

文章编号: 1001-0920(2016)03-0441-07

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2014.1757

## 受动态约束的谐波传动式可重构模块 机器人分散积分滑模控制

董博<sup>1,2</sup>, 刘克平<sup>1</sup>, 李元春<sup>1</sup>

(1. 长春工业大学控制工程系, 长春 130012; 2. 吉林大学控制科学与工程系, 长春 130012)

**摘要:** 针对受外界动态约束的谐波传动式可重构模块机器人轨迹跟踪问题, 提出一种基于关节力矩反馈的分散积分滑模控制方法. 在无力/力矩传感器且存在耦合模型不确定性的条件下即能获得良好的控制品质. 基于谐波传动模型, 仅采用位置测量数据估计关节力矩, 并建立机器人子系统动力学模型. 基于可变增益超螺旋算法(VGSTA)设计分散积分滑模控制器, 补偿模型不确定性并削弱控制器抖振. 采用Lyapunov理论对系统的渐近稳定性进行了证明. 数值仿真结果验证了所设计的控制器的优越性.

**关键词:** 可重构模块机器人; 谐波传动; 分散控制; 积分滑模控制; 关节力矩反馈

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Decentralized integral sliding mode control for time varying constrained modular and reconfigurable robot based on harmonic drive transmission

DONG Bo<sup>1,2</sup>, LIU Ke-ping<sup>1</sup>, LI Yuan-chun<sup>1</sup>

(1. Department of Control Engineering, Changchun University of Technology, Changchun 130012, China;

2. Department of Control Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130012, China. Correspondent: LI Yuan-chun, E-mail: liyc@mail.ccut.edu.cn)

**Abstract:** For the problem of trajectory tracking of a time varying constrained harmonic drive based modular and reconfigurable robot(MRR), a decentralized integral sliding mode control method based on the joint torque feedback technique is proposed. In the condition of existing coupling model uncertainty, a high-performance control can be achieved without using the force/torque sensor. Based on a harmonic drive model, the joint torque is estimated by using only position measurements of each MRR module, and the subsystem dynamic model of MRR is formulated. Based on the variable gain super twisting algorithm(VGSTA), a decentralized integral sliding mode controller is designed to compensate the model uncertainty and reduce the chattering effect. The asymptotic stability of the system is proved by using the Lyapunov theory. Simulation results show the advantage of the proposed controller.

**Keywords:** modular and reconfigurable robot; harmonic drive transmission; decentralized control; integral sliding mode control; joint torque feedback technique

### 0 引言

可重构模块机器人是一类具有标准模块与接口, 可以根据不同的任务需求对自身构形进行重新组合与配置的机器人. 根据模块化设计概念, 可重构模块机器人的关节模块包含通讯、驱动、控制、传感等单元, 可以在不同的外界环境和约束下根据任务需要改变自身构形. 同时, 需要设计合适的控制系统来保证机器人重构后的稳定性与精确性.

除了具有可重构的特性, 如何以最轻的机器人自身质量达到合理的最大负载能力已成为机器人设计者和工业制造商们共同关注的问题. 谐波传动装置以其高传动比、体积小、质量轻、同轴装配等优越特性被广泛地应用于模块机器人的设计中. 一些学者对谐波传动系统的模型、柔度、摩擦以及滞后特性进行了研究<sup>[1-4]</sup>. 然而, 传统的谐波传动模型通常不考虑波发生器的柔度, 且假设传动过程无偏差. 事实上, 采用滚

收稿日期: 2014-11-18; 修回日期: 2015-06-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61374051); 复杂系统管理与控制国家重点实验室项目(20150102); 吉林省科技发展计划项目(20160414033GH, 20150520112JH).

作者简介: 董博(1986—), 男, 讲师, 博士, 从事可重构模块机器人动力学建模与控制的研究; 李元春(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统建模、智能机械与机器人控制等研究.

球轴承设计使得谐波传动装置存在运动学误差和力矩偏差<sup>[5]</sup>, 因此, 建立完备的谐波传动模型需要同时考虑波发生器、柔轮的柔度以及传动力矩偏差。

为了获得良好的控制精度, 关节力矩反馈技术被广泛应用于机器人控制领域. 一些学者对基于直接力矩传感技术的机器人控制方法进行了研究<sup>[6-8]</sup>. 然而, 对于可重构模块机器人而言, 安装关节力矩传感器会损害其可靠性和坚固性, 并使模块结构变得复杂. 一方面, 用来测量关节力矩的应变计易受温度变化影响; 另一方面, 采用直接关节力矩测量进行模块机器人动力学补偿必然会产生关节力矩或其时间导数的代数环<sup>[9]</sup>, 使模块机器人系统更容易受到未建模不确定性及扰动的影响. 因此, 在无力/力矩传感器且存在外界动态约束力和模型不确定性的条件下, 精确控制可重构模块机器人是一类亟待解决的问题。

本文针对受外界动态约束的可重构模块机器人, 提出一种基于关节力矩反馈的分散积分滑模控制方法, 在不采用力/力矩传感器的条件下解决了存在动态约束力和耦合模型不确定性的可重构模块机器人轨迹跟踪问题. 基于同时考虑波发生器、柔轮柔度以及传动力矩偏差的谐波传动模型, 仅采用电机端与关节末端编码器的位置测量数据估计关节力矩, 并建立可重构模块机器人子系统动力学模型. 基于独立的关节动力学信息, 结合积分滑模设计<sup>[10-11]</sup>与分散控制策略<sup>[12-15]</sup>, 设计一种基于 VGSTA (variable gain super twisting algorithm) 的分散积分滑模控制器, 对模型不确定性进行补偿, 并削弱控制器抖振. 通过 Lyapunov 理论对系统的渐近稳定性进行证明. 最后, 通过对两组不同构形的可重构模块机器人进行数值仿真, 验证了所设计的控制器的优越性。

## 1 基于谐波传动模型的关节力矩估计

考虑可重构模块机器人由  $n$  个模块组成, 每个模块均提供一个采用谐波传动的独立旋转关节, 其中, 第  $i$  个模块的谐波传动装置运动学关系为

$$q_{wi} = (\gamma_i + 1)q_{ci} - \gamma_i q_{fi}. \quad (1)$$

其中:  $\gamma_i$  为传动比,  $q_{wi}$ 、 $q_{ci}$ 、 $q_{fi}$  分别为波发生器、刚轮和柔轮的转角. 为了在无力/力矩传感器的条件下获得关节力矩, 本文同时考虑柔轮和波发生器的柔度以及传动力矩偏差, 建立谐波传动模型, 采用电机端与关节末端编码器的位置测量数据进行关节力矩估计.

定义谐波传动装置柔轮与波发生器的扭转形变为

$$\begin{aligned} \Delta q_{fi} &= q_{fOi} - q_{fIi}, \\ \Delta q_{wi} &= q_{wOi} - q_{wIi}. \end{aligned} \quad (2)$$

其中:  $q_{wOi}$ 、 $q_{wIi}$ 、 $q_{fOi}$ 、 $q_{fIi}$  分别为波发生器和柔轮

的输出端、输入端位置变量. 通常情况下, 只有  $q_{wIi}$  和  $q_{fOi}$  可由电机端和关节末端的编码器测得. 由此即可计算得到谐波传动装置的扭转形变为

$$\Delta q_i = q_{fOi} - \frac{q_{wIi}}{\gamma_i}. \quad (3)$$

对式 (3) 同时加减  $q_{fIi}$ 、 $q_{wOi}/\gamma_i$  两项, 可得

$$\Delta q_i = \Delta q_{fi} + \frac{\Delta q_{wi}}{\gamma_i} + q_{err}. \quad (4)$$

其中  $q_{err}$  为谐波传动装置的运动学误差, 即

$$q_{err} = q_{fIi} - \frac{q_{wOi}}{\gamma_i}. \quad (5)$$

根据谐波传动装置的柔度特性, 可将其描述为一类弹簧质量系统<sup>[16]</sup>, 从而得到柔轮及波发生器的输出力矩为

$$\begin{aligned} \tau_{fi} &= k_f \Delta q_{fi}, \\ \tau_{wi} &= k_w \Delta q_{wi}. \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $k_f$  和  $k_w$  分别为柔轮和波发生器的弹性系数.

定义柔轮的局部弹性系数为

$$k_{fL} = d\tau_{fi}/d\Delta q_{fi}. \quad (7)$$

考虑谐波传动刚度的对称性, 通过泰勒展开, 可得柔轮的局部弹性系数为

$$k_{fL} = k_{f0}(1 + (c_f \tau_{fi})^2), \quad (8)$$

其中  $k_{f0}$  和  $c_f$  为待定常数. 若  $k_{f0} \neq 0$ , 则可将柔轮的扭转形变  $\Delta q_{fi}$  表示为

$$\Delta q_{fi} = \int_0^{\tau_{fi}} \frac{d\tau_{fi}}{k_{fL}} = \frac{\arctan(c_f \tau_{fi})}{c_f k_{f0}}. \quad (9)$$

定义波发生器的局部弹性系数为

$$k_{wL} = k_{w0} e^{c_w |\tau_{wi}|}, \quad (10)$$

其中  $k_{w0}$  和  $c_w$  为待定常数. 若  $k_{w0} \neq 0$ , 则可将波发生器的扭转形变  $\Delta q_{wi}$  表示为

$$\Delta q_{wi} = \int_0^{\tau_{wi}} \frac{d\tau_{wi}}{k_{wL}} = \frac{\operatorname{sgn}(\tau_{wi})}{c_w k_{w0}} (1 - e^{-c_w |\tau_{wi}|}), \quad (11)$$

其中  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  为符号函数. 合并式 (9) 和 (11), 便可将谐波传动装置的扭转形变表示为

$$\Delta q_i = \frac{\arctan(c_f \tau_{fi})}{c_f k_{f0}} + \frac{\operatorname{sgn}(\tau_{wi})}{\gamma_i c_w k_{w0}} (1 - e^{-c_w |\tau_{wi}|}) + q_{err}. \quad (12)$$

根据式 (3), 对式 (12) 进行变形, 即可得到柔轮输出端力矩, 即关节力矩为

$$\begin{cases} \tau_{fi} = \tau_{fci} - \Delta \tau_{err}, \\ \tau_{fci} = \frac{1}{c_f} \tan \left( c_f k_{f0} \left( \Delta q_i - \frac{\operatorname{sgn}(\tau_{wi})}{\gamma_i c_w k_{w0}} (1 - e^{-c_w |\tau_{wi}|}) \right) \right). \end{cases} \quad (13)$$

其中:  $\tau_{fci}$  为关节力矩估计值的确定部分;  $\Delta \tau_{err}$  为具有确定上界的谐波传动力矩偏差, 其补偿方法将在下节讨论; 波发生器力矩  $\tau_{wi}$  可通过电机模型计算获得。

## 2 动力学模型

为了实现分散控制策略, 将  $n$  自由度的动态约束下可重构模块机器人动力学模型<sup>[17]</sup>描述为  $n$  个相互耦合子系统的集合. 根据基于关节力矩传感技术的机器人动力学建模方法<sup>[18]</sup>, 采用式 (13) 估计关节力矩, 建立可重构模块机器人第  $i$  个子系统动力学模型为

$$I_{mi}\gamma_i\ddot{q}_i + f_i(q_i, \dot{q}_i) + I_{mi} \sum_{j=1}^{i-1} z_{mi}^T z_{qj} \ddot{q}_j + \frac{\tau_{fci}}{\gamma_i} + I_{mi} \sum_{j=2}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} z_{mi}^T (z_{qk} \times z_{qj}) \dot{q}_k \dot{q}_j + \tau_{ui} = u_i. \quad (14)$$

其中:  $I_{mi}$  为电机的转动惯量;  $q_i = q_{fO_i}$  为关节变量;  $\tau_{ui} = -\Delta\tau_{err}/\gamma_i$ ;  $z_{mi}$  和  $z_{qj}$  分别为电机和关节的轴向单位向量, 且有  $|z_{mi}^T z_{qj}| \leq 1$ ,  $|z_{mi}^T (z_{qk} \times z_{qj})| \leq 1$ ;  $u_i$  为电机输出力矩;

$$I_{mi} \sum_{j=1}^{i-1} z_{mi}^T z_{qj} \ddot{q}_j + I_{mi} \sum_{j=2}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} z_{mi}^T (z_{qk} \times z_{qj}) \dot{q}_k \dot{q}_j$$

为子系统间耦合力矩项;  $f_i(q_i, \dot{q}_i)$  为关节摩擦, 表示为一类关于关节位置和速度的函数<sup>[19-20]</sup>, 即

$$f_i(q_i, \dot{q}_i) = (f_{ci} + f_{si} e^{-f_{\tau i} \dot{q}_i^2}) \text{sgn}(\dot{q}_i) + b_{fi} \dot{q}_i + f_{qi}(q_i, \dot{q}_i). \quad (15)$$

这里:  $f_{ci}$  为库伦摩擦相关参数,  $f_{si}$  为静摩擦相关参数,  $f_{\tau i}$  为位置依赖性摩擦及其他摩擦相关参数,  $b_{fi}$  为待定常数.  $f_{qi}(q_i, \dot{q}_i)$  为有界非参数摩擦项, 其上界定义为

$$|f_{qi}(q_i, \dot{q}_i)| < \rho_{fi}, \quad (16)$$

其中  $\rho_{fi}$  为在任意关节位置  $q_i$  和关节速度  $\dot{q}_i$  下的确定常数界.

令  $x_i = [x_{i1}, x_{i2}]^T = [q_i, \dot{q}_i]^T$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 可将式 (14) 的子系统动力学模型描述为如下的状态空间:

$$S_i : \begin{cases} \dot{x}_{i1} = x_{i2}, \\ \dot{x}_{i2} = Fr_i(q_i, \dot{q}_i) + \Psi_i(q_i, \dot{q}_i) + h_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) - b_i u_i, \\ y_i = x_{i1}. \end{cases} \quad (17)$$

其中:  $x_i$  为状态向量,  $y_i$  为  $S_i$  的输出,  $b_i = -(I_{mi}\gamma_i)^{-1}$ ,  $\Psi_i(q_i, \dot{q}_i)$ 、 $Fr_i(q_i, \dot{q}_i)$ 、 $h_i(q, \dot{q}, \ddot{q})$  定义为

$$\Psi_i(q_i, \dot{q}_i) = -(I_{mi}\gamma_i)^{-1} (\tau_{fci}/\gamma_i), \quad (18)$$

$$Fr_i(q_i, \dot{q}_i) = -(I_{mi}\gamma_i)^{-1} f_i(q_i, \dot{q}_i), \quad (19)$$

$$h_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) = -(I_{mi}\gamma_i)^{-1} \left( I_{mi} \sum_{j=2}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} z_{mi}^T (z_{qk} \times z_{qj}) \dot{q}_k \dot{q}_j + I_{mi} \sum_{j=1}^{i-1} z_{mi}^T z_{qj} \ddot{q}_j + \tau_{ui} \right). \quad (20)$$

## 3 分散积分滑模控制

本节针对受动态约束的可重构模块机器人轨迹跟踪问题, 设计分散积分滑模控制器, 并通过 Lyapunov 理论证明系统的渐近稳定性.

**假设 1** 关节期望轨迹  $y_{id}(t)$  二阶可导且有界.

**假设 2** 模型不确定性  $h_i(q, \dot{q}, \ddot{q})$  有界, 且满足

$$|h_i(q, \dot{q}, \ddot{q})| \leq g_{i0} + \sum_{j=1}^n g_{ij}, \quad (21)$$

其中  $g_{i0}$ 、 $g_{ij}$  为已知正常数和光滑 Lipschitz 函数.

定义关节轨迹跟踪误差及其时间导数为

$$e_i(t) = x_{i1}(t) - y_{id}(t), \quad (22)$$

$$\dot{e}_i(t) = x_{i2}(t) - \dot{y}_{id}(t). \quad (23)$$

定义积分滑模面为

$$s_i = \dot{e}_i(t) + k_1 e_i(t) + z_i - \dot{e}_i(t_0) - k_1 e_i(t_0). \quad (24)$$

其中:  $k_1$  为待定正常数;  $e_i(t_0)$  为初始时刻的误差值;  $z_i$  为一类势函数积分变量, 其时间导数  $\dot{z}_i$  定义为

$$\dot{z}_i = \begin{cases} \eta \sin(\pi e_i/2\eta), & |e_i| < \eta; \\ \eta, & e_i \geq \eta; \\ -\eta, & e_i \leq -\eta. \end{cases} \quad (25)$$

这里  $\eta$  为待定正常数. 令式 (24) 对时间求导, 可得

$$\dot{s}_i = \ddot{e}_i(t) + k_1 \dot{e}_i(t) + \dot{z}_i - \ddot{e}_i(t_0) - k_1 \dot{e}_i(t_0). \quad (26)$$

将式 (17) 代入 (26), 可得

$$\dot{s}_i = Fr_i(q_i, \dot{q}_i) + \Psi_i(q_i, \dot{q}_i) + h_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \dot{z}_i - b_i u_i - \ddot{y}_{id}(t) + k_1 \dot{e}_i(t) - \ddot{e}_i(t_0) - k_1 \dot{e}_i(t_0). \quad (27)$$

根据式 (24) 和 (26), 设计分散控制律为

$$u_i = u_{i0} + u_{i1} + u_{i2}. \quad (28)$$

第 1 部分, 设计一般控制律  $u_{i0}$  为

$$u_{i0} = b_i^{-1} (\dot{z}_i + \Psi_i(q_i, \dot{q}_i) - \ddot{y}_{id}(t) + k_1 \dot{e}_i(t) - \ddot{e}_i(t_0) - k_1 \dot{e}_i(t_0)) + \hat{b}_{fi} \dot{q}_i + (\hat{f}_{ci} + \hat{f}_{si} e^{-\hat{f}_{\tau i} \dot{q}_i^2}) \text{sgn}(\dot{q}_i). \quad (29)$$

其中:  $u_{i0}$  用来补偿滑模面中的一般项及已建模的关节摩擦;  $\hat{b}_{fi}$ 、 $\hat{f}_{ci}$ 、 $\hat{f}_{si}$ 、 $\hat{f}_{\tau i}$  为一般摩擦参数.

第 2 部分, 设计鲁棒控制律  $u_{i1}$  来补偿关节摩擦建模误差. 定义

$$u_{i1} = u_{i1}^1 + Y(\dot{q}_i)(u_{i1}^2 + u_{i1}^3), \quad (30)$$

其中  $Y(\dot{q}_i)$  定义为

$$Y(\dot{q}_i) = [\dot{q}_i, \text{sgn}(\dot{q}_i), e^{(-\hat{f}_{\tau i} \dot{q}_i^2)} \text{sgn}(\dot{q}_i), -\hat{f}_{si} \dot{q}_i^2 e^{(-\hat{f}_{\tau i} \dot{q}_i^2)} \text{sgn}(\dot{q}_i)]. \quad (31)$$

摩擦力模型中的参数不确定项  $\tilde{F}^i$  定义为

$$\begin{aligned} \tilde{F}^i = & \\ & [\hat{b}_{fi} - b_{fi}, \hat{f}_{ci} - f_{ci}, \hat{f}_{si} - f_{si}, \hat{f}_{\tau i} - f_{\tau i}]^T = \\ & \tilde{F}_c^i + \tilde{F}_v^i. \end{aligned} \quad (32)$$

其中:  $\tilde{F}_c^i$  为未知常数向量;  $\tilde{F}_v^i$  为有界变量, 其上界为

$$|\tilde{F}_{vn}^i| < \rho_n^i, \quad n = 1, 2, 3, 4. \quad (33)$$

式(30)中,  $u_{i1}^1$  用来补偿式(15)中的非参数不确定项  $f_{qi}(q_i, \dot{q}_i)$ ;  $u_{i1}^2$  和  $u_{i1}^3$  分别补偿参数不确定项  $\tilde{F}_c^i$  和  $\tilde{F}_v^i$ . 定义  $u_{i1}^1$ 、 $u_{i1}^2$ 、 $u_{i1}^3$  如下:

$$u_{i1}^1 = \begin{cases} -\rho_{fi} \frac{s_i}{|s_i|}, & |s_i| > \varepsilon_1; \\ -\rho_{fi} \frac{s_i}{\varepsilon_1}, & |s_i| \leq \varepsilon_1. \end{cases} \quad (34)$$

$$u_{i1}^2 = -k_2 \int_0^t Y(\dot{q}_i)^T(s_i) dt. \quad (35)$$

$$u_{i1}^3 = \begin{cases} -\rho_n^i \frac{\delta_n^i}{|\delta_n^i|}, & |\delta_n^i| > \varepsilon_{pn}^i; \\ -\rho_n^i \frac{\delta_n^i}{\varepsilon_{pn}^i}, & |\delta_n^i| \leq \varepsilon_{pn}^i. \end{cases} \quad (36)$$

其中:  $\delta_n^i = Y(\dot{q}_i)^T s_i$ ;  $\rho_{fi}$ 、 $\rho_n^i$  为参数不确定项上界;  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_{pn}^i$  为待定参数.

第3部分, 基于 VGSTA<sup>[21]</sup>理论, 设计控制律  $u_{i2}$  补偿不确定项  $h_i(q, \dot{q}, \ddot{q})$ . 根据式(21), 定义

$$h_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) = g_{i1}(q_i, t) + g_{i2}(q_i, t). \quad (37)$$

其中:  $g_{i1}(q_i, t)$ 、 $g_{i2}(q_i, t)$  具有如下上界:

$$\begin{cases} |g_{i1}(q_i, t)| \leq \varsigma_{i1}(q_i, t) |\phi_{i1}(s_i)|, \\ \left| \frac{dg_{i2}(q_i, t)}{dt} \right| \leq \varsigma_{i2}(q_i, t) |\phi_{i2}(s_i)|. \end{cases} \quad (38)$$

这里:  $\varsigma_{i1}(q_i, t) \geq 0$ ,  $\varsigma_{i2}(q_i, t) \geq 0$  为确定连续函数;  $\phi_{i1}(s_i)$ 、 $\phi_{i2}(s_i)$  定义为

$$\begin{cases} \phi_{i1}(s_i) = |s_i|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(s_i) + \kappa_{i3}(t) s_i, \\ \phi_{i2}(s_i) = \phi'_{i1}(s_i) \phi_{i1}(s_i) = \\ \frac{1}{2} \text{sgn}(s_i) + \frac{3}{2} \kappa_{i3}(t) |s_i|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(s_i) + \kappa_{i3}^2(t) s_i. \end{cases} \quad (39)$$

$\kappa_{i3}(t)$  为正参数增益. 将式(37)代入(27), 可得

$$\begin{aligned} \dot{s}_i = & Fr_i(q_i, \dot{q}_i) - b_i u_{i0} + k_1 \dot{e}_i(t) + \Psi_i(q_i, \dot{q}_i) + \\ & \dot{z}_i - b_i u_{i1} - \ddot{y}_{id}(t) - \ddot{e}_i(t_0) - k_1 \dot{e}_i(t_0) + \\ & g_{i1}(q_i, t) + g_{i2}(q_i, t) - b_i u_{i2}. \end{aligned} \quad (40)$$

由此, 基于 VGSTA 理论, 设计控制律  $u_{i2}$  如下:

$$u_{i2} = b_i^{-1} \left( \kappa_{i1}(t) \phi_{i1}(s_i) + \int_0^t \kappa_{i2}(t) \phi_{i2}(s_i) dt \right). \quad (41)$$

其中  $\kappa_{i1}(t)$ 、 $\kappa_{i2}(t)$  为可变增益, 定义为

$$\begin{cases} \kappa_{i1}(t) = \frac{1}{\rho_v} \left( \frac{1}{4\varepsilon_2} (2\varepsilon_2 \varsigma_{i1} + \varsigma_{i2})^2 + 2\varepsilon_2 \varsigma_{i2} + \varepsilon_2 + (2\varepsilon_2 + \varsigma_{i1})(\rho_v + 4\varepsilon_2^2) \right) + \varphi, \\ \kappa_{i2}(t) = \rho_v + 4\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_2 \kappa_{i1}(t). \end{cases} \quad (42)$$

这里,  $\varphi$ 、 $\rho_v$ 、 $\varepsilon_2$  为待定正常数.

需要指出的是, 对于式(41)设计的控制律  $u_{i2}$ , 若

$\kappa_{i1}(t)$ 、 $\kappa_{i2}(t)$  为常数, 且  $\kappa_{i3}(t) = 0$ , 则该控制律为标准 super-twisting 控制律; 若  $\kappa_{i3}(t) > 0$ ,  $\kappa_{i1}(t)$ 、 $\kappa_{i2}(t)$  按式(42)进行设计, 则可以减小滑模面对有界不确定性的敏感性, 削减系统中存在的线性增长扰动, 并抑制控制器抖振.

合并式(29)、(30)和(41), 即可得到动态约束下可重构模块机器人第  $i$  个关节的分散积分滑模控制器  $u_i$  如下:

$$\begin{aligned} u_i = & u_{i0} + u_{i1} + u_{i2} = \\ & b_i^{-1} \left[ \Psi_i(q_i, \dot{q}_i) - \ddot{y}_{id}(t) - \ddot{e}_i(t_0) - k_1 \dot{e}_i(t_0) + \right. \\ & \dot{z}_i + b_i (\hat{b}_{fi} \dot{q}_i + u_{i1}^1 + Y(\dot{q}_i)(u_{i1}^2 + u_{i1}^3) + \\ & \left. (\hat{f}_{ci} + \hat{f}_{si} e^{\hat{f}_{\tau i} \dot{q}_i^2}) \text{sgn}(\dot{q}_i) \right) + k_1 \dot{e}_i(t) + \\ & \left. \kappa_{i1}(t) \phi_{i1}(s_i) + \int_0^t \kappa_{i2}(t) \phi_{i2}(s_i) dt \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

**定理 1** 考虑一类基于谐波传动的动态约束下  $n$  自由度可重构模块机器人, 描述为式(14)所示的动力学模型且具有存在于式(19)、(20)中的耦合模型不确定性. 若采用式(13)给出的关节力矩估计方法, 根据式(24)定义的积分滑模面, 设计式(43)的分散控制器, 则闭环系统是渐近稳定的.

**证明** 根据式(24)的滑模面, 定义一类严格 Lyapunov 备选函数来对定理进行证明.

对式(40)做如下变形:

$$\begin{aligned} \dot{s}_i = & Fr_i(q_i, \dot{q}_i) + \Psi_i(q_i, \dot{q}_i) + k_1 \dot{e}_i(t) + \dot{z}_i - \\ & \ddot{y}_{id}(t) - \ddot{e}_i(t_0) - k_1 \dot{e}_i(t_0) - b_i u_{i0} - \\ & b_i u_{i1} - \kappa_{i1}(t) \phi_{i1}(s_i) + g_{i1}(q_i, t) + Z_i, \end{aligned} \quad (44)$$

其中  $\dot{Z}_i$  定义为

$$\dot{Z}_i = -\kappa_{i2}(t) \phi_{i2}(s_i) + \frac{dg_{i2}(q_i, t)}{dt}. \quad (45)$$

定义 Lyapunov 备选函数为

$$V_i(s_i, Z_i) = \xi_i^T P \xi_i. \quad (46)$$

其中  $\xi_i^T$  和  $P$  按下式给出:

$$\xi_i^T = [\dot{\phi}_{i1}(s_i), Z_i], \quad (47)$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_v + 4\varepsilon_2^2 & -2\varepsilon_2 \\ -2\varepsilon_2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

由此可知, 式(46)所示的 Lyapunov 备选函数正定且处处可导. 将不等式(38)改写为

$$\begin{cases} g_{i1}(q_i, t) = \vartheta_{i1}(q_i, t) \phi_{i1}(s_i), \\ \frac{dg_{i2}(q_i, t)}{dt} = \vartheta_{i2}(q_i, t) \phi_{i2}(s_i). \end{cases} \quad (49)$$

其中:  $|\vartheta_{i1}(q_i, t)| \leq \varsigma_{i1}(q_i, t)$ ,  $|\vartheta_{i2}(q_i, t)| \leq \varsigma_{i2}(q_i, t)$ . 易得  $\xi_i$  的时间导数为

$$\dot{\xi}_i = \phi'_{i1}(s_i) \begin{bmatrix} -\kappa_{i1}(t) - \vartheta_{i1}(q_i, t) & 1 \\ -\kappa_{i2}(t) - \vartheta_{i2}(q_i, t) & 0 \end{bmatrix} \xi_i =$$

$$\phi'_{i1}(s_i)A(q_i, t)\xi_i. \quad (50)$$

对  $V_i(s_i, Z_i)$  求时间导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(s_i, Z_i) = & \phi'_{i1}(s_i)\xi_i^T(A^T(q_i, t)P + PA(q_i, t))\xi_i = \\ & -\phi'_{i1}(s_i)\xi_i^T\Omega(q_i, t)\xi_i, \end{aligned} \quad (51)$$

其中  $\Omega(q_i, t)$  定义为

$$\Omega(q_i, t) = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_3 \\ \Omega_3 & \Omega_2 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

这里,  $\Omega_1$ 、 $\Omega_2$ 、 $\Omega_3$  分别为

$$\begin{cases} \Omega_1 = 4\varepsilon_2(\vartheta_{i2}(q_i, t) - \kappa_{i2}(t)) - \\ \quad 2(\vartheta_{i1}(q_i, t) - \kappa_{i1}(t))(\rho_v + 4\varepsilon_2^2), \\ \Omega_2 = 4\varepsilon_2, \\ \Omega_3 = \kappa_{i2}(t) - \vartheta_{i2}(q_i, t) - 4\varepsilon_2^2 - \rho_v + \\ \quad 2\varepsilon_2(\vartheta_{i1}(q_i, t) - \kappa_{i1}(t)). \end{cases} \quad (53)$$

按照式(42)和(48)选择  $\kappa_{i1}(t)$ 、 $\kappa_{i2}(t)$ 、 $P$ , 可得

$$\begin{aligned} \Omega(q_i, t) - 2\varepsilon_2 = & \begin{bmatrix} 4\varepsilon_2\vartheta_{i2} + 2\rho_v\kappa_{i1}(t) - 2\varepsilon_2 - & 2\varepsilon_2\vartheta_{i1} - \vartheta_{i2} \\ 2(2\varepsilon_2 + \vartheta_{i1})(\rho_v + 4\varepsilon_2^2) & 2\varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_2\vartheta_{i1} - \vartheta_{i2} & 2\varepsilon_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (54)$$

易知, 对于任意变量  $(q_i, t)$ , 式(54)均正定. 因此, 由式(51)可以进一步得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(s_i, Z_i) = & -\phi'_{i1}(s_i)\xi_i^T\Omega(q_i, t)\xi_i \leq \\ & -2\varepsilon_2\phi'_{i1}(s_i)\xi_i^T\xi_i = \\ & -2\varepsilon_2\left(\frac{1}{2|s_i|^{1/2}} + \kappa_{i3}(t)\right)\xi_i^T\xi_i. \end{aligned} \quad (55)$$

因为

$$\lambda_{\min}\{P\}\|\xi_i\|_2^2 \leq \xi_i^T P \xi_i \leq \lambda_{\max}\{P\}\|\xi_i\|_2^2, \quad (56)$$

其中:  $\lambda_{\max}\{P\}$ 、 $\lambda_{\min}\{P\}$  为  $P$  的最大、最小特征值, 且

$$\begin{aligned} \|\xi_i\|_2^2 = & \xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2 = \\ & |s_i| + 2\kappa_{i3}(t)|s_i|^{3/2} + \kappa_{i3}^2(t)s_i^2 + Z_i^2, \end{aligned} \quad (57)$$

$\|\xi_i\|_2^2$  为  $\xi_i$  的欧几里得范数, 并且有

$$|\xi_{i1}| \leq \|\xi_i\|_2 \leq \frac{V_i^{1/2}(s_i, Z_i)}{\lambda_{\min}^{1/2}\{P\}}. \quad (58)$$

所以, 由式(55)~(58)可知

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(s_i, Z_i) = & -\frac{\varepsilon_2}{|s_i|^{1/2}}\xi_i^T\xi_i - 2\varepsilon_2\kappa_{i3}(t)\xi_i^T\xi_i = \\ & -\frac{\varepsilon_2 P^{1/2}}{V_i^{1/2}(s_i, Z_i)}\xi_i^T\xi_i - \frac{2\varepsilon_2\kappa_{i3}(t)}{P}V_i(s_i, Z_i) \leq \\ & -\frac{\varepsilon_2 P^{1/2}}{P}V_i^{1/2}(s_i, Z_i) - \frac{2\varepsilon_2\kappa_{i3}(t)}{\lambda_{\max}\{P\}}V_i(s_i, Z_i) \leq \\ & -\chi_1 V_i^{1/2}(s_i, Z_i) - \chi_2 V_i(s_i, Z_i). \end{aligned} \quad (59)$$

其中  $\chi_1$ 、 $\chi_2$  分别为

$$\chi_1 = \frac{\varepsilon_2\lambda_{\min}^{1/2}\{P\}}{\lambda_{\max}\{P\}}, \quad \chi_2 = \frac{2\varepsilon_2\kappa_{i3}(t)}{\lambda_{\max}\{P\}}. \quad (60)$$

易知, 式(59)中  $V_i(s_i, Z_i)$  及式(60)中  $\chi_1$ 、 $\chi_2$  均正定, 由此可知  $\dot{V}_i(s_i, Z_i)$  负定. 根据 Lyapunov 稳定性定理, 闭环系统是渐近稳定的.  $\square$

## 4 仿真研究

为了验证所设计的分散积分滑模控制器的优越性, 本文采用不同构形的二自由度受动态约束的可重构模块机器人进行仿真研究. 其中构形 A 与构形 B 的动力学模型、期望轨迹及变量初值均沿用文献[19]进行给定. 机器人末端所受动态约束定义为一类绕确定自由度旋转的长 0.5 m、质量 4 kg 的长柱. 其中: 构形 B 由于受到外界约束限制, 关节 1 位置变量为零. 控制器参数及不确定性上界如表 1 所示(表中各变量的单位分别为:  $\rho_1^i, \hat{b}_{fi}$  (N·m·s/rad);  $k_{w0}, k_{f0}$  (N·m/rad);  $\rho_2^i, \hat{f}_{\tau i}$  (s<sup>2</sup>/rad<sup>2</sup>);  $\rho_3^i, \hat{f}_{ci}, \hat{f}_{si}, \hat{f}_{si}$  (N·m);  $c_w, c_f$  (N·m<sup>-1</sup>)).

表 1 控制器参数及不确定性上界

| 参数名称                 | 数值   | 参数名称           | 数值    | 参数名称            | 数值   |
|----------------------|------|----------------|-------|-----------------|------|
| $\rho_1^i$           | 0.3  | $\hat{b}_{fi}$ | 1.2   | $k_1$           | 100  |
| $\rho_2^i$           | 1.0  | $\hat{f}_{si}$ | 4.0   | $k_2$           | 1.0  |
| $\rho_3^i$           | 0.7  | $c_w$          | 83.5  | $\varepsilon_1$ | 0.1  |
| $\rho_4^i$           | 20   | $c_f$          | 0.089 | $\varepsilon_2$ | 0.15 |
| $\hat{f}_{\tau i}$   | 80   | $k_{w0}$       | 1.33  | $\rho_{fi}$     | 0.5  |
| $\hat{f}_{ci}$       | 3.0  | $k_{f0}$       | 8 300 | $\rho_v$        | 7.3  |
| $\varepsilon_{pn}^i$ | 0.01 | $\eta$         | 0.05  | $\varphi$       | 2.0  |

摩擦力模型参数定义如下:

$$f_{ci} = 3.5 + 0.7 \sin(10q_i) \text{ (N·m)},$$

$$f_{si} = 5 + \sin(10q_i) \text{ (N·m)},$$

$$f_{\tau i} = 100 + 20 \sin(10q_i) \text{ (s}^2/\text{rad}^2),$$

$$b_{fi} = 1.5 + 0.3 \sin(10q_i) \text{ (N·m·s/rad)}.$$

为了检验所设计的控制器的抖振抑制效果以及对期望轨迹的跟踪性能, 本文分别采用经典一阶滑模控制器(SMC)与所提出的分散积分滑模控制器(ISMC)对两组不同构形的受动态约束的可重构模块机器人进行对比仿真.

图 1、图 2 分别为采用传统一阶滑模控制器和本文提出的分散积分滑模控制器时的构形 A 的仿真曲线. 由轨迹跟踪曲线可知: 经典一阶滑模控制器在初始阶段存在明显抖振; 而采用本文提出的积分滑模控制器可以有效补偿系统初始误差, 且在短时间内获得期望的误差性能, 从而有效抑制了控制器抖振. 由跟踪误差曲线可知: 采用一阶滑模控制器可以使跟踪误差收敛, 但由于控制器不能根据实际的不确定性上界调整控制增益, 存在较大的周期性误差; 而采用本文提出的分散积分滑模控制器可以对模型不确定性进行精确补偿, 从而使系统轨迹跟踪性能得到明显改

善. 由电机输出力矩与关节估计力矩曲线可知: 当采用一阶滑模控制器时, 电机输出力矩抖振明显, 受此影响, 关节估计力矩也存在较大抖振; 而采用本文提出的分散积分滑模控制器时, 电机输出力矩和关节估计力矩抖振得到明显减弱, 达到了理想效果.

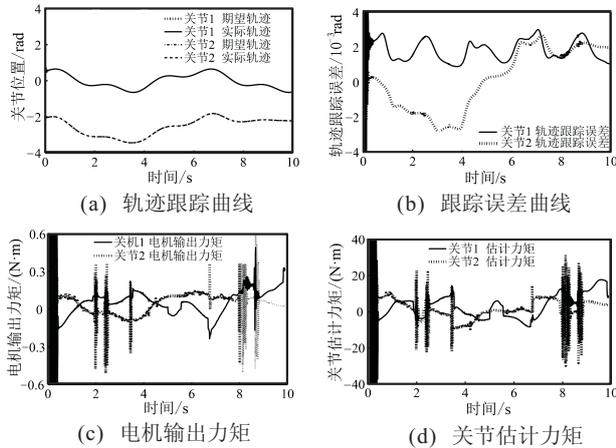


图 1 采用 SMC 的构形 A 位置及力矩曲线

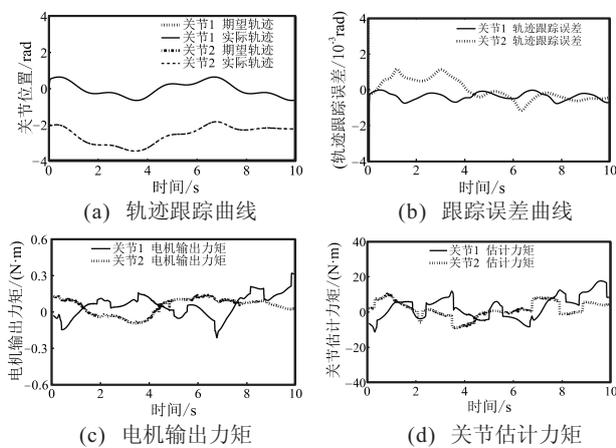


图 2 采用 ISMC 的构形 A 位置及力矩曲线

为了验证所提出的控制方法在不改变控制参数的情况下对不同构形的机器人依然有效, 本文针对可重构模块机器人构形 B 进行了同样的仿真. 由于受到外界约束影响, 构形 B 关节 1 的关节位置变量和控制力矩均为零. 由图 3、图 4 所示的仿真曲线可知, 在不

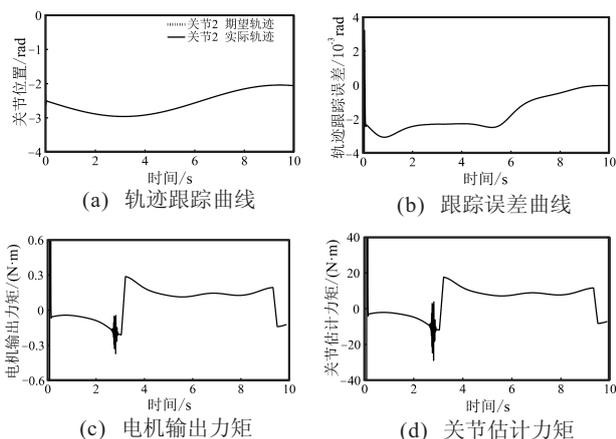


图 3 采用 SMC 的构形 B 位置及力矩曲线

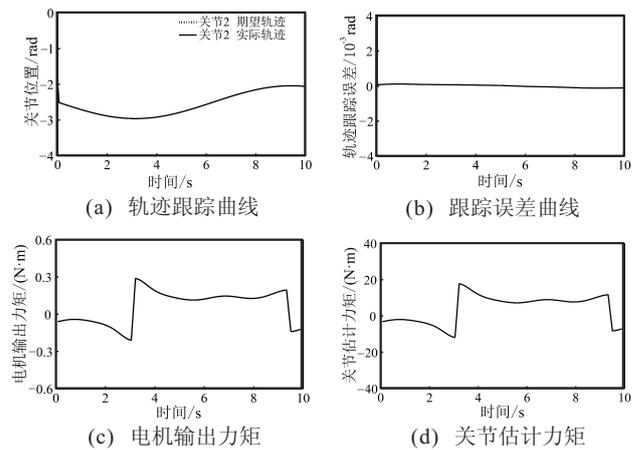


图 4 采用 ISMC 的构形 B 位置及力矩曲线

改变控制参数的条件下, 本文提出的分散控制器依然有效.

图 5 所示为采用本文提出的分散积分滑模控制器时, 两组不同机器人构形的末端约束力和末端轨迹跟踪曲线. 由该仿真曲线可知, 在机器人末端受到外界动态约束力作用的情况下, 若采用本文提出的分散控制器, 仍然可以有效地使不同构形的机器人末端执行器跟踪期望末端轨迹.

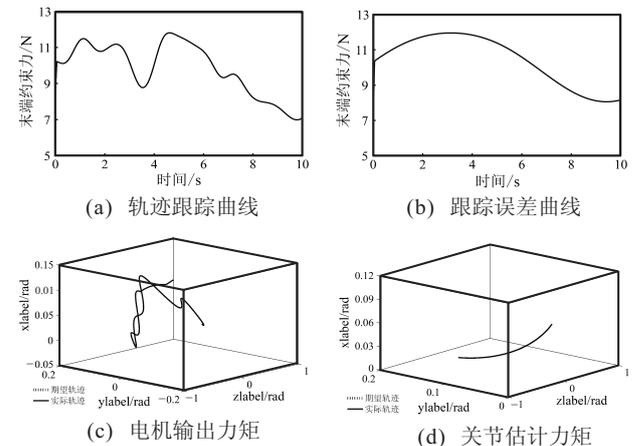


图 5 采用 ISMC 的机器人末端约束力及轨迹跟踪曲线

由上述仿真结果可知, 在无力/力矩传感器的情况下, 采用本文提出的力矩估计方法和分散控制器能够满足不同构形可重构模块机器人的可达性要求, 且达到了理想的控制效果.

## 5 结论

本文研究了受动态约束的谐波传动式可重构模块机器人轨迹跟踪问题, 提出了一种基于关节力矩反馈的分散积分滑模控制方法. 首先, 在无力/力矩传感器的条件下, 仅采用电机端和关节末端编码器的测量数据进行力矩估计, 并建立可重构模块机器人子动力学模型. 其次, 基于 VGSTA 理论设计分散积分滑模控制器, 对包含摩擦力模误差、传动力矩偏差及子系统间耦合在内的模型不确定性进行补偿并削弱了控制器抖振. 再次, 通过 Lyapunov 理论对系统的渐近

稳定性进行证明. 最后, 通过对两组不同构形的可重构模块机器人进行数值仿真, 验证了所设计的控制器的优越性.

### 参考文献(References)

- [1] Hashimoto M, Kiyosawa T, Paul R P. A torque sensing technique for robots with harmonic drives[J]. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 1993, 9(1): 108-116.
- [2] Tuttle T D, Seering W P. A nonlinear model of a harmonic drive gear transmission[J]. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 1996, 12(3): 368-374.
- [3] Kennedy C W, Desai J P. Modeling and control of the Mitsubishi pa-10 robot arm harmonic drive system[J]. *IEEE/ASME Trans on Mechatronics*, 2005, 10(3): 263-274.
- [4] Zhang H, Ahmad S, Liu G J. Modeling of torsional compliance and hysteresis behaviors in harmonic drives[J]. *IEEE/ASME Trans on Mechatronics*, 2015, 20(1): 178-184.
- [5] Curt P, Thomas R J, Deming S. A high-fidelity harmonic drive model[J]. *ASME J of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2012, 134(1): 457-461.
- [6] Albu-Schaffer A, Ott C, Hirzinger G. A unified passivity-based control framework for position, torque, and impedance control of flexible joint robots[J]. *The Int J of Robotics Research*, 2007, 26(1): 23-39.
- [7] Liu G, Abdul S, Goldenberg A A. Distributed control of modular and reconfigurable robot with torque sensing[J]. *Robotica*, 2008, 26(1): 75-84.
- [8] Liu G, Liu Y, Goldenberg A A. Design, analysis, and control of a spring-assisted modular and reconfigurable robot[J]. *IEEE/ASME Trans on Mechatronics*, 2011, 16(4): 695-706.
- [9] Zhu W. *Virtual decomposition control*[M]. New York: Springer-Verlag, 2010: 40-142.
- [10] Poznyak A, Fridman L, Bejarano F J. Mini-max integral sliding mode control for multimodel linear uncertain systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(1): 97-102.
- [11] 李鹏, 郑志强. 非线性积分滑模控制方法[J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(3): 421-426.  
(Li P, Zheng Z Q. Sliding mode control approach with nonlinear integrator[J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(3): 421-426.)
- [12] 朱明超, 李英, 李元春, 等. 基于观测器的可重构机械臂分散自适应模糊控制[J]. *控制与决策*, 2009, 24(3): 429-434.  
(Zhu M C, Li Y, Li Y C, et al. Observer-based decentralized adaptive fuzzy control for reconfigurable manipulator[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(3): 429-434.)
- [13] Li Y C, Dong B. Decentralized ADRC control for reconfigurable manipulators based on VGSTA-ESO of sliding mode[J]. *Information-An Int Interdisciplinary J*, 2012, 15(6): 2453-2465.
- [14] Dong B, Li Y C. Decentralized reinforcement learning robust optimal tracking control for time varying constrained reconfigurable modular robot based on ACI and  $Q$ -function[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013(2013): 1-16.
- [15] Li Z, Melek W W, Clark C. Decentralized robust control of robot manipulators with harmonic drive transmission and application to modular and reconfigurable serial arms[J]. *Robotica*, 2009, 27(2): 291-302.
- [16] Kircanski N M, Goldenberg A A. An experimental study of nonlinear stiffness, hysteresis, and friction effects in robot joints with harmonic drives and torque sensors[J]. *The Int J of Robotics Research*, 1997, 16(2): 214-239.
- [17] 董博, 刘克平, 李元春. 动态约束下可重构模块机器人分散强化学习最优控制[J]. *吉林大学学报: 工学版*, 2014, 44(5): 1375-1384.  
(Dong B, Liu K P, Li Y C. Decentralized reinforcement learning optimal control for time varying constrained reconfigurable modular robot[J]. *J of Jilin University: Engineering and Technology Edition*, 2014, 44(5): 1375-1384.)
- [18] Imura J, Yokokohji Y, Yoshikawa T, et al. Robust control of robot manipulators based on joint torque sensor information[J]. *The Int J of Robotics Research*, 1997, 13(5): 434-442.
- [19] Armstrong-Helouvy B, Dupont P, Canudas de Wit C. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction[J]. *Automatica*, 1994, 30(7): 1083-1138.
- [20] Liu G, Goldenberg A A, Zhang Y. Precise slow motion control of a direct-drive robot arm with velocity estimation and friction compensation[J]. *Mechatronics*, 2004, 14(7): 821-834.
- [21] Gonzalez T, Moreno J A, Fridman L. Variable gain super-twisting sliding mode control[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2100-2105.

(责任编辑: 李君玲)