值都有负实部, 则称其为Hurwitz矩阵; 若方阵 A 所有特征值范数小于1, 则称其为Schur矩阵; 若方阵 A 所有元素均为非负, 则称其为非负矩阵; 若方阵 A 所有非主对角线元素均为非负, 则称其为Metzler矩阵.

引理 1[15] 对于离散系统 $x(t+1) = Ax(t) + \omega(t)$, 若 $x(0) \geqslant 0$, 则必有 $x(t) \geqslant 0$, 其中 $x(t) \in \boldsymbol{R}^n$, $\omega: \boldsymbol{Z}_+ \to \boldsymbol{R}_+^n$, $A \in \boldsymbol{R}_+^{n\times n}$ 是非负矩阵.

引理 2[17] 对于连续系统 $\dot{x} = Ax + \omega$, 若 $x(0) \geqslant 0$, 则必有 $x \geqslant 0$, 其中 $x \in \boldsymbol{R}^n$, $\omega: \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+^n$, $A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是Metzler矩阵.

2 离散广义系统

考虑广义系统(1)的离散形式, 即

$$\begin{cases} Ex(t+1) = Ax(t) + w(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \tag{3}$$

基于式(2), 系统(3)可写为

$$x(t+1) = TAx(t) + Tw(t) + Ny(t+1). \tag{4}$$

此时, 上界区间观测器可设计为

$$\begin{aligned} x^+(t+1) =\,& TAx^+(t) + T^+w^+ - T^-w^- + \\ & L(y(t) - Cx^+(t)) + Ny(t+1). \end{aligned} \tag{5}$$

其中: $T^+ = \max(0, T)$, $T^- = T^+ - T$, 显然 $T^+ \geqslant 0$, $T^- \geqslant 0$, $L \in \boldsymbol{R}^{n\times p}$ 为增益矩阵.

若定义上界估计误差为 $\tilde{x}^+(t) = x^+(t) - x(t)$, 则由式(4)和(5)易得

$$\begin{aligned} & \tilde{x}^+(t+1) = x^+(t+1) - x(t+1) = \\ & TAx^+(t) + T^+w^+ - T^-w^- + L(y(t) - Cx^+(t)) + \\ & Ny(t+1) - TAx(t) - Tw(t) - Ny(t+1) = \\ & (TA - LC)\tilde{x}^+(t) + (T^+w^+ - T^-w^-) - Tw(t). \end{aligned} \tag{6}$$

类似地, 下界观测器设计为

$$\begin{aligned} x^-(t+1) =\,& TAx^-(t) + T^+w^- - T^-w^+ + \\ & L(y(t) - Cx^-(t)) + Ny(t+1). \end{aligned}$$

若下界估计误差定义为 $\tilde{x}^-(t) = x(t) - x^-(t)$, 同样有

$$\begin{aligned} & \tilde{x}^-(t+1) = \\ & (TA - LC)\tilde{x}^-(t) + Tw(t) - (T^+w^- - T^-w^+). \end{aligned} \tag{7}$$

由于 $T^+ \geqslant 0, T^- \geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned} T^-w^- \leqslant T^-w(t) \leqslant T^-w^+, \\ T^+w^- \leqslant T^+w(t) \leqslant T^+w^+. \end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned} & T^+w^+ - T^-w^- \geqslant T^+w(t) - T^-w(t) \Longleftrightarrow \\ & T^+w^+ - T^-w^- \geqslant Tw(t) \Longleftrightarrow \\ & T^+w^+ - T^-w^- - Tw(t) \geqslant 0. \end{aligned}$$

并有

$$\begin{aligned} & T^+w(t) - T^-w(t) \geqslant T^+w^- - T^-w^+ \Longleftrightarrow \\ & Tw(t) \geqslant T^+w^- - T^-w^+ \Longleftrightarrow \\ & Tw(t) - (T^+w^- - T^-w^+) \geqslant 0. \end{aligned}$$

因此, 为了满足 $x^-(t) \leqslant x(t) \leqslant x^+(t)$, 需保证误差系

统 (6) 和 (7) 是稳定收敛的, 且状态非负. 由假设 $\tilde{x}^+(0) = x^+(0) - x(0) \geqslant 0$ 和 $\tilde{x}^-(0) = x(0) - x^-(0) \geqslant 0$, 由引理 1 可知, 只需 $(TA - LC)$ 是 Schur 且非负矩阵.

注 1　在为系统 (3) 设计常规观测器的方法中, 已有多种方法可以求得增益矩阵 L, 使得 $(TA - LC)$ 是 Schur 矩阵的, 如文献 [24] 利用线性矩阵不等式 (LMI) 求解增益矩阵 L 以使 $(TA - LC)$ 是 Schur 矩阵. 但在常规观测器中, 求得的增益矩阵 L 无需保证 $(TA - LC)$ 是非负矩阵. 事实上, 尚未发现可以直接求得增益矩阵以使 $(TA - LC)$ 是 Schur 且非负矩阵的方法.

对系统 (3) 进行线性变换, 即 $\xi(t) = Px(t)$, 其中可逆矩阵 $P \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$. 令 $S = P^{-1}$, 有 $x(t) = S\xi(t)$, 则系统 (3) 变为

$$\begin{cases} \bar{E}\xi(t+1) = \bar{A}\xi(t) + w(t), \\ y(t) = \bar{C}\xi(t). \end{cases} \tag{8}$$

其中: $\bar{E} = ES$, $\bar{A} = AS$, $\bar{C} = CS$.

引理 3　对于系统 (8), 有 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = n$.

证明　因为

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} ES \\ CS \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\left\{\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} S\right\} = n,$$

所以引理成立. □

引理 4　存在满秩矩阵 $[\,\bar{T}\ \ \bar{N}\,]$, 使得

$$[\,\bar{T}\ \ \bar{N}\,]\begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = I_n,$$

即

$$\bar{T}\bar{E} + \bar{N}\bar{C} = I_n. \tag{9}$$

其中: $\bar{T} = PT$, $\bar{N} = PN$.

证明　因为

$$[\,\bar{T}\ \ \bar{N}\,]\begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = [\,PT\ \ PN\,]\begin{bmatrix} EP^{-1} \\ CP^{-1} \end{bmatrix} =$$
$$PTEP^{-1} + PNCP^{-1} =$$
$$P(TE + NC)P^{-1} = I_n,$$

所以引理成立. □

由式 (9), 系统 (8) 可表达为

$$\xi(t+1) = \bar{T}\bar{A}\xi(t) + \bar{T}w(t) + \bar{N}y(t+1). \tag{10}$$

对系统 (8) 设计区间观测器如下:

$$\begin{cases} \xi^-(t+1) = \\ R\xi^-(t) + \bar{T}^+w^- - \bar{T}^-w^+ + PLy(t) + \bar{N}y(t+1), \\ \xi^+(t+1) = \\ R\xi^+(t) + \bar{T}^+w^+ - \bar{T}^-w^- + PLy(t) + \bar{N}y(t+1). \end{cases} \tag{11}$$

其中: 选择 $R = (\bar{T}\bar{A} - PL\bar{C})$ 是 Schur 且非负矩阵, $\bar{T}^+ = \max(0, \bar{T})$, $\bar{T}^- = \bar{T}^+ - \bar{T}$. 类似地, 可以得到

$$\bar{T}^+w^+ - \bar{T}^-w^- - \bar{T}w(t) \geqslant 0,$$
$$\bar{T}w(t) - (\bar{T}^+w^- - \bar{T}^-w^+) \geqslant 0.$$

定理 1　若存在可逆矩阵 $P \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 和矩阵 $L \in \boldsymbol{R}^{n\times p}$, 使得 Schur 且非负矩阵 $R = (\bar{T}\bar{A} - PL\bar{C})$ 成立, 令 $P^+ = \max(0, P)$, $P^- = P^+ - P$, 则当

$$\xi^-(0) = P^+x^-(0) - P^-x^+(0),$$
$$\xi^+(0) = P^+x^+(0) - P^-x^-(0)$$

时, 系统 (11) 是系统 (10) 的区间观测器.

证明　1) 定义上界误差为 $\tilde{\xi}^+(t) = \xi^+(t) - \xi(t)$, 由式 (10) 和 (11) 可得

$$\tilde{\xi}^+(t+1) = \xi^+(t+1) - \xi(t+1) =$$
$$R\xi^+(t) + \bar{T}^+w^+ - \bar{T}^-w^- + PL\bar{C}\xi(t) +$$
$$\bar{N}y(t+1) - \bar{T}\bar{A}\xi(t) - \bar{T}w(t) - \bar{N}y(t+1) =$$
$$R\tilde{\xi}^+(t) + \bar{T}^+w^+ - \bar{T}^-w^- - \bar{T}w(t).$$

并由 $\bar{T}^+w^+ - \bar{T}^-w^- - \bar{T}w(t) \geqslant 0$ 和引理 1 可知, 若 $\xi^-(0) \leqslant \xi(0) \leqslant \xi^+(0)$, 则有 $\tilde{\xi}^+(0) = \xi^+(0) - \xi(0) \geqslant 0$, $\tilde{\xi}^+(t) = \xi^+(t) - \xi(t) \geqslant 0$. 类似地

$$\tilde{\xi}^-(t+1) = R\tilde{\xi}^-(t) + \bar{T}w(t) - (\bar{T}^+w^- - \bar{T}^-w^+).$$

若 $\xi^-(0) \leqslant \xi(0) \leqslant \xi^+(0)$, 有 $\tilde{\xi}^-(0) = \xi(0) - \xi^-(0) \geqslant 0$, 则必有 $\tilde{\xi}^-(t) = \xi(t) - \xi^-(t) \geqslant 0$.

2) 下面证明 $\xi^-(0) \leqslant \xi(0) \leqslant \xi^+(0)$. 由 $\xi(t) = Px(t)$, $\xi(0) = Px(0)$, 以及

$$\xi(0) = Px(0) = (P^+ - P^-)x(0) =$$
$$P^+x(0) - P^-x(0),$$

有

$$P^+x^-(0) - P^-x^+(0) \leqslant \xi(0) \leqslant$$
$$P^+x^+(0) - P^-x^-(0).$$

因此, 当

$$\xi^-(0) = P^+x^-(0) - P^-x^+(0),$$
$$\xi^+(0) = P^+x^+(0) - P^-x^-(0)$$

时, 有

$$\xi^-(0) \leqslant \xi(0) \leqslant \xi^+(0).$$

综合 1) 和 2), 可得定理 1 成立. □

因 $x(t) = S\xi(t)$, 显然

$$\inf(S\xi^-(t), S\xi^+(t)) \leqslant x \leqslant \sup(S\xi^-(t), S\xi^+(t)).$$

又因 $x^-(0) \leqslant x(0) \leqslant x^+(0)$, 系统 (3) 的区间观测器为

$$\begin{cases} x^-(t) = \inf(S\xi^-(t), S\xi^+(t)), \\ x^+(t) = \sup(S\xi^-(t), S\xi^+(t)). \end{cases}$$

由 $R = (\bar{T}\bar{A} - PL\bar{C})$ 可得

$$R = \bar{T}\bar{A} - PL\bar{C} = \bar{T}AP^{-1} - PLCP^{-1},$$
$$RP = \bar{T}A - PLC = PTA - PLC.$$

即有 Sylvester 方程

$$PTA - RP = QC,\ Q = PL. \tag{12}$$

若矩阵 R 和 TA 没有相同的特征值, 则对于任意矩阵 Q, Sylvester 方程 (12) 存在唯一的解 P 和 L[17].

3 连续广义系统

考虑广义系统 (1) 的连续形式, 即

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + w, \\ y = Cx. \end{cases} \tag{13}$$

类似地, 系统 (13) 可写为

$$\dot{x} = TAx + Tw + N\dot{y}.$$

为了去掉 $\dot{y}$ 项, 进行系统变换 $z = x - Ny$, 即 $x = z + Ny$, 有

$$\dot{z} = TA(z + Ny) + Tw = TAz + Tw + TANy, \tag{14}$$

则系统 (14) 的上界观测器可以写为

$$\begin{aligned} \dot{z}^+ =& (TA - LC)z^+ + T^+w^+ - T^-w^- + \\ & ((TA - LC)N + L)y. \end{aligned} \tag{15}$$

其中: T^+, T^- 和 L 定义同前. 定义上界误差 $\tilde{z}^+ = z^+ - z$, 则由式 (14) 和 (15) 得

$$\begin{aligned} &\dot{\tilde{z}}^+ = \dot{z}^+ - \dot{z} = \\ &(TA - LC)z^+ + T^+w^+ - T^-w^- + \\ &((TA - LC)N + L)y - TAz - Tw - TANy = \\ &(TA - LC)\tilde{z}^+ + T^+w^+ - T^-w^- - Tw. \end{aligned}$$

类似地, 下界观测器可以写为

$$\begin{aligned} \dot{z}^- =& (TA - LC)z^- + T^+w^- - T^-w^+ + \\ & ((TA - LC)N + L)y. \end{aligned}$$

下界误差为 $\tilde{z}^- = z - z^-$, 则

$$\dot{\tilde{z}}^- = (TA - LC)\tilde{z}^- + Tw - (T^+w^- - T^-w^+).$$

显然有

$$T^+w^+ - T^-w^- - Tw \geqslant 0,$$
$$Tw - (T^+w^- - T^-w^+) \geqslant 0.$$

类似地, 为了满足 $t \geqslant 0$ 的任意时刻, 有 $z^- \leqslant z \leqslant z^+$, 只需保证 $\tilde{z}^+$ 和 $\tilde{z}^-$ 收敛且非负. 若有 $z_0^- \leqslant z_0 \leqslant z_0^+$, 则根据引理 2 可知, 只需 $(TA - LC)$ 是 Hurwitz 且 Metzler 矩阵. 同样地, 直接求取这样的增益矩阵 L 相当困难[22].

取非奇异变换矩阵 P, $\xi = Pz$, 系统 (14) 可写为

$$\dot{\xi} = PTAP^{-1}\xi + \bar{T}w + PTANy, \tag{16}$$

其中 $\bar{T} = PT$.

对系统 (16) 设计如下区间观测器:

$$\begin{cases} \dot{\xi}^- = R\xi^- + \bar{T}^+w^- - \bar{T}^-w^+ + \\ \qquad P((TA - LC)N + L)y, \\ \dot{\xi}^+ = R\xi^+ + \bar{T}^+w^+ - \bar{T}^-w^- + \\ \qquad P((TA - LC)N + L)y. \end{cases} \tag{17}$$

其中: 选取 $R = P(TA - LC)P^{-1}$ 是 Hurwitz 且 Metzler 矩阵, $\bar{T}^+ = \max(0, \bar{T})$, $\bar{T}^- = \bar{T}^+ - \bar{T}$, 显然 $\bar{T}^+ \geqslant 0$, $\bar{T}^- \geqslant 0$. 类似地, 有

$$\bar{T}^+w^+ - \bar{T}^-w^- - \bar{T}w \geqslant 0,$$
$$\bar{T}w - (\bar{T}^+w^- - \bar{T}^-w^+) \geqslant 0.$$

定理 2 若存在可逆矩阵 P 和矩阵 L, 使得所取 Hurwitz 且 Metzler 矩阵 $R = P(TA - LC)P^{-1}$ 成立, 则令 $P^+ = \max(0, P)$, $P^- = P^+ - P$, 当

$$\xi_0^- = P^+z_0^- - P^-z_0^+,$$
$$\xi_0^+ = P^+z_0^+ - P^-z_0^-,$$
$$z_0^- = \inf(x_0^- - Ny_0, x_0^+ - Ny_0),$$
$$z_0^+ = \sup(x_0^- - Ny_0, x_0^+ - Ny_0)$$

时, 系统 (17) 是系统 (16) 的区间观测器.

证明 1) 定义上界误差 $\tilde{\xi}^+ = \xi^+ - \xi$, 有

$$\begin{aligned} &\dot{\tilde{\xi}}^+ = \dot{\xi}^+ - \dot{\xi} = \\ &R\xi^+ + \bar{T}^+w^+ - \bar{T}^-w^- - \bar{T}w + \\ &P((TA - LC)N + L)y - PTAP^{-1}\xi - PTANy = \\ &R\tilde{\xi} + \bar{T}^+w^+ - \bar{T}^-w^- - \bar{T}w. \end{aligned}$$

又因 $\bar{T}^+w^+ - \bar{T}^-w^- - \bar{T}w \geqslant 0$, 利用引理 2 可知, 若 $\tilde{\xi}_0^+ = \xi_0^+ - \xi_0 \geqslant 0$, 则必有 $\tilde{\xi}^+ = \xi^+ - \xi \geqslant 0$. 类似地, 定义下界误差为 $\tilde{\xi}^- = \xi - \xi^-$, 同样可以得到, 若有 $\tilde{\xi}_0^- = \xi_0 - \xi_0^- \geqslant 0$, 则必有 $\tilde{\xi}^- = \xi - \xi^- \geqslant 0$.

2) 若取 $z_0^- = \inf(x_0^- - Ny_0, x_0^+ - Ny_0)$, $z_0^+ = \sup(x_0^- - Ny_0, x_0^+ - Ny_0)$, $z_0 = x_0 - Ny_0$, 则有 $z_0^- \leqslant z_0 \leqslant z_0^+$. 又因

$$\xi_0 = Pz_0 = P^+z_0 - P^-z_0,$$

故有

$$P^+z_0^- - P^-z_0^+ \leqslant \xi_0 \leqslant P^+z_0^+ - P^-z_0^-.$$

取

$$\xi_0^- = P^+z_0^- - P^-z_0^+,\ \xi_0^+ = P^+z_0^+ - P^-z_0^-,$$

则有 $\xi_0^- \leqslant \xi_0 \leqslant \xi_0^+$, 即有

$$\tilde{\xi}_0^+ = \xi_0^+ - \xi_0 \geqslant 0,\ \tilde{\xi}_0^- = \xi_0 - \xi_0^- \geqslant 0.$$

由以上结论 1) 和 2) 可知, 定理 2 成立. □

由定理 2 可知 $\xi^- \leqslant \xi \leqslant \xi^+$. 取 $S = P^{-1}$, 有 $z = S\xi$, 再取 $S^+ = \max(0, S)$, $S^- = S^+ - S$, 有

$$z = S\xi = S^+\xi - S^-\xi \leqslant S^+\xi^+ - S^-\xi^-,$$
$$z = S\xi = S^+\xi - S^-\xi \geqslant S^+\xi^- - S^-\xi^+.$$

令 $z^+ = S^+\xi^+ - S^-\xi^-, z^- = S^+\xi^- - S^-\xi^+$, 对于系统 (14) 有 $z^- \leqslant z \leqslant z^+$. 又因 $x = z + Ny$, 因此可以取

$$\begin{cases} x^- = \inf(z^- + Ny, z^+ + Ny), \\ x^+ = \sup(z^- + Ny, z^+ + Ny). \end{cases} \tag{18}$$

对于系统 (13), 有 $x^- \leqslant x \leqslant x^+$. 因此式 (18) 是系统 (13) 的区间观测器.

类似地,可以利用前一节中的方法来同时确定矩阵 P 和 L. 除此之外, 文献 [16] 在基于 $(TA - LC)$ 是 Hurwitz 矩阵的基础上, 通过求取系数矩阵的约当标准型, 给出了一种确定时变可逆矩阵 $P(t)$ 的方法.

4　仿真研究

例 1　假设离散广义系统 (3) 的参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0.153 & 0.045 & 0.069 \\ 0.156 & 0.252 & 0.156 \\ 0.135 & -0.171 & -0.636 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$w_i(t) = \begin{cases} 0.7, \ 0 \leqslant t < 15; \\ 0.8\sin(0.5t + 1), \ 15 \leqslant t < 30; \ i = 1, 2, 3. \\ -0.7, \ 30 \leqslant t < 60. \end{cases}$$

设 $w^- = [-0.8, -0.8, -0.8]^{\mathrm{T}}$, $w^+ = [0.8, 0.8, 0.8]^{\mathrm{T}}$. 由式 (2) 可得

$$T = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & -0.2 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 1 \\ -0.2 & -2 \end{bmatrix}.$$

选择 Schur 且非负矩阵 R, 以及 Q 为

$$R = \begin{bmatrix} 0.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0.14 & 0 \\ 0 & 0 & 0.26 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

代入并求解 Sylvester 方程 (12), 可得

$$P = \begin{bmatrix} -1.3302 & 3.6662 & 5.0497 \\ 0 & -7.1429 & 0 \\ -0.3124 & 2.0120 & 7.3197 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} -0.2782 & 0.3328 \\ 0 & -0.14 \\ 0.1247 & 0.1893 \end{bmatrix}.$$

容易验证

$$TA - LC = \begin{bmatrix} 0.3316 & -0.4426 & -0.2718 \\ 0 & 0.14 & 0 \\ 0.0031 & 0.0141 & 0.2484 \end{bmatrix}$$

是 Schur 矩阵但不是非负矩阵, 但通过非奇异变换后, $R = P(TA - LC)P^{-1}$ 则是 Schur 且非负矩阵. 图 1 所示即为所提出区间观测器的估计效果.

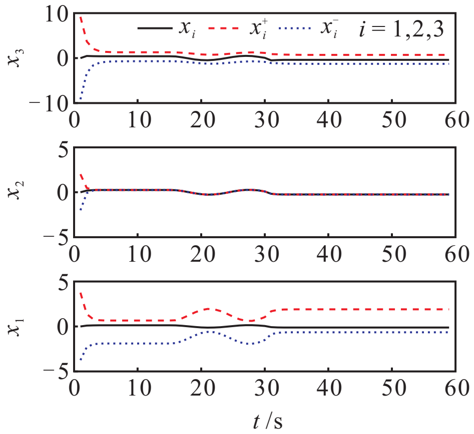

图 1　离散广义系统区间观测器的状态估计

例 2　假设连续广义系统 (13) 的参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} -0.22 & 0 & 0 \\ -0.1 & -0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & -0.4 \end{bmatrix},$$

$$w_i(t) = \begin{cases} 0.7, \ 0 \leqslant t < 1.5; \\ 0.8\sin(0.5t + 1), \ 1.5 \leqslant t < 3; \ i = 1, 2, 3. \\ -0.7, \ 3 \leqslant t < 6; \end{cases}$$

其他参数与例 1 相同. 选择 Hurwitz 且 Metzler 矩阵 R, 以及 Q 为

$$R = \begin{bmatrix} -1.32 & 0 & 0 \\ 0 & -1.14 & 0 \\ 0 & 0 & -0.56 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

可以求出

$$P = \begin{bmatrix} 0.7841 & -0.0940 & 0.1092 \\ 0 & 0.8772 & 0 \\ 2.0149 & 1.3557 & 0.5406 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 2.1160 & 0.5762 \\ 0 & 1.1400 \\ -6.0371 & -3.1567 \end{bmatrix}.$$

图 2 所示即为所提出区间观测器的估计效果.

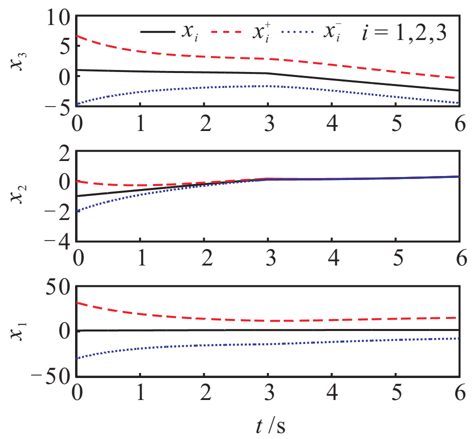

图 2　连续广义系统区间观测器的状态估计

从以上两例仿真结果 (图 1 和图 2) 可以看出, 在任意时刻, 都有 $x_i^-(t) \leqslant x_i(t) \leqslant x_i^+(t)$, $i = 1, 2, 3$, 即

有 $x^-(t) \leqslant x(t) \leqslant x^+(t)$, 因此本文所提区间观测器是正确而有效的.

5 结 论

本文首次针对广义系统研究区间观测器的设计方法, 同时考虑了离散与连续广义系统. 对于离散广义系统, 考虑到直接求解相关矩阵的困难性, 将系统进行线性变换后, 构造Sylvester方程来求解相关矩阵. 对于连续系统, 为消去系统输出的微分项, 进行了两次等价变换, 实现了构造Sylvester方程的目的. 仿真实例验证了所提出方法的有效性及正确性. 同时考虑具有外部干扰和可测噪声下的区间观测器设计, 是值得进一步研究的问题.

参考文献(References)

[1] Luenberger D G. Observing the state of a linear system[J]. IEEE Trans on Military Electronics, 1964, 8(2): 74-80.

[2] Walcott B, Zak S H. State observation of nonlinear uncertain dynamical systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1987, 32(2): 166-170.

[3] Rajamani R. Observers for Lipschitz nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(3): 397-401.

[4] 朱芳来, 韩正之. 基于Riccati方程解的非线性降维观测器[J]. 控制与决策, 2002, 17(4): 427-430.
(Zhu F L, Han Z Z. Nonlinear reduced-order observers based on the solution of Riccati align[J]. Control and Decision, 2002, 17(4): 427-430.)

[5] Zhang W, Su H, Zhu F, et al. A note on observers for discrete-time Lipschitz nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2012, 59(2): 123-127.

[6] Zemouche A, Boutayeb M. On LMI conditions to design observers for Lipschitz nonlinear systems[J]. Automatica, 2013, 49(2): 585-591.

[7] Guan Y, Saif M. A novel approach to the design of unknown input observers[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1991, 36(5): 632-635.

[8] Kalsi K, Lian J, Hui S, et al. Sliding-mode observers for systems with unknown inputs: A high-gain approach[J]. Automatica, 2010, 46(2): 347-353.

[9] Lee D J, Park Y, Park Y. Robust H_∞ sliding mode descriptor observer for fault and output disturbance estimation of uncertain systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2012, 57(11): 2928-2934.

[10] Andrieu V, Praly L, Astolfi A. High gain observers with updated gain and homogeneous correction terms[J]. Automatica, 2009, 45(2): 422-428.

[11] Agresti A, Coull B A. Approximate is better than “exact” for interval estimation of binomial proportions[J]. The American Statistician, 1998, 52(2): 119-126.

[12] Gouzé J L, Rapaport A, Hadj-Sadok M Z. Interval observers for uncertain biological systems[J]. Ecological Modelling, 2000, 133(1): 45-56.

[13] Bernard O, Gouzé J L. Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models[J]. J of Process Control, 2004, 14(7): 765-774.

[14] Moisan M, Bernard O, Gouzé J L. Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors[J]. Automatica, 2009, 45(1): 291-295.

[15] Efimov D, Perruquetti W, Raïssi T, et al. Interval observers for time-varying discrete-time systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2013, 58(12): 3218-3224.

[16] Mazenc F, Bernard O. Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances[J]. Automatica, 2011, 47(1): 140-147.

[17] Raissi T, Efimov D, Zolghadri A. Interval state estimation for a class of nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2012, 57(1): 260-265.

[18] Efimov D, Fridman L, Raïssi T, et al. Interval estimation for lpv systems applying high order sliding mode techniques[J]. Automatica, 2012, 48(9): 2365-2371.

[19] Back J, Astolfi A. Design of positive linear observers for positive linear systems via coordinate transformations and positive realizations[J]. SIAM J on Control and Optimization, 2008, 47(1): 345-373.

[20] Dai L. Observers for discrete singular systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1988, 33(2): 187-191.

[21] 张庆灵. 广义系统结构稳定性判别的李亚普诺夫方法[J]. 系统科学与数学, 1994, 14(2): 117-120.
(Zhang Q L. Lyapunov criteria for the structural stability in descriptor systems[J]. J of Systems Science and Mathematical Sciences, 1994, 14(2): 117-120.)

[22] Darouach M, Boutayeb M. Design of observers for descriptor systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40(7): 1323-1327.

[23] Darouach M, Boutat-Baddas L. Observers for a class of nonlinear singular systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(11): 2627-2633.

[24] Wang Z, Shen Y, Zhang X, et al. Observer design for discrete-time descriptor systems: An LMI approach[J]. Systems & Control Letters, 2012, 61(6): 683-687.

(责任编辑：孙艺红)