

## 基于小波变换的分布式信息一致滤波算法

赵林<sup>1</sup>, 孙施浩<sup>1</sup>, 贾英民<sup>1</sup>, 解永春<sup>2</sup>

(1. 北京航空航天大学 第七研究室, 北京 100191; 2. 北京控制工程研究所 空间智能控制技术重点实验室, 北京 100190)

**摘要:** 研究一类基于小波变换的分布式信息一致滤波算法. 首先, 利用 Haar 小波变换建立目标状态及其观测在不同粗尺度下的系统模型; 然后, 基于该模型, 在不同粗尺度上分别进行分布式信息一致滤波估计; 最后, 针对不同粗尺度估计, 通过 Haar 小波逆变换重构最细尺度(初始尺度)目标状态的估计. 仿真结果表明, 所提出的算法可以有效提高分布式信息一致滤波算法的计算效率.

**关键词:** 分布式估计; 一致滤波器; 信息滤波器; 小波变换

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Wavelet transform based distributed information consensus filter

ZHAO Lin<sup>1</sup>, SUN Shi-hao<sup>1</sup>, JIA Ying-min<sup>1</sup>, XIE Yong-chun<sup>2</sup>

(1. The Seventh Research Division, Beihang University, Beijing 100191, China; 2. Science and Technology on Space Intelligent Control Laboratory, Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China. Correspondent: ZHAO Lin, E-mail: zhaolin1585@163.com)

**Abstract:** A class of wavelet transform based distributed information consensus filtering algorithm is studied. Firstly, the Haar wavelet transform is applied to establish the systems models of the target state and its observations at different coarser scales. Then, based on the above models, the consensus-based distributed information filtering is proceed at different coarser scales. Finally, the inverse Haar wavelet transform is applied to reconstruct the estimation of target state at the finest scale(initial scale) by using estimations at different coarser scales. Simulation results show that the proposed algorithm can effectively improve the computation efficiency of the consensus-based distributed information filtering algorithm.

**Keywords:** distributed estimation; consensus-based filter; information filter; wavelet transform

### 0 引言

利用大量无线传感器对某一目标状态进行分布式估计, 是无线传感器网络的主要用途之一, 目前已广泛地应用于跟踪、监测等领域. 由于无线传感器网络的节点受能量、存储、处理速度、通信带宽等限制, 且网络拓扑结构经常发生变化, 使得许多传统的多传感器估计算法, 如集中式算法<sup>[1]</sup>、分散式算法<sup>[2-3]</sup>等, 对于无线传感器网络在复杂环境中估计目标状态不再适用. 近年来, 分布式估计算法由于不需要融合中心, 每个传感器仅与邻近传感器之间进行通讯, 且具有更好的鲁棒性等优点, 引起了人们的广泛关注<sup>[4]</sup>.

基于卡尔曼滤波的分布式一致滤波算法由于收敛速度快、估计精度高而受到广泛关注<sup>[4-13]</sup>. 该算法

不依赖于某一中心传感器, 当新的传感器加入或旧的传感器出现故障时仍具有较强的自适应性. 虽然基于卡尔曼滤波的分布式一致滤波算法具有很多实现形式, 但通常包含以下两方面内容: 1) 单个传感器对目标的最优估计; 2) 邻近传感器之间交换信息的一致化处理. Saber 等<sup>[5-9]</sup>建立了卡尔曼一致滤波器的框架并对稳定性等性能进行了系统的研究. Casbeer 等<sup>[10]</sup>基于信息滤波器, 对信息矩阵和信息状态向量采用一致性协议进行处理, 并证明该方法与文献[6]中的方法得到的结果实际上是相同的. 然而, 这种融合方法的一个主要缺点是在任意两个采样区间, 各节点需要与与之相连接的节点交换多次信息来达到平均一致, 而这往往需要消耗较多的计算量和能量<sup>[11-12]</sup>.

收稿日期: 2014-12-01; 修回日期: 2015-03-04.

基金项目: 国家重点基础研究计划项目(2012CB821200, 2013CB733100); 国家自然科学基金项目(61134005, 61221061, 61327807).

作者简介: 赵林(1985-), 男, 博士生, 从事动态多尺度系统估计理论与控制的研究; 贾英民(1958-), 男, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、自适应控制、智能控制等研究.

信号的多尺度表示以及相应的小波变换可以实现有效的高速并行算法,减少计算的复杂性<sup>[14-22]</sup>.例如,Willisky<sup>[14]</sup>提出了一种双向平滑算法,可以把多尺度过程在各个尺度上的测量数据融合在一起. Hong等<sup>[16]</sup>基于小波变换提出了一种多尺度粒子滤波器,该方法通过并行运算有效提高了计算效率. Zhao等<sup>[17-18]</sup>基于Haar小波变换提出了一种鲁棒分散式估计融合算法,有效提高了传统分散式 $H_\infty$ 估计融合算法的计算效率.

本文将Haar小波变换引入卡尔曼一致性滤波算法中,针对文献[10]中给出的基于信息滤波器的分布式一致滤波算法,提出一种有效的分布式一致滤波算法.首先,利用Haar小波变换建立系统的不同粗尺度状态空间模型;然后,在不同粗尺度上并行进行分布式信息一致滤波估计;最后,通过Haar小波逆变换重构对最细尺度状态的估计.该算法通过小波变换实现了并行运算,有效地提高了文献[10]中算法的计算效率.

## 1 基于信息滤波器的分布式一致滤波算法

首先介绍图论概念及一致性理论相关的知识,并给出相关引理.

### 1.1 一致性协议

假设 $I = \{1, 2, \dots, N\}$ 为一指标集, $G = (V, E, A)$ 为一个具有 $N$ 个节点的有向图.其中: $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 为图 $G$ 的节点集合, $E \subset V \times V$ 为图 $G$ 的边集合, $A = [a_{ij}]$ 为图 $G$ 的邻接矩阵.如果节点 $v_j$ 能够从节点 $v_i$ 处获取信息,则记 $(v_i, v_j) \in E$ ,反之亦然.节点 $v_i$ 的邻集定义为 $N_i = \{v_j \in N, (v_i, v_j) \in E\}$ . $A$ 中的元素定义为:如果 $(v_i, v_j) \in E$ ,则 $a_{ij} > 0$ ;否则 $a_{ij} = 0$ .有向图 $G$ 的Laplacian矩阵 $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 定义为 $L = D_{\text{out}} - A$ .其中: $D_{\text{out}} = \text{diag}\{d_1^{\text{out}}, d_2^{\text{out}}, \dots, d_N^{\text{out}}\}$ 称为出度矩阵, $d_i^{\text{out}} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ .入度矩阵定

义为 $D_{\text{in}} = \text{diag}\{d_1^{\text{in}}, d_2^{\text{in}}, \dots, d_N^{\text{in}}\}$ , $d_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^N a_{ji}$ .如果图的任意节点的入度等于出度,则称为平衡图.如果对于两个节点 $v_i$ 和 $v_j$ ,存在有向图 $G$ 的一组边 $(v_i, v_{i_2}), (v_{i_2}, v_{i_3}), \dots, (v_{i_l}, v_j)$ ,则称从节点 $v_i$ 到 $v_j$ 有一条有向路径.如果两节点之间彼此有有向路径,则称这两个节点是强连通的;如果对于图中的任意两个节点都是强连通的,则称图是强连通的.如果存在一个节点使任意节点到这个节点都有有向路径,则称存在生成树.

假设第 $i$ 个节点的状态为 $\xi_i \in \mathbb{R}^s$ ,则定义如下用于更新节点状态的一致性协议:

$$\xi_i(\tau + 1) = \beta_{ii}(\tau)\xi_i(\tau) + \sum_{j \in N_i(\tau)} \beta_{ij}(\tau)\xi_j(\tau). \quad (1)$$

其中: $\tau$ 表示一致性迭代的步长, $\beta_{ij}(\tau)$ 表示第 $j$ 个节点的状态 $\xi_j$ 在第 $i$ 个节点处的权重, $N_i(\tau)$ 表示在 $\tau$ 时刻节点 $i$ 的邻集.由式(1)可知,节点状态的更新仅依赖于与之相连接的节点状态.

进一步,记 $\xi(\tau) = (\xi_1(\tau)^T, \xi_2(\tau)^T, \dots, \xi_N(\tau)^T)^T$ ,则式(1)可改写为

$$\xi(\tau + 1) = (B(\tau) \otimes I)\xi(\tau). \quad (2)$$

其中:矩阵 $[B(\tau)]_{ij} = \beta_{ij}(\tau)$ , $I$ 为具有相应维数的单位阵, $\otimes$ 表示矩阵Kronecker乘积.

针对一致性协议(2),下面的引理将给出保证节点状态达到平均一致性的充分条件.

**引理1<sup>[13]</sup>** 对于一致性协议(2),如果矩阵 $B(\tau)$ 满足以下条件:1)  $\sum_{j=1}^N \beta_{ij}(\tau) = 1$ ; 2)  $\sum_{i=1}^N \beta_{ij}(\tau) = 1$ ; 3)  $\beta_{ii}(\tau) > 0$ ; 4)  $\beta_{ij}(\tau)$ 有一致的上界和下界.而且当存在常数 $T_p \geq 0$ 使得对于任意的区间 $[\tau, \tau + T_p]$ 内的所有图的并是强连通的.则节点的状态可以渐近达到平均一致,即

$$\begin{aligned} \xi_i(\tau) &\rightarrow \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j(0), \\ \tau &\rightarrow \infty, \forall i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

引理1表明,每个节点通过与其相邻的节点进行信息交换,可以达到全部节点初始状态的平均值.这里 $\beta_{ij}(\tau)$ 通常选为Metropolis权重<sup>[11-12]</sup>,即

$$\beta_{ij}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \max\{d_i(\tau), d_j(\tau)\}}, & (i, j) \in E(\tau); \\ 1 - \sum_{s \in N_i(\tau)} \beta_{is}(\tau), & i = j; \\ 0, & \text{others.} \end{cases} \quad (4)$$

因此,式(1)可进一步改写为

$$\begin{aligned} \xi_i(\tau + 1) &= \\ \xi_i(\tau) &+ \sum_{j \in N_i(\tau)} \beta_{ij}(\tau)(\xi_j(\tau) - \xi_i(\tau)). \end{aligned} \quad (5)$$

### 1.2 系统与算法描述

应用 $N$ 个无线传感器对某一目标系统进行分布式状态估计,其中目标系统的状态方程为

$$x_{k+1} = Ax_k + Bw_k. \quad (6)$$

假设 $N$ 个传感器组成的无线传感器网络可以表示为1.1节中定义的有向强连通图

$$G = (V, E, A).$$

其中:  $V$  为传感器的节点集,  $E$  为传感器的边集,  $A$  为该网络的邻接矩阵. 假设每个传感器都能对系统 (6) 的状态进行测量, 即

$$y_k^i = C^i x_k + v_k^i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad y_k^i \in \mathbb{R}^p. \quad (7)$$

其中:  $x_k \in \mathbb{R}^n$  为目标系统状态向量,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为具有恰当维数的系统矩阵. 系统噪声  $w_k$  和测量噪声  $v_k$  均为零均值高斯白噪声过程且分别具有已知的协方差矩阵  $Q$  和  $R^i, i = 1, 2, \dots, N$ .

基于信息滤波器的一致滤波算法, 将一致性算法与基于信息滤波器的卡尔曼滤波算法相融合, 通过一致性滤波器对节点信息矩阵与信息状态向量进行融合. 每个节点从邻居节点接收信息矩阵和信息状态向量, 从而使得每个节点对状态的估计值都将趋于一致<sup>[23]</sup>.

首先给出 Kalman 滤波的信息形式. 定义 Fisher 信息矩阵  $Y_{k|k}^i$  和信息状态向量  $\hat{y}_{k|k}^i$  为

$$\begin{cases} Y_{k|k}^i = (P_{k|k}^i)^{-1}, \\ \hat{y}_{k|k}^i = (P_{k|k}^i)^{-1} \hat{x}_{k|k}^i = Y_{k|k}^i \hat{x}_{k|k}^i. \end{cases} \quad (8)$$

其中:  $\hat{x}_{k|k}^i$  为  $k$  时刻第  $i$  个传感器滤波器的状态估计,  $P_{k|k}^i$  为相应的误差协方差矩阵.

下面给出分布式信息一致滤波算法<sup>[10]</sup>.

假设网络节点同步 (信息通讯与滤波在同一时间执行). 若已知  $k-1$  时刻各节点的信息矩阵  $Y_{k-1|k-1}^i$  和信息状态向量  $\hat{y}_{k-1|k-1}^i$ , 则系统 (6) 和 (7) 的分布式估计融合步骤如下.

1) 各传感器滤波器获取信息形式的滤波估计

$$\begin{cases} \hat{y}_{k|k-1}^i = \\ Y_{k|k-1}^i A (Y_{k-1|k-1}^i)^{-1} \hat{y}_{k-1|k-1}^i, \\ Y_{k|k-1}^i = \\ [A (Y_{k-1|k-1}^i)^{-1} A^T + B Q B^T]^{-1}, \\ \hat{y}_{k|k}^i = \hat{y}_{k|k-1}^i + C^i T R^{i,-1} y_k^i, \\ Y_{k|k}^i = Y_{k|k-1}^i + C^i T R^{i,-1} C^i. \end{cases} \quad (9)$$

2) 对各传感器的信息矩阵和信息状态向量进行平均一致性更新, 即

$$\tau \rightarrow \tau + T_c, \quad (10)$$

$$\begin{cases} \hat{y}_{k|k}^i(\tau + 1) = \\ \hat{y}_{k|k}^i(\tau) + \sum_{j \in N_i(\tau)} \beta_{ij}(\tau) (\hat{y}_{k|k}^j(\tau) - \hat{y}_{k|k}^i(\tau)), \\ Y_{k|k}^i(\tau + 1) = \\ Y_{k|k}^i(\tau) + \sum_{j \in N_i(\tau)} \beta_{ij}(\tau) (Y_{k|k}^j(\tau) - Y_{k|k}^i(\tau)). \end{cases} \quad (11)$$

其中:  $T_c$  表示为达到平均一致而执行的迭代次数,  $\beta_{ij}(\tau)$  为式(4)中给出的权重.

**注 1** 在上述分布式估计融合算法步骤 2) 中, 执行  $T_c$  次一致性迭代后的信息矩阵  $Y_{k|k}^i(T_c)$  和信息状态向量  $\hat{y}_{k|k}^i(T_c)$  即为各节点时刻的结果, 也是用于下一次迭代的信息量; 而由式 (8) 可知, 目标状态为  $x_{k|k}^i = (Y_{k|k}^i(T_c))^{-1} \hat{y}_{k|k}^i(T_c)$ . 这种融合方法在任意两个采样区间, 各节点需要与与之相连接的节点交换  $T_c$  次信息来达到平均一致, 这往往需要消耗较多的计算量和能量<sup>[11-12]</sup>.

## 2 基于小波变换的分布式信息一致滤波算法

### 2.1 离散序列的小波变换

对于离散序列的小波变换而言, 近似系数为离散序列的低频成分, 而细节系数为离散序列的高频成分. 在某尺度  $j$  上, 对于给定的离散序列  $a_{j,n} \in l_2$ , 通过低通滤波器并进行二倍的下采样可以得到近似系数

$$a_{j+1,k} = \sum_n h_{n-2k} a_{j,n}. \quad (12)$$

信号  $a_{j,n}$  在低通滤波器丢失的部分可以由  $a_{j,n}$  通过高通滤波器得到细节系数

$$\delta a_{j+1,k} = \sum_n g_{n-2k} a_{j,n}. \quad (13)$$

原信号  $a_{j,n}$  可由近似系数和细节系数完全重构, 即

$$a_{j,n} = \sum_k h_{n-2k} a_{j+1,k} + \sum_k g_{n-2k} \delta a_{j+1,k}, \quad (14)$$

其中  $h_n$ 、 $g_n$  分别为低通和高通滤波器系数.

本文只研究基于 Haar 小波变换的分布式信息一致滤波算法. 离散序列的 Haar 小波变换可由下式给出<sup>[22]</sup>:

$$\begin{cases} a_{j+1,k} = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_{j,2k} + a_{j,2k+1}), \\ \delta a_{j+1,k} = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_{j,2k} - a_{j,2k+1}). \end{cases} \quad (15)$$

记  $j = 0, 1, \dots, J$ , 其中  $0, J$  分别代表最细 (初始) 和最粗尺度. 另记  $k_j$  为尺度  $j$  上的采样序列, 且令  $k_j = 2^{J-j} k_J + 2^{J-j} - 1$ , 则式 (15) 可以改写为

$$\begin{cases} a_{j+1,k_{j+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_{j,k_j-1} + a_{j,k_j}), \\ \delta a_{j+1,k_{j+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_{j,k_j-1} - a_{j,k_j}). \end{cases} \quad (16)$$

在尺度  $j$  上定义如下数据块:

$$\begin{cases} A(k_j) = \\ [a_{j,k_j-2^{J-j}+1}, a_{j,k_j-2^{J-j}+2}, \dots, a_{j,k_j}]^T, \\ \delta A(k_j) = \\ [\delta a_{j,k_j-2^{J-j}+1}, \delta a_{j,k_j-2^{J-j}+2}, \dots, \delta a_{j,k_j}]^T, \end{cases} \quad (17)$$

则该数据块的小波变换可表示为

$$\begin{cases} A(k_{j+1}) = H^{j+1}A(k_j), \\ \delta A(k_{j+1}) = G^{j+1}A(k_j). \end{cases} \quad (18)$$

其中:  $H^{j+1} \in \mathbb{R}^{2^{j-j-1} \times 2^{j-j}}$ ,  $G^{j+1} \in \mathbb{R}^{2^{j-j-1} \times 2^{j-j}}$  是由 Haar 小波滤波器系数组成的低通和高通滤波算子. 将数据块  $X(k_j)$  通过 Haar 小波分解  $J-j$  尺度, 有

$$\begin{bmatrix} A(k_j) \\ \delta A(k_j) \\ \vdots \\ \delta A(k_{j+1}) \end{bmatrix} = T^{J|j} A(k_j), \quad (19)$$

$$T^{J|j} = \begin{bmatrix} H^J H^{J-1} \dots H^{j+1} \\ G^J H^{J-1} \dots H^{j+1} \\ \vdots \\ G^{J+1} \end{bmatrix} \text{ 为一正交变换矩阵.}$$

## 2.2 基于小波变换的系统模型与算法描述

首先, 将系统模型 (6) 和 (7) 写成如下多尺度形式:

$$\begin{cases} x_{0,k_0+1} = Ax_{0,k_0} + Bw_{0,k_0}, \\ y_{0,k_0}^i = C^i x_{0,k_0} + v_{0,k_0}^i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (20)$$

其中: 左下角下标代表尺度, 右下角下标代表采样时间, 上标代表第  $i$  个无线传感器. 定义

$$A^{(j)} = A^{2^j},$$

$$B^{(j)} = (I + A^{2^{j-1}})(I + A^{2^{j-2}}) \dots (I + A) = \sum_{i=0}^{2^j-1} A^i,$$

$$A^{(0)} = A, \quad B^{(0)} = I. \quad (21)$$

**定理 1** 基于 Haar 小波变换, 尺度  $j$  上近似系数的系统模型为

$$\begin{cases} x_{j,k_j+1} = A^{(j)}x_{j,k_j} + B^{(j)}Bw_{j,k_j}, \\ y_{j,k_j}^i = C^i x_{j,k_j} + v_{j,k_j}^i. \end{cases} \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} Bw_{j,k_j} &= \frac{(B^{(j)})^{-1}}{\sqrt{2}} [A^{(j-1)}B^{(j-1)}Bw_{j-1,k_{j-1}+1} + \\ & (I + A^{(j-1)})B^{(j-1)}Bw_{j-1,k_{j-1}} + \\ & B^{(j-1)}Bw_{j-1,k_{j-1}+1}], \\ E\{w_{j,k_j}\} &= 0, \quad E\{w_{j,k_j}w_{j,k_j}^T\} = Q_j, \\ E\{v_{j,k_j}^i\} &= 0, \quad E\{v_{j,k_j}^i v_{j,k_j}^{i,T}\} = R^i, \\ E\{w_{j,k_j}v_{j,k_j}^{i,T}\} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

这里

$$\begin{aligned} Q_j &= \frac{1}{2} \{ [B^+(B^{(j)})^{-1}A^{(j-1)}B^{(j-1)}B]Q_{j-1}[B^+ \times \\ & (B^{(j)})^{-1}A^{(j-1)}B^{(j-1)}B]^T + [B^+(B^{(j)})^{-1}(I + \\ & A^{(j-1)}B^{(j-1)}D)]Q_{j-1}[B^+(B^{(j)})^{-1}(I + \\ & A^{(j-1)}B^{(j-1)}B]^T + [B^+(B^{(j)})^{-1}B^{(j-1)}B] \times \\ & Q_{j-1}[B^+(B^{(j)})^{-1}B^{(j-1)}B]^T \}, \\ B^+ &= (B^T B)^{-1}B^T, \quad Q_0 = Q. \end{aligned}$$

尺度  $j$  上细节系数的系统模型为

$$\begin{cases} \delta x_{j,k_j+1} = A^{(j)}\delta x_{j,k_j} + B^{(j)}B\bar{w}_{j,k_j}, \\ \delta y_{j,k_j}^i = C^i \delta x_{j,k_j} + \delta v_{j,k_j}^i. \end{cases} \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} B\bar{w}_{j,k_j} &= \frac{(B^{(j)})^{-1}}{\sqrt{2}} [A^{(j-1)}B^{(j-1)}Bw_{j-1,k_{j-1}+1} + \\ & (I - A^{(j-1)})B^{(j-1)}Bw_{j-1,k_{j-1}} - \\ & B^{(j-1)}Bw_{j-1,k_{j-1}+1}]; \\ E\{\bar{w}_{j,k_j}\} &= 0, \quad E\{\bar{w}_{j,k_j}\bar{w}_{j,k_j}^T\} = \bar{Q}_j, \\ E\{\delta v_{j,k_j}^i\} &= 0, \quad E\{\delta v_{j,k_j}^i \delta v_{j,k_j}^{i,T}\} = R^i, \\ E\{\bar{w}_{j,k_j} \delta v_{j,k_j}^{i,T}\} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

这里

$$\begin{aligned} \bar{Q}_j &= \frac{1}{2} \{ [B^+(B^j)^{-1}A^{(j-1)}B^{(j-1)}B]\bar{Q}_{j-1} \times \\ & [B^+(B^j)^{-1}A^{(j-1)}B^{(j-1)}B]^T + [B^+(B^j)^{-1}(I - \\ & A^{(j-1)})B^{(j-1)}B]\bar{Q}_{j-1}[B^+(B^j)^{-1}(I - A^{(j-1)}) \times \\ & B^{(j-1)}B]^T + [B^+(B^j)^{-1}B^{(j-1)}B]\bar{Q}_{j-1} \times \\ & [B^+(B^j)^{-1}B^{(j-1)}B]^T \}, \quad \bar{Q}_0 = Q. \end{aligned}$$

**证明** 为了建立不同尺度分解系数的系统模型, 需用到数学归纳法. 尺度 0 上的模型已由式 (20) 给出, 则基于 Haar 小波变换, 可得尺度 1 上近似系数和细节系数的状态系统模型分别为

$$\begin{aligned} x_{1,k_1+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (x_{0,k_0+1} + x_{0,k_0+2}) = \\ & \frac{\sqrt{2}}{2} (A^2 x_{0,k_0-1} + ABw_{0,k_0-1} + Bw_{0,k_0} + \\ & A^2 x_{0,k_0} + ABw_{0,k_0} + Bw_{0,k_0+1}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A^2 x_{1,k_1} + (I + A) B w_{1,k_1} = \\
& A^{(1)} x_{1,k_1} + B^{(1)} B w_{1,k_1}, \\
& \delta x_{1,k_1+1} = \\
& \frac{\sqrt{2}}{2} (x_{0,k_0+1} - x_{0,k_0+2}) = \\
& \frac{\sqrt{2}}{2} (A^2 x_{0,k_0-1} + A B w_{0,k_0-1} + B w_{0,k_0} - \\
& A^2 x_{0,k_0} - A B w_{0,k_0} - B w_{0,k_0+1}) = \\
& A^2 x_{1,k_1} + (I + A) B \bar{w}_{1,k_1} = \\
& A^{(1)} x_{1,k_1} + B^{(1)} B \bar{w}_{1,k_1}. \tag{26}
\end{aligned}$$

观测模型可分别由如下变换得到:

$$\begin{aligned}
y_{1,k_1}^{i,0} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (y_{0,k_0-1}^i + y_{0,k_0}^i) = \\
& C^i x_{1,k_1} + v_{1,k_1}^i, \\
\delta y_{1,k_1}^{i,0} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (y_{0,k_0-1}^i - y_{0,k_0}^i) = \\
& C^i \delta x_{1,k_1} + v_{1,k_1}^i. \tag{27}
\end{aligned}$$

且由期望的线性性质可得

$$\begin{aligned}
& E\{w_{1,k_1}\} = 0, E\{w_{1,k_1} w_{1,k_1}^T\} = Q_1, \\
& E\{v_{1,k_1}^i\} = 0, E\{v_{1,k_1}^i v_{1,k_1}^{i,T}\} = R^i, \\
& E\{w_{1,k_1} v_{1,k_1}^{i,T}\} = 0; \\
& E\{\bar{w}_{1,k_1}\} = 0, E\{\bar{w}_{1,k_1} \bar{w}_{1,k_1}^T\} = \bar{Q}_1, \\
& E\{\delta v_{1,k_1}^i\} = 0, E\{\delta v_{1,k_1}^i \delta v_{1,k_1}^{i,T}\} = R^i, \\
& E\{\bar{w}_{1,k_1} \delta v_{1,k_1}^{i,T}\} = 0.
\end{aligned}$$

假设尺度  $j-1$  上分解系数的系统模型满足式 (22) 和 (24), 则尺度  $j$  上的系统模型可由如下递推关系式得到:

$$\begin{aligned}
x_{j,k_j+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (x_{j-1,k_{j-1}+1} + x_{j-1,k_{j-1}+2}) = \\
& A^{(j)} x_{j,k_j} + B^{(j)} B w_{j,k_j}, \\
\delta x_{j,k_j+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (x_{j-1,k_{j-1}+1} - x_{j-1,k_{j-1}+2}) = \\
& A^{(j)} x_{j,k_j} + B^{(j)} B \bar{w}_{j,k_j}. \tag{28}
\end{aligned}$$

同样, 也可类似得出  $y_{j,k_j}^i$  和  $\delta y_{j,k_j}^i$ . 由期望的线性性质即可得到定理 1 中的期望和方差关系.  $\square$

**注 2** 定理 1 中的  $y_{j,k_j}^i$  可看作尺度  $j$  上近似系数的第  $i$  个传感器的信息,  $\delta y_{j,k_j}^i$  可看作尺度  $j$  上细节系数的第  $i$  个传感器的信息, 它们实际上都是由最细尺度 0 上第  $i$  个传感器的信息通过如同式 (16) 的 Haar 小波分解得到的.

下面给出基于小波变换的分布式信息一致滤波算法.

1) 基于定理 1 建立尺度  $J$  上近似系数的系统模型 (22), 以及尺度  $1, 2, \dots, J$  上细节系数的系统模型 (24).

2) 对尺度  $J$  上近似系数以及尺度  $1, 2, \dots, J$  上细节系数的系统模型进行如式 (9)~(11) 中的分布式信息一致滤波估计.

尺度  $J$  上近似系数的分布式信息一致滤波估计为

$$\begin{cases}
\hat{y}_{J,k_J|k_{J-1}}^i = \\
Y_{J,k_J|k_{J-1}}^i A^{(J)} (Y_{J,k_{J-1}|k_{J-1}}^i)^{-1} \hat{y}_{J,k_{J-1}|k_{J-1}}^i, \\
Y_{J,k_J|k_{J-1}}^i = \\
[A^{(J)} (Y_{J,k_{J-1}|k_{J-1}}^i)^{-1} (A^{(J)})^T + \\
B^{(J)} B Q_J (B^{(J)} B)^T]^{-1}, \\
\hat{y}_{J,k_J|k_J}^i = \hat{y}_{J,k_J|k_{J-1}}^i + C^{i,T} R^{i,-1} y_{J,k_J}^i, \\
Y_{J,k_J|k_J}^i = Y_{J,k_J|k_{J-1}}^i + C^{i,T} R^{i,-1} C^i;
\end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases}
\hat{y}_{J,k_J|k_J}^i(\tau+1) = \\
\hat{y}_{J,k_J|k_J}^i(\tau) + \\
\sum_{s \in N_i(\tau)} \beta_{is}(\tau) (\hat{y}_{J,k_J|k_J}^s(\tau) - \hat{y}_{J,k_J|k_J}^i(\tau)), \\
Y_{J,k_J|k_J}^i(\tau+1) = \\
Y_{J,k_J|k_J}^i(\tau) + \\
\sum_{s \in N_i(\tau)} \beta_{is}(\tau) (Y_{J,k_J|k_J}^s(\tau) - Y_{J,k_J|k_J}^i(\tau));
\end{cases} \tag{30}$$

$$\hat{x}_{J,k_J|k_J}^i = (Y_{J,k_J|k_J}^i)^{-1} \hat{y}_{J,k_J|k_J}^i. \tag{31}$$

尺度  $j(j = 1, 2, \dots, J)$  上细节系数的分布式信息一致滤波估计为

$$\begin{cases}
\delta \hat{y}_{j,k_j|k_{j-1}}^i = \\
\delta Y_{j,k_j|k_{j-1}}^i A^{(j)} (\delta Y_{j,k_{j-1}|k_{j-1}}^i)^{-1} \delta \hat{y}_{j,k_{j-1}|k_{j-1}}^i, \\
\delta Y_{j,k_j|k_{j-1}}^i = \\
[A^{(j)} (\delta Y_{j,k_{j-1}|k_{j-1}}^i)^{-1} (A^{(j)})^T + \\
B^{(j)} B \bar{Q}_j (B^{(j)} B)^T]^{-1}, \\
\delta \hat{y}_{j,k_j|k_j}^i = \delta \hat{y}_{j,k_j|k_{j-1}}^i + C^{i,T} R^{i,-1} y_{j,k_j}^i, \\
\delta Y_{j,k_j|k_j}^i = \delta Y_{j,k_j|k_{j-1}}^i + C^{i,T} R^{i,-1} C^i;
\end{cases} \tag{32}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \delta \hat{y}_{j,k_j|k_j}^i(\tau+1) = & \\ & \delta \hat{y}_{j,k_j|k_j}^i(\tau) + \\ & \sum_{s \in N_i(\tau)} \beta_{is}(\tau) (\delta \hat{y}_{j,k_j|k_j}^s(\tau) - \delta \hat{y}_{j,k_j|k_j}^i(\tau)), \\ \delta Y_{j,k_j|k_j}^i(\tau+1) = & \\ & \delta Y_{j,k_j|k_j}^i(\tau) + \\ & \sum_{s \in N_i(\tau)} \beta_{is}(\tau) (\delta Y_{j,k_j|k_j}^s(\tau) - \delta Y_{j,k_j|k_j}^i(\tau)); \end{aligned} \right. \quad (33)$$

$$\delta \hat{x}_{j,k_j|k_j}^i = (\delta Y_{j,k_j|k_j}^i)^{-1} \delta \hat{y}_{j,k_j|k_j}^i. \quad (34)$$

3) 利用式(19)重构最细尺度0上的估计.

定义

$$\left\{ \begin{aligned} X(k_J) = & \hat{x}_{J,k_J|k_J}, \\ \delta X(k_j) = & \\ & [\delta \hat{x}_{j,k_j-2^{J-j+1}|k_j-2^{J-j+1}}^T, \\ & \delta \hat{x}_{j,k_j-2^{J-j+2}|k_j-2^{J-j+2}}^T, \dots, \delta \hat{x}_{j,k_j|k_j}^T]^T, \\ X(k_0) = & \\ & [\hat{x}_{0,k_0-2^J+1|k_0-2^J+1}^T, \\ & \hat{x}_{0,k_0-2^J+2|k_0-2^J+2}^T, \dots, \hat{x}_{0,k_0|k_0}^T]^T, \end{aligned} \right. \quad (35)$$

则可得最细尺度0上的估计为

$$X(k_0) = (T^{J|0})^T \begin{bmatrix} X(k_J) \\ \delta X(k_J) \\ \vdots \\ \delta X(k_1) \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$\text{其中 } T^{J|0} = \begin{bmatrix} H^J H^{J-1} \dots H^1 \\ G^J H^{J-1} \dots H^1 \\ \vdots \\ G^{J+1} \end{bmatrix} \text{ 为一正交变换矩阵.}$$

整个算法的框图如图1所示(图1中假设分解尺度为1,无线传感器个数为3)

**注3** 由Haar小波变换的性质可知,上述算法步骤2)中尺度 $J$ 上近似系数与尺度 $1, 2, \dots, J$ 上细节系数的分布式信息一致滤波过程可并行进行,即通过Haar小波变换将文献[10]中分布式信息一致滤波过程分解为 $J+1$ 个并行的滤波过程.假设需要进行 $N$ 步滤波,则文献[10]中分布式信息一致滤波算法的计算数量为 $O(NT_c)$ ,而基于小波变换的分布式信息一致滤波算法的并行过程中最大的计算数量为 $O((N/2)T_c)$ ,是原算法计算数量的1/2,因而可有效提高文献[10]中算法的计算效率,节省计算时间.

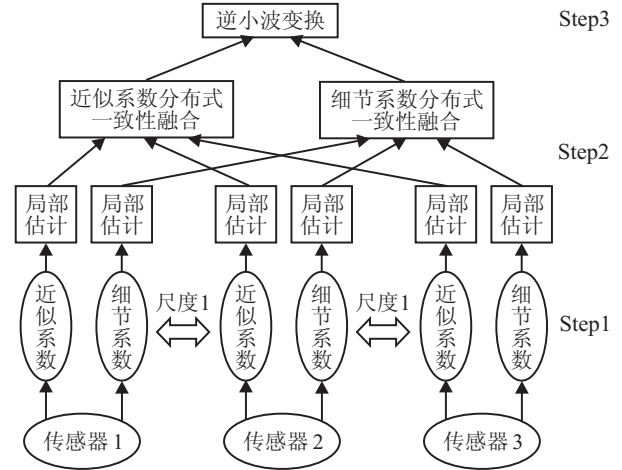


图1 基于小波变换的分布式信息一致滤波算法框图

### 3 仿真算例

为验证本文所提出算法的有效性,考虑如下3维近常速度运动模型(近CV模型):

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + B\mathbf{w}_k. \quad (37)$$

其中:  $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}]^T$ ,  $(x, y, z)$  和  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  分别为位置和速度分量;而

$$A = \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \bar{B} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{B} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{B} \end{bmatrix},$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

为系统矩阵.假设使用3个无线传感器跟踪此目标,且3个传感器之间的通讯拓扑结构如图2所示.另外,每个传感器只能测量到目标状态的位置分量,即

$$\mathbf{y}_k^i = C^i \mathbf{x}_k + v_k^i, \quad (38)$$

其中

$$C^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

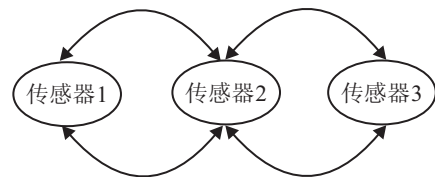


图2 无线传感器之间的通讯拓扑结构

在仿真中,选取采样周期为 $T = 1\text{s}$ ,过程噪声的协方差矩阵为 $Q = \text{diag}\{4, 4, 4\}$ ,观测噪声的协方差矩阵为 $R^1 = \text{diag}\{16, 16, 16\}$ , $R^2 = \text{diag}\{9, 9, 9\}$ , $R^3 = \text{diag}\{25, 25, 25\}$ .模型初始位置为 $(300, 300, 300)\text{m}$ ,初始速度为 $(1, 1, 1)\text{m/s}$ .

下面, 将通过仿真对比以下 3 种算法的性能: 1) 基于单传感器的卡尔曼滤波算法(KF); 2) 本文提出的基于小波变换的分布式信息一致滤波算法(WT-DICF); 3) 分布式信息一致滤波算法(DICF)<sup>[10]</sup>. 在仿真中, 对 KF 算法只应用传感器 1 的观测, 对 WT-DICF 算法和 DICF 算法选取执行平均一致的迭代次数  $T_c = 20$ . 另外, 针对 WT-DICF 算法, 选取最粗分解尺度  $J = 1$ . 为了定义性能的优劣, 令  $(x_k^i, y_k^i, z_k^i)$  和  $(\hat{x}_k^i, \hat{y}_k^i, \hat{z}_k^i)$  分别为在第  $i$  次蒙特卡洛仿真下的真实和估计的目标状态. 假设共进行  $M$  次蒙特卡洛仿真, 则状态在时刻  $k$  的根均方误差 (RMSE) 可计算为

$$RMSE_k =$$

$$\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [(x_k^i - \hat{x}_k^i)^2 + (y_k^i - \hat{y}_k^i)^2 + (z_k^i - \hat{z}_k^i)^2]}.$$

表 1 给出了 3 种算法下的根均方误差 (ARMSE) (这里 ARMSE 是通过计算 RMSE 的平均得到的); 表 2 给出了不同仿真时间下 1 次蒙特卡洛仿真的 CPU 运行时间 (分别在 100 s、200 s 和 300 s 仿真时间下进行了对比).

表 1 3 种算法下的根均方误差 (ARMSE) 及 1 次蒙特卡洛仿真时间

算法	$x$	$y$	$z$	$\alpha$	$\dot{x}$	$\dot{y}$	$\dot{z}$	$\dot{\alpha}$
KF	2.89	2.21	2.54	5.18	1.86	2.42	2.03	4.02
WT-DICF	1.57	1.80	1.71	3.54	1.56	2.01	1.79	3.45
DICF	1.42	1.84	1.47	2.95	1.57	2.00	1.77	3.44

表 2 1 次蒙特卡洛仿真的 CPU 运行时间

算法	CPU-时间/100s	CPU-时间/200s	CPU-时间/300s
KF	0.0047	0.0070	0.0125
WT-DICF	0.0232	0.0499	0.0745
DICF	0.0438	0.0950	0.1421

图 3 和图 4 分别是 3 种算法下位置分量的 RMSE 和速度分量的 RMSE.

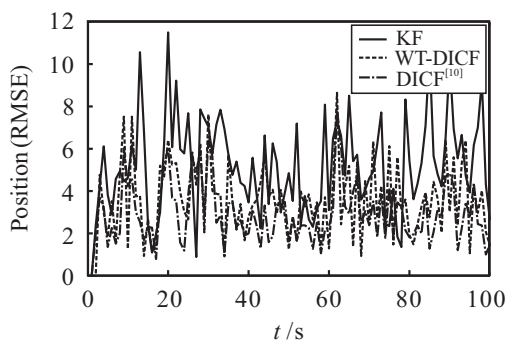


图 3 位置分量的 RMSE

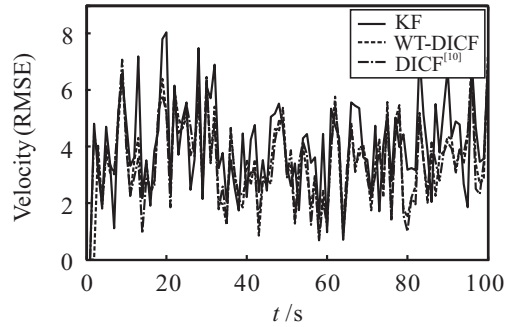


图 4 速度分量的 RMSE

通过表 1、表 2 和图 3、图 4 可以看出, WT-DICF 算法和 DICF 算法的性能都优于 KF 算法, 这主要是由于 KF 算法是基于单传感器的估计, 而 WT-DICF 算法和 DICF 算法是基于多传感器的分布式融合估计. 另外, 尽管 DICF 算法的估计性能略优于 WT-DICF 算法, 但 CPU 运行时间却是 WT-DICF 算法的 2 倍, 这符合本文注 3 中的分析. 由此可以看出, 本文所提出的基于小波变换的分布式信息一致滤波算法可以看成是 KF 算法和 DICF 算法间的一种折中算法, 虽然牺牲了一定的估计精度, 但大幅度地提高了 DICF 算法的计算效率.

## 4 结 论

本文提出了一种有效的基于小波变换的分布式信息一致滤波算法. 通过 Haar 小波变换将传统初始尺度的分布式一致滤波过程转换到不同分解尺度上, 以实现不同分解尺度上的并行运算. 仿真结果表明, 与文献 [10] 中的分布式信息一致滤波算法相比, 本文所提出的分布式信息一致滤波算法虽然牺牲了一定的估计精度, 但能够大幅度提高文献 [10] 中算法的计算效率.

## 参考文献(References)

- [1] 韩崇昭, 朱洪艳, 段战胜, 等. 多源信息融合[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2010: 252-254.  
(Han C Z, Zhu H Y, Duan Z S, et al. Multi-sources information fusion[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2010: 252-254.)
- [2] Rao B S Y, Durrant-Whyte H F, Sheen J A. A fully decentralized multi-sensor system for tracking and surveillance[J]. The Int J of Robotics Research, 1993, 12(1): 20-44.
- [3] Iftar A. Decentralized estimation and control with overlapping input, state and output decomposition[J]. Automatica, 1993, 29(2): 511-516.
- [4] 杨文, 侍洪波, 汪小帆. 卡尔曼一致滤波算法综述[J]. 控制与决策, 2011, 26(4): 481-488.  
(Yang W, Shi H B, Wang X F. A survey of consensus based

- Kalman filtering algorithm[J]. *Control and Decision*, 2011, 26(4): 481-488.)
- [5] Saber R O, Shamma J S. Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion[C]. *Proc of IEEE Conf on Decision and Control*. Seville: IEEE Press, 2005: 6698-6703.
- [6] Saber R O. Distributed Kalman filter with embedded consensus filters[C]. *Proc of IEEE Conf on Decision and Control*. Seville: IEEE Press, 2005: 8179-8184.
- [7] Saber R O. Distributed tracking for mobile sensor networks with information-driven mobility[C]. *Proc of American Control Conf*. New York: IEEE Press, 2007: 4606-4612.
- [8] Saber R O. Distributed Kalman filtering for sensor networks[C]. *Proc of IEEE Conf on Decision and Control*. New Orleans: IEEE Press, 2007: 5492-5498.
- [9] Saber R O. Kalman-consensus filter: Optimality, stability and performance[C]. *Proc of IEEE Conf on Decision and Control*. Shanghai: IEEE Press, 2009: 7032-7046.
- [10] Casbeer D W, Beard R. Distributed information filtering using consensus filters[C]. *Proc of American Control Conf*. Saint Louis: IEEE Press, 2009: 1882-1887.
- [11] Li W L, Jia Y M. Consensus-based distributed multiple model UKF for jump Markov nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2012, 57(1): 230-236.
- [12] Li W L, Jia Y M. Consensus-based distributed information filter for a class of jump Markov systems[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2011, 5(10): 1214-1222.
- [13] Kingston D B, Beard R W. Discrete-time average-consensus under switching network topologies[C]. *Proc of American Control Conf*. Minneapolis: IEEE Press, 2006: 3551-3556.
- [14] Willsky A S. Multiresolution Markov models for signal and image processing[J]. *Proc of the IEEE*, 2002, 90(8): 1396-1458.
- [15] Stephanopoulos G, Karsligil O, Dyer M S. Multiscale theory for linear dynamic processes, Part 1: Foundation[J]. *Computers & Chemical Engineering*, 2008, 32(4/5): 857-884.
- [16] Hong L, Wicker D A. Spatial-domain multi-resolutional particle filter with thresholded wavelets[J]. *Signal Processing*, 2007, 87(6): 1384-1401.
- [17] Zhao L, Jia Y M. Robust transcale state estimation for multiresolution discrete time systems based on wavelet transform[J]. *IET Signal Processing*, 2013, 7(3): 228-238.
- [18] Zhao L, Jia Y M, Xie Y C. Robust transcale decentralized estimation fusion for multisensor systems based on wavelet packet decomposition[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2014, 8(8): 585-597.
- [19] Zhao L, Jia Y M. Transcale LQG tracking control for a class of discrete stochastic systems[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2014, 30: 129-136.
- [20] 潘泉, 张磊, 崔培玲, 等. 动态多尺度系统估计理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 54-64.  
(Pan Q, Zhang L, Cui P L, et al. Estimation theory and applications of dynamic multiscale systems[M]. Beijing: Science Press, 2007: 54-64.)
- [21] 文成林, 周东华. 多尺度估计理论及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 141-169.  
(Wen C L, Zhou D H. Multiscale estimation theory and applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 141-169.)
- [22] 彭玉华. 小波变换与工程应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999: 51-54.  
(Peng Y H. Wavelet transform and engineering applications[M]. Beijing: Science Press, 1999: 51-54.)
- [23] 李文玲. 多机动目标跟踪的随机跳变系统理论与算法[D]. 北京: 北京航空航天大学数学与系统科学学院, 2012: 51-52.  
(Li W L. Theory and algorithms of stochastic jump systems for multiple maneuvering targets tracking[D]. Beijing: School of Mathematic and Systems Science, Beihang University, 2012: 51-52.)

(责任编辑: 李君玲)