

线性时变反馈系统的状态空间模型和模态参数递推辨识

倪智宇^a, 谭述君^b, 吴志刚^{a,b}

(大连理工大学 a. 工业装备结构分析国家重点实验室, b. 航空航天学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 针对闭环系统中时变状态空间模型和模态参数的辨识问题, 提出一种递推辨识格式, 将这种格式与递推子空间方法结合, 得到一种辨识方法. 该方法通过重建输入输出数据之间的关系, 递推辨识得到闭环系统的时变状态空间模型和模态参数. 算例研究了系统在模态参数突变和周期变化两种情况下的辨识问题, 仿真结果表明, 所提出算法能有效辨识线性时变反馈系统的状态空间模型和模态参数.

关键词: 线性时变系统; 模态参数辨识; 递推子空间方法; 输出反馈; 状态空间模型

中图分类号: O321; O324; TB123

文献标志码: A

Recursive identification of state space model and modal parameter of linear time-varying feedback system

NI Zhi-yu^a, TAN Shu-jun^b, WU Zhi-gang^{a,b}

(a. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, b. School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China. Correspondent: WU Zhi-gang, E-mail: wuzhg@dlut.edu.cn)

Abstract: A recursive form for the identification of the time-varying state space model and modal parameter of closed-loop system is presented. The approach is derived from the recursive subspace method, and the state space model and modal parameters of closed-loop system are obtained recursively by reconstruct relation of input-output data. In numerical simulations, the parameter identification is studied by considering the cases of sudden change and periodical change of system, respectively. The simulation results show the effectiveness of the proposed approach for identifying state space model and modal parameters of the linear time-varying feedback system.

Keywords: linear time-varying system; modal parameter identification; recursive subspace method; output feedback; state space model

0 引言

在工程应用中, 出于安全性和系统能控性的考虑, 实际被控对象往往是一个闭环系统. 考虑到工作条件等对辨识的限制, 希望辨识能够在闭环条件下直接进行, 且闭环辨识利于模型的控制设计. 另一方面, 时变系统已经广泛应用于现代工程中, 如大型空间结构的搬运装配、太阳能帆板的展开与旋转、机械臂运动以及高速列车的行驶等过程都需要考虑到系统的时变特性. 因此, 研究时变结构的闭环参数辨识问题具有重要的实际意义.

针对闭环系统参数辨识, Verhaegen^[1]在 MOESP 的基础上基于联合输入输出状态空间模型, 提出了一种闭环的子空间辨识方法; Ljung 等^[2]通过递推得到了一个多步输出预测器, 将系统的状态向量表示

为输出预测向量的线性组合, 对状态空间方程组进行回归, 从而得到系统的参数矩阵; Vanoverschee 等^[3]在 N4SID 的基础上提出了一种间接的闭环子空间辨识方法; Chiuso 等^[4]基于随机实现理论和预测器模型, 提出了一种闭环子空间辨识方法 (WFA). 许多闭环方法通过构建输入输出数据的 Hankel 矩阵, 利用奇异值分解 (SVD) 来得到相关的系统矩阵^[3-5]. 文献 [6] 提出了一种基于辅助变量的闭环系统子空间辨识; 文献 [7] 对定常闭环系统的子空间辨识及其应用进行了研究.

递推子空间辨识方法通过信号子空间的迭代避免了较高维数的 Hankel 矩阵求解问题, 具有计算时间短、计算效率高的优点, 因此获得了越来越多的关注和广泛应用^[8]. Longman 等^[9]构建了多变量定常结

收稿日期: 2014-11-10; 修回日期: 2015-01-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11072044, 11372056).

作者简介: 倪智宇(1985-), 男, 博士生, 从事动力学系统的参数辨识与控制的研究; 吴志刚(1971-), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器动力学与控制、鲁棒控制与最优控制等研究.

构系统的状态空间模型; Bosse 等^[10]提出了一种利用 URV 分解的递推子空间方法; Yang^[11]根据信号处理方法, 提出了投影估计子空间跟踪方法 (PAST); 庞世伟等^[12]利用该方法辨识得到了移动质量-简支梁的时变模态参数; 文献 [13] 在文献 [11] 的基础上, 采用变因子改进梯度型 PAST 算法实现了利用变因子对广义观测阵的快速估计; Real 等^[14]为了提高辨识计算速度, 提出了快速估计子空间方法 (FAST); 由于在 PAST 方法中, 信号子空间列向量不完全严格正交, Badeau 等^[15]将信号子空间的投影乘以修正后的正交矩阵, 在此基础上得到了逼近幂迭代 (API) 方法, 并由此提出了快速 API 方法 (FAPI)^[16]. 文献 [11-16] 中提到的各方法的共同点是通过状态空间方程中信号子空间的递推, 可以得到系统的模态参数值, 但是没有提及完整的系统状态空间模型辨识, 并且对于闭环系统的递推情况没有做进一步的研究.

文献 [1-5] 提到的闭环子空间辨识方法均是针对定常系统讨论的, 在本文的工作中, 考虑将子空间方法应用于时变的闭环系统中, 并对上文中的递推子空间方法的应用作进一步扩展, 在前人辨识模态参数的基础上, 对时变的状态空间模型进行辨识. 本文通过重构输入输出关系, 实现对闭环系统的时变模态参数和对应的状态空间模型的系统矩阵参数 $\{A(k), B(k), C(k)\}$ 的识别. 数值仿真选用二阶弹簧-集中质量和旋转机械臂连杆系统这两个经典的参数时变模型, 通过设计输出反馈控制器, 将其作为闭环系统进行考虑, 辨识系统的时变模态参数和状态空间模型. 将这种递推方法与传统的利用 SVD 的 TV-ERA 方法^[17]进行计算量的比较, 通过对辨识得到的状态空间模型与原系统模型的响应值进行计算和对比, 验证了利用该方法辨识得到的模型能够反映出原系统的响应特性, 从而表明本文提出的递推辨识状态空间模型和模态参数的方法是有效的.

1 递推子空间方法

1.1 数据预处理

在对子空间跟踪算法进行辨识之前, 需要对状态空间方程中的输入输出数据进行适当的前处理. 利用系统的输入输出数据矩阵, 构建对应时刻的状态量变化, 将其作为子空间跟踪中的输入信号参数, 在子空间追踪方法中不断更新该状态量, 实现对系统的信号子空间 (能观性矩阵) 的追踪求解, 进而得到时变系统的状态空间模型和模态参数.

这里首先考虑如下基于输出反馈的离散时变系统的预处理:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \\ y(k) = C(k)x(k), \\ u(k) = r(k) - Fy(k). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(k)$ 为 n 维状态变量, $u(k)$ 为 r 维输入信号, $y(k)$ 为 m 维闭环输出信号, $r(k)$ 为参考输入信号, F 为输出反馈矩阵.

这里认为参考输入 $r(k)$ 和闭环输出 $y(k)$ 是可以测量得到的, 输入输出矩阵的 Hankel 矩阵形式可以分别写为

$$U(k+1) = [U(k) \quad \bar{u}(k+1)], \quad (2)$$

$$Y(k+1) = [Y(k) \quad \bar{y}(k+1)], \quad (3)$$

且有

$$U(k) = \begin{bmatrix} u(1) & u(2) & \cdots & u(k) \\ u(2) & u(3) & \cdots & u(k+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(M) & u(M+1) & \cdots & u(k+M-1) \end{bmatrix},$$

$$Y(k) = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \cdots & y(k) \\ y(2) & y(3) & \cdots & y(k+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(M) & y(M+1) & \cdots & y(k+M-1) \end{bmatrix},$$

$$\bar{u}(k+1) = [u(k+1) \quad u(k+2) \quad \cdots \quad u(k+M)]^T,$$

$$\bar{y}(k+1) = [y(k+1) \quad y(k+2) \quad \cdots \quad y(k+M)]^T.$$

其中: k 为对应的时刻, M 为选取的合适的 Hankel 矩阵维数. 利用输入输出数据的递推更新方法^[10]构建得到的状态量 $z(k)$ 的更新格式为

$$w(k) = [U(k-1)U^T(k-1)]^{-1}\bar{u}(k), \quad (4)$$

$$\alpha(k) = \bar{u}^T(k)w(k), \quad (5)$$

$$z(k) = ([Y(k-1)U^\dagger(k)]\bar{u}(k) - \bar{y}(k))/\sqrt{1+\alpha(k)}, \quad (6)$$

$$[U(k)U^T(k)]^{-1} = [U(k-1)U^T(k-1)]^{-1} - w(k)w^T(k)/\sqrt{1+\alpha(k)}, \quad (7)$$

$$[Y(k)U^\dagger(k)] = [Y(k-1)U^\dagger(k-1)] - z(k)w^T(k), \quad (8)$$

其中上标“ \dagger ”表示 Moore-Penrose 逆. 通过式 (4)~(8) 的递推, 利用输入 $\bar{u}(k)$ 和输出 $\bar{y}(k)$ 构建每个时刻的状态量 $z(k)$, 以实现子空间迭代求解中的数据更新条件. 将 $z(k)$ 作为子空间追踪的输入信号, 这样就完成了对系统输入输出数据的前处理过程.

1.2 递推 API 子空间方法

在进行输入输出数据的预处理后, 闭环时变系统的辨识转变为子空间跟踪问题, 本文在这里采用 API 方法进行系统的递推辨识. 基于篇幅所限, 本文在这里只给出 API 方法的基本步骤, 详细的 API 方法的推导过程参见文献 [15-16]. API 方法的计算步骤见表 1.

表 1 API 方法递推步骤^[15]

步骤	公式	计算量
初始条件: $W(0) = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{(mM-n) \times n} \end{bmatrix}$, $Z(0) = I_n$		
迭代过程中输入量 $z(k)$ 的给定: 将第 1.1 节中生成的各个时刻的 $z(k)$ 作为各个时刻的输入值输入. 迭代流程: $k = 1, 2, \dots$		
1)	$s(k) = W(k-1)^H z(k)$	mMn
2)	$h(k) = Z(k-1)s(k)$	n^2
3)	$g(k) = h(k)(\beta + s(k)^H h(k))^{-1}$	$2n$
4)	$e(k) = x(k) - W(k-1)s(k)$	mMn
5)	$\Theta(k) = (I_n + \ e(k)\ ^2 g(k)g(k)^H)^{-1/2}$	$mM + O(n^3)$
6)	$Z(k) = \frac{1}{\beta} \Theta(k)^H (I_n - g(k)s(k)^H)$ $Z(k-1)\Theta(k)^{-H}$	$O(n^3)$
7)	$W(k) = (W(k-1) + e(k)g(k)^H)\Theta(k)$	$mMn^2 + mMn$

与经典的 PAST 方法相比, API 方法的计算量略高于 PAST 方法, 但是 API 方法在子空间的递推方面增加了正交项, 保证了投影矩阵的正交性, 加强了对于快变子空间的跟踪性能, 使得对于变化较快的时变系统仍能够很好地跟踪和辨识.

2 模态参数和状态空间模型的辨识

2.1 系统矩阵 $A(k)$ 和输出矩阵 $C(k)$ 的辨识

利用上文的递推子空间方法可以递推辨识得到系统的能观性矩阵

$$\hat{W}(k) = \begin{bmatrix} \hat{C}(k) \\ \hat{C}(k+1)\hat{A}(k) \\ \hat{C}(k+2)\hat{A}(k+1)\hat{A}(k) \\ \vdots \\ \hat{C}(k+M-1)\hat{A}(k+M-2)\cdots\hat{A}(k) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中上标“ \wedge ”为系统的辨识值. 通过 $\hat{W}(k)$ 构造系统矩阵 $\hat{A}(k)$, 有

$$\hat{A}(k) = [W_1(k)]^\dagger [W_2(k)], \quad (10)$$

其中 $W_1(k)$ 和 $W_2(k)$ 分别为 $W(k)$ 的前 $m \times (M-1)$ 行和后 $m \times (M-1)$ 行构成的矩阵. 下面通过系统矩阵 $\hat{A}(k)$ 求解时变系统各采样时刻的频率和阻尼比. 由于在时变系统中, 各组状态空间模型之间不再具有相同的特征根, 以往针对定常系统的特征根分析和模态参数分析理论不再适用, Liu^[18] 根据“时间冻结”原理, 提出了针对时变系统模态参数分析的伪模态分析理论. 该方法仿照定常系统中模态参数的概念, 在辨识中认为时变系统的模态参数在极小的时间间隔内是不变的, 从而在各个采样时刻分别计算出当前时刻的模态参数, 利用这些采样时刻的模态参数(伪模态参数)来反映系统的时变特性. 利用上述的伪模态理论, 对 $\hat{A}(k)$ 进行特征值分解, 可得

$$\hat{A}(k) = \psi(k)\Lambda(k)\psi^{-1}(k). \quad (11)$$

其中: $\Lambda(k) = \text{diag}(\lambda_1(k), \lambda_2(k), \dots, \lambda_n(k))$ 为对角特

征根矩阵, $\lambda_i(k)$ 为时变共轭复特征根; $\psi(k)$ 为时变特征向量. 第 i 阶伪特征根 $\lambda_i(k) = \exp(-\zeta_i(k)\Delta t \pm j\omega_{di}(k)\Delta t)$, $j = \sqrt{-1}$. 其中: $\zeta_i(k)$ 为系统的第 i 阶伪阻尼比, $\omega_{di}(k)$ 为系统的第 i 阶含阻尼的伪固有频率, Δt 为采样时间.

输出矩阵 $\hat{C}(k)$ 是由信号子空间 $W(k)$ 的前 m 行组成的矩阵. 矩阵 $\hat{A}(k)$ 和 $\hat{C}(k)$ 都可以直接从能观性矩阵 $W(k)$ 中计算得到, 下面关注如何利用递推形式计算得到输入矩阵 $\hat{B}(k)$.

2.2 输入矩阵 $B(k)$ 的辨识

一般而言, 在实验中递推方法往往只利用一组输入输出数据就可以进行模态参数的辨识, 但这样无法直接通过输入输出数据利用最小二乘法进行 $\hat{B}(k)$ 的计算. 为此, 这里考虑通过递推辨识得到 $\hat{B}(k)$.

定义另外一组状态量 $\hat{x}(k)$, 使其满足系统实现 $\{\hat{A}(k), \hat{B}(k), \hat{C}(k)\}$, 则有

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}(k)\hat{x}(k) + \hat{B}(k)u(k), \quad (12)$$

$$y(k) = \hat{C}(k)\hat{x}(k). \quad (13)$$

因为 $\hat{x}(k+1) = \hat{C}(k+1)^\dagger y(k+1)$, 所以方程 (12) 可以改写为

$$\hat{C}(k+1)^\dagger y(k+1) = \hat{B}(k)u(k) + \hat{A}(k)\hat{C}^\dagger(k)y(k), \quad (14)$$

即

$$y(k+1) = \hat{C}(k+1)\hat{B}(k)u(k) + \hat{C}(k+1)\hat{A}(k)\hat{C}^\dagger(k)y(k), \quad (15)$$

则每个时刻的递推形式可以写为

$$y(k+2) = \hat{C}(k+2)\hat{A}(k+1)\hat{B}(k)u(k) + \hat{C}(k+2)\hat{B}(k+1)u(k+1) + \hat{C}(k+2)\hat{A}(k+1)\hat{A}(k)\hat{C}^\dagger(k)y(k),$$

\vdots

$$\begin{aligned}
 y(k+M) = & \\
 \hat{C}(k+M)\hat{A}(k+M-1)\cdots & \\
 \hat{A}(k+1)\hat{B}(k)u(k) + & \\
 \hat{C}(k+M)\hat{A}(k+M-1)\cdots & \\
 \hat{B}(k+1)u(k+1) + \cdots + & \\
 \hat{C}(k+M)\hat{A}(k+M-1)\cdots & \\
 \hat{A}(k+1)\hat{A}(k)\hat{C}^\dagger(k)y(k). & \quad (16)
 \end{aligned}$$

将方程(15)和(16)写为广义形式

$$Y(k) = O(k)u(k) + \Delta(k)U(k). \quad (17)$$

其中

$$Y(k) = \begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ y(k+M) \end{bmatrix}, \quad U(k) = \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+M-1) \end{bmatrix},$$

$$\hat{O}(k) = \begin{bmatrix} \hat{C}(k+1)\hat{B}(k) \\ \hat{C}(k+2)\hat{A}(k+1)\hat{B}(k) \\ \vdots \\ \hat{C}(k+M)\hat{A}(k+M-1)\cdots\hat{B}(k) \end{bmatrix},$$

则有

$$\hat{O}(k) = \begin{bmatrix} \hat{C}(k+1) \\ \hat{C}(k+2)\hat{A}(k+1) \\ \vdots \\ \hat{C}(k+M)\cdots\hat{A}(k+1) \end{bmatrix} \hat{B}(k) = \hat{W}(k+1)\hat{B}(k), \quad (18)$$

即

$$\hat{B}(k) = \hat{W}^\dagger(k+1)\hat{O}(k). \quad (19)$$

其中 $\hat{W}^\dagger(k+1)$ 和 $\hat{O}(k)$ 均已通过辨识得到, 由此可以计算得到输入矩阵 $\hat{B}(k)$.

对于输入矩阵 $\hat{B}(k)$ 的辨识, 如果在 $m \times n$ 维的输出矩阵 $\hat{C}(k)$ 中 $m \geq n$, 则也可以直接通过输出方程(13)计算得到每个时刻的状态量

$$\hat{x}(k) = \hat{C}^\dagger(k)y(k), \quad (20)$$

从而直接利用状态量 $\hat{x}(k)$ 和输入 $u(k)$, 通过递推子空间方法进行 $\hat{B}(k)$ 的辨识. 这时原方程(17)的广义形式变为

$$Y(k) = O(k)u(k) + \Delta(k)U(k). \quad (21)$$

其中

$$Y(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k+2) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+M) \end{bmatrix}, \quad U(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ \hat{u}(k+1) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+M-1) \end{bmatrix},$$

$$\hat{O}(k) = \begin{bmatrix} \hat{B}(k) \\ \hat{A}(k+1)\hat{B}(k) \\ \vdots \\ \hat{A}(k+M-1)\cdots\hat{B}(k) \end{bmatrix}.$$

这种情况下可以直接提取矩阵 $\hat{O}(k)$ 的前 n 行得到输入矩阵 $\hat{B}(k)$.

3 数值仿真

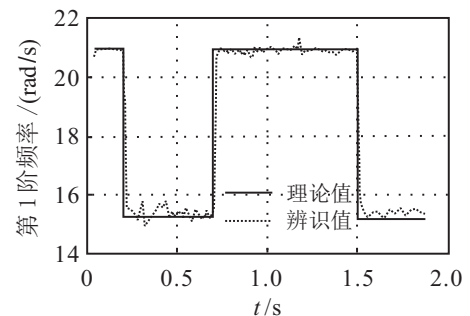
为了验证这种递推方法对时变状态空间模型和模态参数辨识的效果, 数值算例首先选用文献[19]中的二阶弹簧-质量系统模型, 本文通过设计控制器将其作为闭环系统来考虑. 其中: 滑块的质量 $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$; 阻尼系数 $E_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $E_2 = 0.8 \text{ N}\cdot\text{s/m}$; 采样时间 $\Delta t = 0.0002 \text{ s}$. 输入为随机激励信号, 质量块的水平位移为输出. 定义输出信号的信噪比(SNR)为

$$\text{SNR} = \sigma_r / \sigma_{nr}. \quad (22)$$

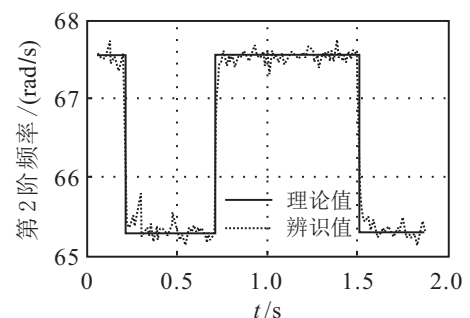
其中: σ_r 为原输出信号的标准差, σ_{nr} 为含有噪声的输出信号标准差. 在仿真中, 定义 $\text{SNR} = 50$, 在输入/输出的Hankel矩阵中, $M = 10$. 考虑刚度矩阵突变的情况, 即有

$$K_1 = \begin{cases} 1000 \text{ N/m}, & 0 \leq t \leq 0.3; \\ 500 \text{ N/m}, & 0.3 < t \leq 0.8; \\ 1000 \text{ N/m}, & 0.8 < t \leq 1.6; \\ 500 \text{ N/m}, & 1.6 < t \leq 2. \end{cases} \quad K_2 = 2000 \text{ N/m}.$$

根据方程(1)的形式, 利用线性二次型调节器(LQR)方法设计输出反馈控制器 F , 利用本文提出的方法进行能观性矩阵 $\hat{W}(k)$ 辨识, 进而得到模型矩阵和闭环的模态参数. 频率值的辨识结果如图1所示.



(a) 第1阶频率值



(b) 第2阶频率值

图1 频率值辨识结果的比较 (SNR = 50)

图1表明,所提方法对于系统模态参数突变的情况可以进行有效地跟踪.接下来利用第2节中提出的递推方法辨识状态空间模型,并通过给定相同的输入和初始条件,利用输出值进行闭环响应值对比,以检验辨识所得到的实现 $\{\hat{A}(k), \hat{B}(k), \hat{C}(k)\}$ 的精度,结果如图2所示.

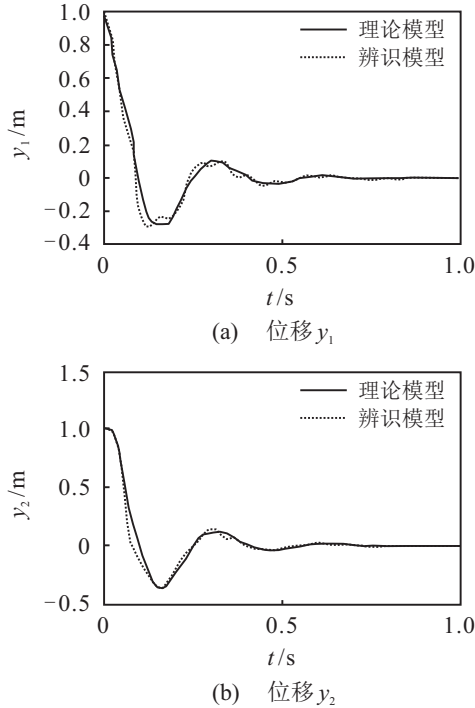


图2 原系统和辨识得到的系统的位移响应值比较

由图2中可以看出,位移响应基本上反映出了系统的特性,对系统的时变模型的辨识是比较准确的.值得说明的是,这里采用的是比较原模型响应和辨识模型响应的方式来进行状态空间模型精度的比较,这是因为一个系统具有无穷多组的状态空间模型 $\{A(k), B(k), C(k)\}$,而这些组模型矩阵的元素值并不相同(例如有两组矩阵 $A(k)$ 都是该系统的状态空间实现矩阵,但是这两个矩阵中的具体元素值并不相同),因此无法通过给出两组模型矩阵里的具体元素值来比较辨识结果的正确性.但是,由于这些组的状态空间模型均能表征该系统,都满足相同的输入输出关系,利用文献[17]中的验证方法,通过给定相同的输入和初始条件,比较系统的输出值来验证辨识得到的状态空间模型的正确性.

这里选取一个文献[18]中的空间机械臂的例子,与原文不同的是,这里通过设计输出反馈控制器,将其作为一个闭环系统进行考虑,其结构如图3所示.

在图3中: u_1 和 u_2 为在关节上施加的力矩,关节1和关节2的阻尼系数为 d_1 和 d_2 ,转动刚度为 k_1 和 k_2 ,均质连杆的质量均为 m ,长度均为 l .考虑在连杆的自由端施加一个时变的作用力 $f(t)$,令 $f(t)$ 始终垂

直于水平方向 x 轴,即与水平方向的夹角 $\phi_3 = 90^\circ$.连杆与水平方向的初始夹角为 ϕ_{10} 和 ϕ_{20} .当连杆受到扰动时,连杆将会在它们的平衡位置附近振动,实际角度为 $\phi_1 = \phi_{10} + \phi_{11}$ 和 $\phi_2 = \phi_{20} + \phi_{21}$.

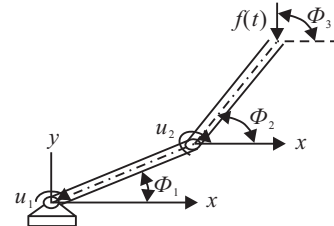


图3 二连杆机械臂模型

假定角度的振动很小,系统一般形式的动力学方程可以写为

$$M\ddot{\varphi} + E\dot{\varphi} + K(t)\varphi = u(t). \quad (23)$$

其中: $\varphi = [\phi_{11} \ \phi_{21}]^T$,而动力学方程中的其他参数为

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & (a_1 + \mu_2 l r_2) \cos(\Delta\phi_0) \\ (a_1 + \mu_2 l r_2) \cos(\Delta\phi_0) & a_3 \end{bmatrix},$$

$$K(t) = \begin{bmatrix} a_4 - f(t)l \cos(\Delta\phi_1) & -k_2 \\ -k_2 & a_5 - f(t)l \cos(\Delta\phi_2) \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 \\ -d_2 & d_2 \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) - u_2(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix},$$

且有

$$a_1 = \frac{4}{3}ml^2, \quad a_2 = \frac{1}{2}ml^2, \quad a_3 = \frac{1}{3}ml^2,$$

$$a_4 = k_1 + k_2 - \frac{3}{2}ml^2g \sin \phi_{10},$$

$$a_5 = k_2 - \frac{1}{2}ml^2g \sin \phi_{20},$$

$$\Delta\phi_0 = \phi_{10} - \phi_{20}, \quad \Delta\phi_1 = \phi_{10} - \phi_3,$$

$$\Delta\phi_2 = \phi_{20} - \phi_3.$$

在仿真中,首先将方程(23)改写为状态空间方程形式,同样利用LQR方法设计输出反馈控制器增益参数 F .算例中的各参数给定如下:

$$l = 1 \text{ m}, \quad m = 1 \text{ kg}, \quad d_1 = d_2 = 0.8 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad},$$

$$k_1 = k_2 = 80 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad},$$

初始角度

$$\phi_{10} = 0^\circ, \quad \phi_{20} = 90^\circ, \quad \phi_3 = 90^\circ.$$

参数矩阵中的作用力 $f(t)$ 为

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & 0 \leq t \leq 15; \\ f_0 - \Delta f \sin(\pi(t-0.5)/6), & 15 < t \leq 80; \\ f_0 - \Delta f, & 80 < t \leq 100. \end{cases}$$

其中: $f_0 = 20 \text{ N}$, $\Delta f = 10 \text{ N}$. 闭环输入 $u(t)$ 采用随机激励. 输出矩阵直接给定为 $C = I$, 即 $y = x$. 采样时间 $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, 进行 20 次随机振动实验. 本算例中考虑 SNR 分别为 30、50 和 100 时的辨识情况. 利用 API 方法辨识系统的模态频率和控制器反馈参数矩阵, 在构建的 Hankel 矩阵中 $M = 20$, 遗忘因子 $\beta = 0.98$. 在 SNR = 50 情况下的频率辨识比较仿真结果如图 4 所示.

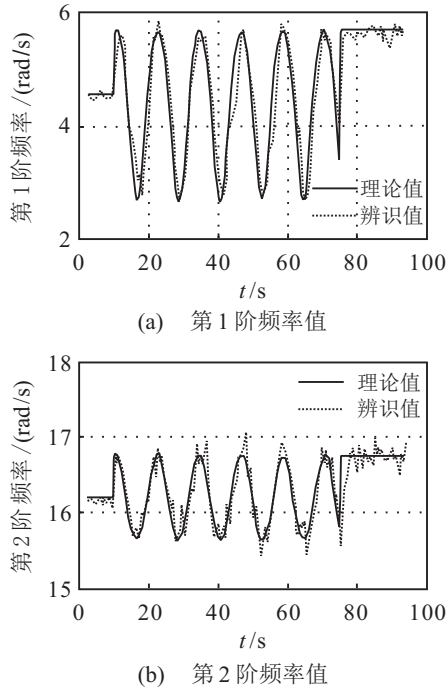


图 4 频率值辨识结果的比较 (SNR = 50)

这里将辨识结果的平均绝对百分误差 (MAPE) 定义为

$$e_{\text{MAPE}} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \frac{|\omega_k - \hat{\omega}_k|}{\omega_k} \times 100\%. \quad (24)$$

其中: ω_k 和 $\hat{\omega}_k$ 分别为 k 时刻频率的理论值和辨识值, L 为采样点数. 系统各阶频率和阻尼比的 MAPE 误差比较如表 2 所示.

信噪比 SNR	MAPE /%			
	ω_{d1}	ζ_1	ω_{d2}	ζ_2
无噪声	2.8403	9.7853	1.3573	4.7642
100	3.3434	11.6785	1.9344	6.3567
50	3.7443	22.3465	2.3689	6.9557
30	4.1446	26.4785	2.5853	9.6801

由表 2 可知, 随着信噪比的减小, 频率的 MAPE 值越来越大, 但仍不超过 5%, 表明对频率的辨识精度较好, 但阻尼比的误差较大, 最大可接近 30%.

同样利用系统的闭环响应曲线对状态空间模型的辨识结果进行比较. 这里除了采用本文的递推方法, 还采用 Majji 提出的基于重复实验原理的 TV-ERA

算法^[17]辨识了该时变系统的模型参数 $\{\hat{A}(k), \hat{B}(k), \hat{C}(k)\}$, 两种方法的模型响应曲线如图 5 所示.

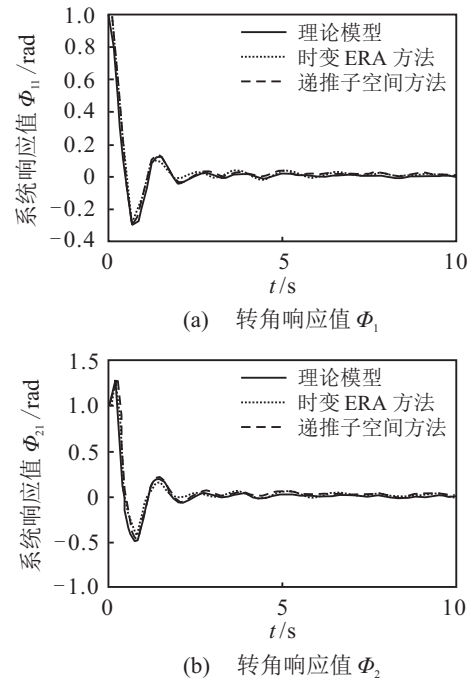


图 5 原系统和辨识得到的系统响应值比较

图 5 结果表明, 这两种方法均能有效地辨识得到系统的模型参数.

将本文的递推方法与 TV-ERA 两种时变系统辨识方法的计算时间进行比较 (20 次实验的平均时间), 其中 Hankel 矩阵的行数 M 分别考虑取为 10、15 和 20 时的情况 (两种方法的 Hankel 矩阵的列数均选为 20), 采样点数为 10 000 个, 结果如表 3 所示.

表 3 递推和时变 ERA 方法的计算时间比较

Hankel 矩阵行数 M	计算时间/s	
	递推子空间	时变 ERA
10	8.84	26.29
15	10.74	36.96
20	14.14	52.68

由表 3 可以看出, 由于递推方法不需要进行 SVD 计算, 大幅减少了计算时间. 而从算法的计算复杂性上也可以分析得到, 递推方法在每个采样时刻的计算复杂度 (如表 1 所示) 为 $O(n^3)$, 时变 ERA 方法由于需要利用 SVD 计算, 为了保证在 SVD 计算时得到系统的所有阶次对应的奇异值, 需要确保 Hankel 矩阵的维数 (这里定义维数为 $l_1 \times l_2$) 大于系统的阶次 n , 即 $l_1 > n, l_2 > n$. 因此, 每一次奇异值分解的计算复杂度 $O(\min(l_1 l_2^2, l_1^2 l_2))$ 要高于递推方法, 特别是当系统的维数比较高时, Hankel 矩阵所选取的维数 l_1 和 l_2 也将相应增加, 从而导致 SVD 所需的实际计算量大幅增长, 所以递推方法从计算时间复杂度上要低于时变 ERA 方法.

4 结 论

本文针对闭环时变系统的状态空间模型辨识,从递推子空间理论出发,提出了一种递推辨识系统矩阵的格式.这种递推格式通过重建状态空间方程中的输入输出关系,构建新的信号子空间,从中得到状态空间模型系数矩阵.文中通过二阶质量块和旋转机械臂的例子,验证了模态参数突变和周期变化两种情况,通过比较原系统和辨识得到的系统模型的响应值,验证了辨识得到的状态空间模型参数的效果.仿真算例结果表明,本文提出的这种递推辨识方法能够有效地辨识闭环系统的状态空间模型和相应的模态参数值.

参考文献(References)

- [1] Verhaegen M. Application of a subspace model identification technique to identify LTI systems operating in closed-loop[J]. *Automatica*, 1993, 29(4): 1027-1040.
- [2] Ljung L, McKelvey T. Subspace identification from closed loop data[J]. *Signal Processing*, 1996, 52(2): 209-215.
- [3] Van Overschee P, De Moor B. Closed loop subspace system identification[C]. *Proc of the 36th IEEE Conf on Decision and Control*. San Diego: IEEE Press, 1997: 1848-1853.
- [4] Chiuso A, Picci G. Consistency analysis of some closed-loop subspace identification methods[J]. *Automatica*, 2005, 41(3): 377-391.
- [5] Gilson M, Mercère G. Subspace-based optimal IV method for closed-loop system identification[C]. *Proc of the 14th IFAC Symposium on System Identification*. Newcastle: Elsevier, 2006: 1068-1073.
- [6] 衷路生, 杨辉. 基于辅助变量的闭环系统子空间辨识[J]. *控制与决策*, 2009, 24(5): 670-674.
(Zhong L S, Yang H. Closed-loop subspace identification based on instrumental variable[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(5): 670-674.)
- [7] 李幼凤. 闭环子空间辨识方法及其应用[D]. 杭州: 浙江大学控制科学与工程学系, 2010.
(Li Y F. Closed-loop subspace identification and its application[D]. Hangzhou: College of Control Science and Engineering, Zhejiang University, 2010.)
- [8] 杨利芳, 于开平, 庞世伟, 等. 用于线性时变结构系统辨识的子空间方法比较研究[J]. *振动与冲击*, 2007, 26(3): 8-12.
(Yang L F, Yu K P, Pang S W, et al. Comparison study on identification methods applied to linear time-varying structures[J]. *J of Vibration and Shock*, 2007, 26(3): 8-12.)
- [9] Longman R W, Juang J N. Recursive form of the eigensystem realization algorithm for system identification[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 1989, 12(5): 647-652.
- [10] Bosse A, Tasker F, Fisher S. Real-time modal parameter estimation using subspace methods: Applications[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1998, 12(6): 809-823.
- [11] Yang B. Projection approximation subspace tracking[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1995, 43(1): 95-107.
- [12] 庞世伟, 于开平, 邹经湘. 用于时变结构模态参数识别的投影估计递推子空间方法[J]. *工程力学*, 2005, 22(5): 115-119.
(Pang S W, Yu K P, Zou J X. A projection approximation recursive subspace method for identification of modal parameters of time-varying structures[J]. *Engineering Mechanics*, 2005, 22(5): 115-119.)
- [13] 黄金峰, 张合新, 张植. 一种基于变因子梯度型 PAST 的递推子空间辨识算法[J]. *控制与决策*, 2012, 27(8): 1226-1230.
(Huang J F, Zhang H X, Zhang Z. A modified method of recursive subspace identification algorithms based on variable factor gradient subspace tracking[J]. *Control and Decision*, 2012, 27(8): 1226-1230.)
- [14] Real E C, Tufts D W, Cooley J W. Two algorithms for fast approximate subspace tracking[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1999, 47(7): 1936-1945.
- [15] Badeau R, Richard G, David B, et al. Approximated power iterations for fast subspace tracking[C]. *Proc of 7th Int Symposium on Signal Processing and Its Applications*. Paris: IEEE Computer Society, 2003: 583-586.
- [16] Badeau R, David B, Richard G. Fast approximated power iteration subspace tracking[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2005, 53(8): 2931-2941.
- [17] Majji M, Juang J N, Junkins J L. Time-varying eigensystem realization algorithm[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, 33(1): 13-28.
- [18] Liu K. Identification of linear time-varying systems[J]. *J of Sound and Vibration*, 1997, 206(4): 487-505.
- [19] 杨凯, 于开平, 刘荣贺, 等. 两种新的基于子空间跟踪的时变模态参数快速辨识算法[J]. *工程力学*, 2012, 29(10): 294-300.
(Yang K, Yu K P, Liu R H, et al. Two new fast identification algorithms of time-varying modal parameters based on subspace tracking[J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(10): 294-300.)