文章编号: 1001-0920 (2016) 02-0279-08 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2014.1833

三次时变参数离散灰色预测模型及其性质

蒋诗泉[1,2], 刘思峰[1], 刘中侠[2], 方志耕[1]

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 210016；2. 铜陵学院 数学与计算机学院，安徽 铜陵 244000)

摘 要: 通过引入三次时间项来构造三次时变参数离散灰色预测模型 (简称 CDGM (1, 1) 模型), 并对模型的性质进行研究. 研究结果表明, CDGM (1, 1) 模型具有白指数重合性、线性规律重合性、二次规律重合性、三次规律重合性和伸缩变换一致性. 运用最优化理论研究了 CDGM (1, 1) 模型的基值迭代问题, 并给出了模型的预测步骤和算法. 通过算例比较 CDGM (1, 1)、DGM (1, 1) 和 NDGM (1, 1) 三个模型的预测效果, 结果表明 CDGM (1, 1) 的预测和模拟精度都得到了明显改善.

关键词: 灰色理论；三次时变参数；离散模型；灰色预测

中图分类号: N941 **文献标志码:** A

Cubic time-varying parameters discrete grey forecasting model and its properties

JIANG Shi-quan[1,2], *LIU Si-feng*[1], *LIU Zhong-xia*[2], *FANG Zhi-geng*[1]

(1. College of Economic and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China; 2. College of Mathematics and Computer Science，Tongling University，Tongling 244000，China．Correspondent: JIANG Shi-quan，E-mail：jshq6699@163.com)

Abstract：A cubic time-varying parameters discrete grey forecasting model(referred to as CDGM (1, 1)) is constructed by introducing cubic time-varying terms, whose properties are studied. It is concluded that the CDGM(1, 1) possesses white exponential law coincidence, linear law coincidence, quadratic law coincidence, cubic law coincidence and consistency of stretching transformation. Furthermore, the optimization method is applied to optimize the iterative starting value of the proposed model, and the steps of using CDGM(1, 1) are introduced to predict. Finally, the proposed model is compared with another two discrete grey models through an instance. The results show the proposed model greatly improves the simulation and prediction precision.

Keywords：grey theory；cubic time-varying parameters；discrete model；grey forecast

0 引 言

灰色系统理论是邓聚龙于 1982 年提出的一门新兴横断学科, 是一种研究少数据、贫信息不确定问题的理论, 已在很多学科和领域中得到了成功运用[1]. 为使灰理论得到更为广泛深入的运用, 很多学者对其理论中的基本模型 GM (1, 1) 进行了深入研究, 从不同的视角对模型进行了理论分析并完善和改进了模型, 给出很多新颖的 GM(1, 1)模型及其改进形式[2-9]. 这些改进的模型在某种程度上提高了预测精度, 降低了模拟误差. 但是, 这些模型存在一个共同的问题就是用离散化方法对参数进行估计, 用连续时间响应式进行预测, 从差分到微分的转换过程中必然会产生跳跃性误差. 灰色离散预测模型的提出, 在形式上使参数估计与模型得到统一, 使离散化到连续化所产生的误差得到了有效解决[10-11]. 张可等[12]在分析离散灰色模型的预测模拟增长率时发现其增长率是一个与参数值 β 有关的恒定值, 这对实际预测可能会造成误差, 故通过引入一次时间项, 构造一次时变参数离散灰色模型 (简称 TDGM (1, 1) 模型); 邬丽云等在文献 [12] 的基础上构建了二次时变参数离散灰色模型 (简称 QDGM (1, 1) 模型), 并优化了模型的迭代基值[13]. 这些模型的预测模拟精度都有所提高.

收稿日期: 2014-12-02；**修回日期:** 2015-03-06.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71171113)；教育部人文社会科学研究项目(11YJC630074)；安徽省高校人文社会科学研究项目(SK2015A537)；安徽省自然科学基金项目(1208085MG121).

作者简介: 蒋诗泉(1974−), 男, 副教授, 博士生, 从事灰色理论、复杂系统建模的研究；刘思峰(1955−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色理论、数量经济学等研究.

本文在文献[12-13]的基础上, 基于离散灰色模型的参数性质, 通过引入三次时间项构造三次时变参数离散灰色模型(CDGM $(1,1)$ 模型). 对CDGM $(1,1)$ 模型的性质进行深入探究, 证明了该模型对一次、二次、三次和白指数序列能够完全模拟(即具有重合性), 同时具有伸缩变换和数乘变换一致性等重要性质. 最后, 通过实例比较了三次时变参数离散灰色预测模型与一般的离散模型(DGM $(1,1)$ 模型)、非齐次离散模型(NDGM $(1,1)$ 模型)的模拟和预测精度, 结果表明CDGM $(1,1)$ 模型的模拟和预测精度都得到了明显提高.

三次时变参数离散灰色模型的实际背景来源于对岩土工程中建筑物的形变、位移和沉降的预测. 建筑物的形变、位移和沉降的变化过程都是随着时间的变化由快到慢最后趋于稳定状态, 因此模型中的参数应该也是随着时间变化的量. 岩土工程中不同地点的地质结构一般不同, 所以采集的数据一般是"小样本、贫信息", 从而比较适合灰色系统建模. 另外, 引入三次时间项构造模型是基于多项式拟合视角考虑的, 依数值分析知识, 多项式拟合时次数不宜太高, 否则会出现过拟合现象; 三次时变参数离散灰色模型中参数的确定是利用最小二乘原理, 若多项式次数高, 则会产生变态矩阵, 从而很难准确求解多项式系数. 因此, 寻找合适次数的多项式显得非常关键. 由数值分析相关研究可知, 拟合多项式次数在3或4次较为理想. 三次时变参数离散灰色模型适用于长期预测, 且对于参数随时间变化而变化的少数据贫信息的预测问题具有较好的预测精度.

1 三次时变参数离散灰色模型

设某系统行为特征观测值为

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)),$$

其一次累加序列为

$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)),$$

其中 $x^{(1)}(k)=\sum\limits_{k=1}^{n}x^{(0)}(k),k=1,2,\cdots,n.$

定义 1 [14] 称 $x^{(1)}(k+1)=\beta_1x^{(1)}(k)+\beta_1$ 为离散灰色模型, 简称DGM $(1,1)$ 模型.

定理 1 [11] 设DGM $(1,1)$ 模型的预测和模拟值序列为 $\widehat{X}=(\widehat{x}(1),\widehat{x}(1),\cdots,\widehat{x}(n))$, $\widehat{u}(k)$ 是 $\widehat{X}$ 的增长率, 令

$$\widehat{u}(k)=\frac{\widehat{x}(k+1)-\widehat{x}(k)}{\widehat{x}(k)},$$

其中 $k=2,3,\cdots,n$, 则 $\widehat{u}(k)=\beta_1-1$.

定理1表明, DGM $(1,1)$ 模型的预测模拟增长率是一个与参数值 β_1 有关的恒定值, 这样可能会造成在实际预测时产生较大的误差. 原因是实际预测数据序列不一定都符合指数规律.

定义 2 $x^{(1)}(k+1)=(a_0+a_1k+a_2k^2+a_3k^3)x^{(1)}(k)+b_0+b_1k+b_2k^2+b_3k^3$ 为三次时变参数离散灰色模型, 简称CDGM $(1,1)$ 模型, 其中 $x^{(1)}(k)$ 为原始序列的一次累加生成序列.

定理 2 设非负序列 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$ 的一次累加序列 $X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$, 则CDGM $(1,1)$ 模型 $x^{(1)}(k+1)=(a_0+a_1k+a_2k^2+a_3k^3)x^{(1)}(k)+b_0+b_1k+b_2k^2+b_3k^3$ 的最小二乘法的参数估计值分别为

$$\widehat{a}_0=\frac{D_1}{D},\ \widehat{a}_1=\frac{D_2}{D},\ \widehat{a}_2=\frac{D_3}{D},\ \widehat{a}_3=\frac{D_4}{D},$$
$$\widehat{b}_0=\frac{D_5}{D},\ \widehat{b}_1=\frac{D_6}{D},\ \widehat{b}_2=\frac{D_7}{D},\widehat{b}_3=\frac{D_8}{D}.$$

此处 $D_j(j=1,2,\cdots,8)$ 是将行列式 D 中的第 j 列元素换成线性方程组的常数项列 B 而得到的行列式. 由于行列式行和列较多, 现采用以下记号以便标记:

$$E=\sum_{k=1}^{n-1}1,\ F=\sum_{k=1}^{n-1}k,\ G=\sum_{k=1}^{n-1}k^2,$$

$$H=\sum_{k=1}^{n-1}k^3,\ I=\sum_{k=1}^{n-1}k^4,\ J=\sum_{k=1}^{n-1}k^5,$$

$$K=\sum_{k=1}^{n-1}k^6,\ L=\sum_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k),$$

$$M=\sum_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k),\ N=\sum_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k),$$

$$O=\sum_{k=1}^{n-1}k^3x^{(1)}(k),\ Q=\sum_{k=1}^{n-1}k^4x^{(1)}(k),$$

$$R=\sum_{k=1}^{n-1}k^5x^{(1)}(k),\ S=\sum_{k=1}^{n-1}k^6x^{(1)}(k),$$

$$T=\sum_{k=1}^{n-1}(x^{(1)}(k))^2,\ U=\sum_{k=1}^{n-1}k(x^{(1)}(k))^2,$$

$$V=\sum_{k=1}^{n-1}k^2(x^{(1)}(k))^2,\ W=\sum_{k=1}^{n-1}k^3(x^{(1)}(k))^2,$$

$$X=\sum_{k=1}^{n-1}k^4(x^{(1)}(k))^2,\ Y=\sum_{k=1}^{n-1}k^5(x^{(1)}(k))^2,$$

$$Z=\sum_{k=1}^{n-1}k^6(x^{(1)}(k))^2,\ B_1=\sum_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k),$$

$$B_2=\sum_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k),$$

$$B_3=\sum_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k),$$

$$B_4=\sum_{k=1}^{n-1}k^3x^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k),$$

$$B_5=\sum_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k+1),\ B_6=\sum_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k+1),$$

$$B_7=\sum_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k+1),\ B_8=\sum_{k=1}^{n-1}k^3x^{(1)}(k+1),$$

$$D=\begin{vmatrix} T & U & V & W & L & M & N & O\\ U & V & W & X & M & N & O & Q\\ V & W & X & Y & N & O & Q & R\\ W & X & Y & Z & O & Q & R & S\\ L & M & N & O & E & F & G & H\\ M & N & O & Q & F & G & H & I\\ N & O & Q & R & G & H & I & J\\ O & Q & R & S & H & I & J & K \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} B_1 & U & V & W & L & M & N & O\\ B_2 & V & W & X & M & N & O & Q\\ B_3 & W & X & Y & N & O & Q & R\\ B_4 & X & Y & Z & O & Q & R & S\\ B_5 & M & N & O & E & F & G & H\\ B_6 & N & O & Q & F & G & H & I\\ B_7 & O & Q & R & G & H & I & J\\ B_8 & Q & R & S & H & I & J & K \end{vmatrix}.$$

类似可以得到行列式 D_2、D_3、D_4、D_5、D_6、D_7、D_8.

证明　设非负序列 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$, $(\widehat{a}_0,\widehat{a}_1,\widehat{a}_2,\widehat{a}_3,\widehat{b}_0,\widehat{b}_1,\widehat{b}_2,\widehat{b}_3)$为CDGM(1,1)模型的参数估计值, 用如下模拟值代替 $x^{(1)}(k+1)$:

$$\widehat{x}^{(1)}(k+1)=$$
$$(\widehat{a}_0+\widehat{a}_1k+\widehat{a}_2k^2+\widehat{a}_3k^3)\widehat{x}^{(1)}(k)+$$
$$\widehat{b}_0+\widehat{b}_1k+\widehat{b}_2k^2+\widehat{b}_3k^3,$$

其中 $k=1,2,\cdots,n$, 得到误差平方和 $S=\sum\limits_{k=1}^{n-1}[x^{(1)}(k+1)-\widehat{x}^{(1)}(k+1)]^2$. 由最小二乘法, 使 S 最小的 $(\widehat{a}_0,\widehat{a}_1,\widehat{a}_2,\widehat{a}_3,\widehat{b}_0,\widehat{b}_1,\widehat{b}_2,\widehat{b}_3)$ 满足以下方程组:

$$\widehat{a}_0\sum_{k=1}^{n-1}(x^{(1)}(k))^2+\widehat{a}_1\sum_{k=1}^{n-1}k(x^{(1)}(k))^2+$$
$$\widehat{a}_2\sum_{k=1}^{n-1}k^2(x^{(1)}(k))^2+\widehat{a}_3\sum_{k=1}^{n-1}k^3(x^{(1)}(k))^2+$$
$$\widehat{b}_0\sum_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)+\widehat{b}_1\sum_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)+$$
$$\widehat{b}_2\sum_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)+\widehat{b}_3\sum_{k=1}^{n-1}k^3x^{(1)}(k)=$$
$$\sum_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k),$$

$$\widehat{a}_0\sum_{k=1}^{n-1}k(x^{(1)}(k))^2+\widehat{a}_1\sum_{k=1}^{n-1}k^2(x^{(1)}(k))^2+$$
$$\widehat{a}_2\sum_{k=1}^{n-1}k^3(x^{(1)}(k))^2+\widehat{a}_3\sum_{k=1}^{n-1}k^4(x^{(1)}(k))^2+$$
$$\widehat{b}_0\sum_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)+\widehat{b}_1\sum_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)+$$
$$\widehat{b}_2\sum_{k=1}^{n-1}k^3x^{(1)}(k)+\widehat{b}_3\sum_{k=1}^{n-1}k^4x^{(1)}(k)=$$
$$\sum_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k),$$

$$\widehat{a}_0\sum_{k=1}^{n-1}k^2(x^{(1)}(k))^2+\widehat{a}_1\sum_{k=1}^{n-1}k^3(x^{(1)}(k))^2+$$
$$\widehat{a}_2\sum_{k=1}^{n-1}k^4(x^{(1)}(k))^2+\widehat{a}_3\sum_{k=1}^{n-1}k^5(x^{(1)}(k))^2+$$
$$\widehat{b}_0\sum_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)+\widehat{b}_1\sum_{k=1}^{n-1}k^3x^{(1)}(k)+$$
$$\widehat{b}_2\sum_{k=1}^{n-1}k^4x^{(1)}(k)+\widehat{b}_3\sum_{k=1}^{n-1}k^5x^{(1)}(k)=$$
$$\sum_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k),$$

$$\widehat{a}_0\sum_{k=1}^{n-1}k^3(x^{(1)}(k))^2+\widehat{a}_1\sum_{k=1}^{n-1}k^4(x^{(1)}(k))^2+$$
$$\widehat{a}_2\sum_{k=1}^{n-1}k^5(x^{(1)}(k))^2+\widehat{a}_3\sum_{k=1}^{n-1}k^6(x^{(1)}(k))^2+$$
$$\widehat{b}_0\sum_{k=1}^{n-1}k^3x^{(1)}(k)+\widehat{b}_1\sum_{k=1}^{n-1}k^4x^{(1)}(k)+$$
$$\widehat{b}_2\sum_{k=1}^{n-1}k^5x^{(1)}(k)+\widehat{b}_3\sum_{k=1}^{n-1}k^6x^{(1)}(k)=$$
$$\sum_{k=1}^{n-1}k^3x^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k),$$

$$\widehat{a}_0\sum_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)+\widehat{a}_1\sum_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)+$$
$$\widehat{a}_2\sum_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)+\widehat{a}_3\sum_{k=1}^{n-1}k^3x^{(1)}(k)+$$
$$\widehat{b}_0\sum_{k=1}^{n-1}1+\widehat{b}_1\sum_{k=1}^{n-1}k+\widehat{b}_2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\widehat{b}_3\sum_{k=1}^{n-1}k^3=$$
$$\sum_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k+1),$$

$$\widehat{a}_0\sum_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)+\widehat{a}_1\sum_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)+$$
$$\widehat{a}_2\sum_{k=1}^{n-1}k^3x^{(1)}(k)+\widehat{a}_3\sum_{k=1}^{n-1}k^4x^{(1)}(k)+$$
$$\widehat{b}_0\sum_{k=1}^{n-1}k+\widehat{b}_1\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\widehat{b}_2\sum_{k=1}^{n-1}k^3+\widehat{b}_3\sum_{k=1}^{n-1}k^4=$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^{(1)}(k+1),$$

$$\widehat{a}_0\sum_{k=1}^{n-1} k^2x^{(1)}(k)+\widehat{a}_1\sum_{k=1}^{n-1} k^3x^{(1)}(k)+$$

$$\widehat{a}_2\sum_{k=1}^{n-1} k^4x^{(1)}(k)+\widehat{a}_3\sum_{k=1}^{n-1} k^5x^{(1)}(k)+$$

$$\widehat{b}_0\sum_{k=1}^{n-1} k^2+\widehat{b}_1\sum_{k=1}^{n-1} k^3+\widehat{b}_2\sum_{k=1}^{n-1} k^4+\widehat{b}_3\sum_{k=1}^{n-1} k^5=$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2x^{(1)}(k+1),$$

$$\widehat{a}_0\sum_{k=1}^{n-1} k^3x^{(1)}(k)+\widehat{a}_1\sum_{k=1}^{n-1} k^4x^{(1)}(k)+$$

$$\widehat{a}_2\sum_{k=1}^{n-1} k^5x^{(1)}(k)+\widehat{a}_3\sum_{k=1}^{n-1} k^6x^{(1)}(k)+$$

$$\widehat{b}_0\sum_{k=1}^{n-1} k^3+\widehat{b}_1\sum_{k=1}^{n-1} k^4+\widehat{b}_2\sum_{k=1}^{n-1} k^5+\widehat{b}_3\sum_{k=1}^{n-1} k^6=$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3x^{(1)}(k+1).$$

解上述线性方程组, 得到 $\widehat{a}_0$, $\widehat{a}_1$, $\widehat{a}_2$, $\widehat{a}_3$, $\widehat{b}_0$, $\widehat{b}_1$, $\widehat{b}_2$, $\widehat{b}_3$ 各参数估计值. □

定义 3 序列 $X^{(0)}$、$X^{(1)}$ 以及 CDGM(1,1) 模型中 $\widehat{a}_0$, $\widehat{a}_1$, $\widehat{a}_2$, $\widehat{a}_3$, $\widehat{b}_0$, $\widehat{b}_1$, $\widehat{b}_2$, $\widehat{b}_3$ 各参数估计值如定理 2 所述, 取 $\widehat{x}^{(1)}(1)=X^{(0)}(1)$, 则序列 $X^{(0)}$ 的一次累加序列模拟递推公式如下:

$$\widehat{x}^{(1)}(k+1)=$$
$$(\widehat{a}_0+\widehat{a}_1k+\widehat{a}_2k^2+\widehat{a}_3k^3)\widehat{x}^{(1)}(k)+$$
$$\widehat{b}_0+\widehat{b}_1k+\widehat{b}_2k^2+\widehat{b}_3k^3. \tag{1}$$

还原的模拟值为

$$\widehat{x}^{(0)}(k+1)=\alpha^{(1)}\widehat{x}^{(1)}(k+1)=$$
$$\widehat{x}^{(1)}(k+1)-\widehat{x}^{(1)}(k),\ k=1,2,\cdots,n-1. \tag{2}$$

2 CDGM(1,1) 模型性质

定理 3 设 $X^{(0)}$ 为非负序列, 其中 $x^{(0)}(k)=\mathrm{e}^{ak}$, $k=1,2,\cdots,n$, $\widehat{x}^{(0)}(k)$ 为 CDGM(1,1) 模型的模拟值, 则 $\widehat{x}^{(0)}(k)=\mathrm{e}^{ak}$, $k=1,2,\cdots,n$.

证明 因为 $x^{(0)}(k)=\mathrm{e}^{ak}$, $k=1,2,\cdots,n$, 所以 $x^{(1)}(k+1)=\mathrm{e}^{a}x^{(1)}(k)+\mathrm{e}^{a}$, 故由定理 2, 将 $B_i(i=1,2,\cdots,8)$ 中 $x^{(1)}(k+1)$ 用 $x^{(1)}(k+1)=\mathrm{e}^{a}x^{(1)}(k)+\mathrm{e}^{a}$ 代替. $D_j(j=1,2,\cdots,8)$ 为 CDGM(1,1) 模型参数估计的中间参数, 现以 D_1 为例说明其计算过程. 由于此时行列式 D_1 分为 2 个行列式的和, 即

$$D_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & U & V & W & L & M & N & O\\ \boldsymbol{A}_2 & V & W & X & M & N & O & Q\\ \boldsymbol{A}_3 & W & X & Y & N & O & Q & R\\ \boldsymbol{A}_4 & X & Y & Z & O & Q & R & S\\ \boldsymbol{A}_5 & M & N & O & E & F & G & H\\ \boldsymbol{A}_6 & N & O & Q & F & G & H & I\\ \boldsymbol{A}_7 & O & Q & R & G & H & I & J\\ \boldsymbol{A}_8 & Q & R & S & H & I & J & K \end{vmatrix}=$$

$$\mathrm{e}^{a}\cdot\begin{vmatrix} T & U & V & W & L & M & N & O\\ U & V & W & X & M & N & O & Q\\ V & W & X & Y & N & O & Q & R\\ W & X & Y & Z & O & Q & R & S\\ L & M & N & O & E & F & G & H\\ M & N & O & Q & F & G & H & I\\ N & O & Q & R & G & H & I & J\\ O & Q & R & S & H & I & J & K \end{vmatrix}+$$

$$\mathrm{e}^{a}\cdot\begin{vmatrix} L & U & V & W & L & M & N & O\\ M & V & W & X & M & N & O & Q\\ N & W & X & Y & N & O & Q & R\\ O & X & Y & Z & O & Q & R & S\\ E & M & N & O & E & F & G & H\\ F & N & O & Q & F & G & H & I\\ G & O & Q & R & G & H & I & J\\ H & Q & R & S & H & I & J & K \end{vmatrix}=$$

$$\mathrm{e}^{a}\cdot D+0=\mathrm{e}^{a}\cdot D.$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1=\mathrm{e}^{a}\sum_{k=1}^{n-1}(x^{(1)}(k))^2+\mathrm{e}^{a}\sum_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k),$$

$$\boldsymbol{A}_2=\mathrm{e}^{a}\sum_{k=1}^{n-1}k(x^{(1)}(k))^2+\mathrm{e}^{a}\sum_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k),$$

$$\boldsymbol{A}_3=\mathrm{e}^{a}\sum_{k=1}^{n-1}k^2(x^{(1)}(k))^2+\mathrm{e}^{a}\sum_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k),$$

$$\boldsymbol{A}_4=\mathrm{e}^{a}\sum_{k=1}^{n-1}k^3(x^{(1)}(k))^2+\mathrm{e}^{a}\sum_{k=1}^{n-1}k^3x^{(1)}(k),$$

$$\boldsymbol{A}_5=\mathrm{e}^{a}\sum_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)+\mathrm{e}^{a}\sum_{k=1}^{n-1}1,$$

$$\boldsymbol{A}_6=\mathrm{e}^{a}\sum_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)+\mathrm{e}^{a}\sum_{k=1}^{n-1}k,$$

$$\boldsymbol{A}_7=\mathrm{e}^{a}\sum_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)+\mathrm{e}^{a}\sum_{k=1}^{n-1}k^2,$$

$$\boldsymbol{A}_8=\mathrm{e}^{a}\sum_{k=1}^{n-1}k^3x^{(1)}(k)+\mathrm{e}^{a}\sum_{k=1}^{n-1}k^3.$$

同理可以得到 $D_2=D_3=D_4=D_6=D_7=D_8=0$, $D_5=\mathrm{e}^a\cdot D$, 所以 $\widehat{a}_0=\mathrm{e}^a$, $\widehat{a}_1=\widehat{a}_2=\widehat{a}_3=\widehat{b}_1=\widehat{b}_2=\widehat{b}_3=0$, $\widehat{b}_0=\mathrm{e}^a$.

以原始序列 $X^{(0)}$ 建立的 CDGM(1,1) 预测模型为 $\widehat{x}^{(1)}(k+1)=\mathrm{e}^a\widehat{x}^{(1)}(k)+e^a$, $k=1,2,\cdots,n-1$, 故

$$\widehat{x}^{(1)}(k+1)=\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{2a}+\cdots+\mathrm{e}^{a(k+1)}.$$

由定义 3 可知

$$\widehat{x}^{(0)}(k+1)=\mathrm{e}^{a(k+1)},\ k=1,2,\cdots,n-1,$$

故

$$\widehat{x}^{(0)}(k)=\mathrm{e}^{ak},\ k=1,2,\cdots,n-1. \qquad \square$$

定理 3 表明, CDGM(1,1) 模型能够完全模拟具有白指数规律的序列, 因此, 如果序列增长率高, 则预测模拟效果好. 从定理 3 的推演过程能够看出, DGM(1,1) 模型、TDGM(1,1) 模型、QDGM(1,1) 模型均可以被看作是 CDGM(1,1) 模型的特例, 而且原始序列增长率近似恒定时这 4 个模型可以相互替代使用.

定理 4　设 $X^{(0)}$ 为非负序列, 其中 $x^{(0)}(k)=a+kb$, $k=1,2,\cdots,n$, $\widehat{x}^{(0)}(k)$ 为 CDGM(1,1) 模型的模拟值, 则 $\widehat{x}^{(0)}(k)=a+kb$, $k=1,2,\cdots,n$.

证明　因为 $x^{(0)}(k)=a+kb$, $k=1,2,\cdots,n$, 所以 $x^{(1)}(k+1)=x^{(1)}(k)+a+kb+b$, 则由定理 2, 将 $B_i(i=1,2,\cdots,8)$ 中 $x^{(1)}(k+1)$ 用 $x^{(1)}(k+1)=x^{(1)}(k)+a+kb+b$ 代替. $D_j\,(j=1,2,\cdots,8)$ 为 CDGM(1,1) 模型参数估计的中间参数, 现以 D_1 为例说明其计算过程. 由于此时行列式 D_1 的第 1 列分为 3 列, 由此可以将其分为 3 个行列式的和, 即

$$D_1=$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{B}_1 & U & V & W & L & M & N & O\\ \boldsymbol{B}_2 & V & W & X & M & N & O & Q\\ \boldsymbol{B}_3 & W & X & Y & N & O & Q & R\\ \boldsymbol{B}_4 & X & Y & Z & O & Q & R & S\\ \boldsymbol{B}_5 & M & N & O & E & F & G & H\\ \boldsymbol{B}_6 & N & O & Q & F & G & H & I\\ \boldsymbol{B}_7 & O & Q & R & G & H & I & J\\ \boldsymbol{B}_8 & Q & R & S & H & I & J & K \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} T & U & V & W & L & M & N & O\\ U & V & W & X & M & N & O & Q\\ V & W & X & Y & N & O & Q & R\\ W & X & Y & Z & O & Q & R & S\\ L & M & N & O & E & F & G & H\\ M & N & O & Q & F & G & H & I\\ N & O & Q & R & G & H & I & J\\ O & Q & R & S & H & I & J & K \end{vmatrix}+$$

$$(a+b)\cdot\begin{vmatrix} L & U & V & W & L & M & N & O\\ M & V & W & X & M & N & O & Q\\ N & W & X & Y & N & O & Q & R\\ O & X & Y & Z & O & Q & R & S\\ E & M & N & O & E & F & G & H\\ F & N & O & Q & F & G & H & I\\ G & O & Q & R & G & H & I & J\\ H & Q & R & S & H & I & J & K \end{vmatrix}+$$

$$b\cdot\begin{vmatrix} M & U & V & W & L & M & N & O\\ N & V & W & X & M & N & O & Q\\ O & W & X & Y & N & O & Q & R\\ Q & X & Y & Z & O & Q & R & S\\ F & M & N & O & E & F & G & H\\ G & N & O & Q & F & G & H & I\\ H & O & Q & R & G & H & I & J\\ I & Q & R & S & H & I & J & K \end{vmatrix}=$$

$$D+(a+b)\cdot 0+b\cdot 0=D.$$

其中

$$\boldsymbol{B}_1=\sum_{k=1}^{n-1}(x^{(1)}(k))^2+(a+b)\sum_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)+ b\sum_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k),$$

$$\boldsymbol{B}_2=\sum_{k=1}^{n-1}k(x^{(1)}(k))^2+(a+b)\sum_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)+ b\sum_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k),$$

$$\boldsymbol{B}_3=\sum_{k=1}^{n-1}k^2(x^{(1)}(k))^2+(a+b)\sum_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)+ b\sum_{k=1}^{n-1}k^3x^{(1)}(k),$$

$$\boldsymbol{B}_4=\sum_{k=1}^{n-1}k^3(x^{(1)}(k))^2+(a+b)\sum_{k=1}^{n-1}k^3x^{(1)}(k)+ b\sum_{k=1}^{n-1}k^4x^{(1)}(k),$$

$$\boldsymbol{B}_5=\sum_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)+(a+b)\sum_{k=1}^{n-1}1+b\sum_{k=1}^{n-1}k,$$

$$\boldsymbol{B}_6=\sum_{k=1}^{n-1}kx^{(1)}(k)+(a+b)\sum_{k=1}^{n-1}k+b\sum_{k=1}^{n-1}k^2,$$

$$\boldsymbol{B}_7=\sum_{k=1}^{n-1}k^2x^{(1)}(k)+(a+b)\sum_{k=1}^{n-1}k^2+b\sum_{k=1}^{n-1}k^3,$$

$$\boldsymbol{B}_8=\sum_{k=1}^{n-1}k^3x^{(1)}(k)+(a+b)\sum_{k=1}^{n-1}k^3+b\sum_{k=1}^{n-1}k^4.$$

同理, 有

$$D_2=D_3=D_4=D_7=D_8=0,$$

$$D_5=(a+b)D,\ D_6=b\cdot D,$$

由此可得

$$\widehat{a}_0=1,\ \widehat{a}_1=\widehat{a}_2=\widehat{a}_3=\widehat{b}_2=\widehat{b}_3=0,$$

$$\widehat{b}_0=a+b,\ \widehat{b}_1=b,$$

从而

$$x^{(1)}(k+1)=x^{(1)}(k)+(a+b)+bk=$$

$$x^{(1)}(k+1)=x^{(1)}(k)+a+(k+1)b.$$

因此 $\widehat{x}^{(0)}(k+1)=a+(k+1)b$, 即

$$\widehat{x}^{(0)}(k)=a+kb,\ k=1,2,\cdots,n. \qquad \square$$

定理4表明, CDGM(1,1)模型能够模拟线性序列, 但DGM(1,1)模型不具有该性质.

定理5 设 $X^{(0)}$ 为非负序列, 其中 $x^{(0)}(k)=a+kb+k^2c$, $k=1,2,\cdots,n$, $\widehat{x}^{(0)}(k)$ 为CDGM(1,1)模型的模拟值, 则 $\widehat{x}^{(0)}(k+1)=a+kb+k^2c$, $k=1,2,\cdots,n$.

证明 因为 $x^{(0)}(k)=a+kb+k^2c$, $k=1,2,\cdots,n$, 所以

$$x^{(1)}(k+1)=x^{(1)}(k)+x^{(0)}(k+1)=$$

$$x^{(1)}(k)+a+(k+1)b+(k+1)^2c=$$

$$x^{(1)}(k)+k^2c+2kc+kb+a+b+c,$$

则由定理2, 可将 $B_i(i=1,2,\cdots,8)$ 中 $x^{(1)}(k+1)$ 用下式代替:

$$x^{(1)}(k+1)=x^{(1)}(k)+k^2c+2kc+a+b+c.$$

$D_j\,(j=1,2,\cdots,8)$ 为CDGM(1,1)模型参数估计的中间参数, 现以 D_1 为例说明其计算过程. 由于此时行列式 D_1 的第1列分为4列, 由此可以将其分为4个行列式的和, 具体过程同定理4. 同理可以得到

$$D_1=D,\ D_2=D_3=D_4=D_8=0,$$

$$D_5=(a+b+c)D,\ D_6=(2c+b)D,\ D_7=cD,$$

由此可得

$$\widehat{a}_0=1,\ \widehat{a}_1=\widehat{a}_2=\widehat{a}_3=\widehat{b}_3=0,$$

$$\widehat{b}_0=a+b+c,\ \widehat{b}_1=2c+b,\ \widehat{b}_2=c.$$

从而

$$x^{(1)}(k+1)=$$

$$x^{(1)}(k)+(a+b+c)+(2c+b)k+ck^2=$$

$$x^{(1)}(k)+k^2c+2kc+a+b+c=$$

$$a+(k+1)b+(k+1)^2c,$$

因此 $\widehat{x}^{(0)}(k+1)=\widehat{x}^{(1)}(k+1)-\widehat{x}^{(1)}(k)=a+(k+1)b+(k+1)^2c$, 故可以得到

$$\widehat{x}^{(0)}(k+1)=a+kb+k^2c,\ k=1,2,\cdots,n. \qquad \square$$

定理5表明, CDGM(1,1)模型具有二次规律重合性, 而DGM(1,1)模型和TDGM(1,1)模型都不具有二次规律重合性.

定理6 设 $X^{(0)}$ 为非负序列, 其中 $x^{(0)}(k)=a+kb+k^2c+k^3d$, $k=1,2,\cdots,n$, $\widehat{x}^{(0)}(k)$ 为CDGM(1,1)模型的模拟值, 则

$$\widehat{x}^{(0)}(k+1)=a+kb+k^2c+k^3d,$$

$$k=1,2,\cdots,n.$$

具体证明过程同定理4, 此略.

定理6表明, CDGM(1,1)模型具有三次规律重合性, 该性质是DGM(1,1)模型、TDGM(1,1)模型和QDGM(1,1)模型所不具备的.

定理7 设非负序列 $Y^{(0)}$ 为 $X^{(0)}$ 的数乘变换序列, 其中 $y^{(0)}(k)=\rho x^{(0)}(k)$, ρ 为非负常数. 对非负序列 $X^{(0)}$ 和 $Y^{(0)}$ 分别建立CDGM(1,1)模型, 记 $(a_0,a_1,a_2,a_3,b_0,b_1,b_2,b_3)$ 和 $(\bar{a}_0,\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{b}_0,\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3)$ 分别为序列 $X^{(0)}$ 和 $Y^{(0)}$ 的模型参数估计值, 则

$$a_i=\bar{a}_i,\ b_i=\bar{b}_i,\ i=0,1,2,3.$$

由定理2很容易证得定理7的结论, 此略.

定理8 设非负序列 $Y^{(0)}$ 为 $X^{(0)}$ 的数乘变换序列, 其中 $y^{(0)}(k)=\rho x^{(0)}(k)$, ρ 为非负常数. 记 $\widehat{x}^{(0)}(k)$ 和 $\widehat{y}^{(0)}(k)$ 分别为非负序列 $X^{(0)}$ 和 $Y^{(0)}$ 的CDGM(1,1)模型的预测值(模拟值), 则

$$\widehat{y}^{(1)}(k)=\rho\widehat{x}^{(1)}(k),\ \widehat{y}^{(0)}(k)=\rho\widehat{x}^{(0)}(k).$$

由定理7很容易证得定理8的结论, 此略.

定理7和定理8称为CDGM(1,1)模型伸缩变换一致性定理, 描述了序列经数乘变换后的CDGM(1,1)模型的预测模拟值, 等于原序列预测模拟值也进行相应的数乘变换. 这个性质的一个重要运用就是在不影响预测模拟误差的前提下, 通过对建模数据的数乘变换能够有效解决模型的病态问题.

3 模型的迭代基值优化

为了尽可能消除迭代初始值对模型拟合值的影响, 考虑给迭代初值增加一个修正项 ε, 通过修正项反向抵消初始值带来的偏差, 选择 $\widehat{x}^{(1)}(1)=\widehat{x}^{(0)}(1)$ 为迭代基值. 对于这个增加的修正项 ε 的取值, 采用最小二乘法原理, 构建一个无约束的优化模型, 求解 $\widehat{x}^{(1)}(k)$ 与 $x^{(1)}(k)$ 误差平方和最小. 为此, 在定义3模型的基础上加上一个基值修正项, 便得到如下模型:

$$\begin{cases} \widehat{x}^{(1)}(k+1)= \\ (\widehat{a}_0+\widehat{a}_1k+\widehat{a}_2k^2+\widehat{a}_3k^3)\widehat{x}^{(1)}(k)+ \\ \widehat{b}_0+\widehat{b}_1k+\widehat{b}_2k^2+\widehat{b}_3k^3, \\ \widehat{x}^{(1)}(k)=x^{(0)}(k)+\varepsilon, \end{cases} \tag{3}$$

其中参数 $(\widehat{a}_0,\widehat{a}_1,\widehat{a}_2,\widehat{a}_3,\widehat{b}_0,\widehat{b}_1,\widehat{b}_2,\widehat{b}_3)$ 由定理2得到. 通过迭代可以得到下式:

$$\begin{cases} \widehat{x}^{(1)}(1) = x^{(0)}(1) + \varepsilon, \\ \widehat{x}^{(1)}(2) = \\ (\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 \cdot 1 + \widehat{a}_2 \cdot 1^2 + \widehat{a}_3 \cdot 1^3)\widehat{x}^{(1)}(1) + \\ (\widehat{b}_0 + \widehat{b}_1 \cdot 1 + \widehat{b}_2 \cdot 1^2 + \widehat{b}_3 \cdot 1^3), \\ \qquad \vdots \\ \widehat{x}^{(1)}(n) = \\ (\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 \cdot n + \widehat{a}_2 \cdot n^2 + \widehat{a}_3 \cdot n^3)\widehat{x}^{(1)}(n-1) + \\ (\widehat{b}_0 + \widehat{b}_1 \cdot n + \widehat{b}_2 \cdot n^2 + \widehat{b}_3 \cdot n^3), \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\widehat{x}^{(1)}(k)(k = 1, 2, \cdots, n)$ 为关于 ε 的一次多项式. 为使模拟误差最小, 建立如下优化模型:

$$\min \sum_{k=1}^{n} [x^{(1)}(k) - \widehat{x}^{(1)}(k)]^2. \tag{5}$$

令 $P = \min \sum_{k=1}^{n} [x^{(1)}(k) - \widehat{x}^{(1)}(k)]^2$, 则 P 是关于 ε 的二次函数, 且二次项系数大于零, 故由极值的必要条件 $(\mathrm{d}P/\mathrm{d}\varepsilon = 0)$ 得 ε 值, 再由极值第二充分条件 $(\mathrm{d}^2P/\mathrm{d}\varepsilon^2 > 0)$ 知函数 P 的最小值点为 ε.

综上所述, 得到 CDGM(1, 1) 模型预测步骤如下.

Step 1: 由定理 2 计算 $(\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \widehat{a}_3, \widehat{b}_0, \widehat{b}_1, \widehat{b}_2, \widehat{b}_3)$;

Step 2: 利用式 (5) 求出迭代基值修正项 ε;

Step 3: 利用加入修正项后的迭代基, 再由式 (1) ~ (3) 进行模拟和预测;

Step 4: 计算模拟误差, 并对模型进行精度检验.

4　算例分析

以我国城镇居民家庭人均可支配收入的预测为例, 拟比较几种离散模型的模拟和预测精度, 数据如表 1 所示.

表 1　1997 ~ 2012 年我国城镇居民家庭人均可支配收入　　万元

年份	收入	年份	收入	年份	收入	年份	收入
1997	0.516 0	2001	0.685 9	2005	1.049 3	2009	1.717 5
1998	0.542 5	2002	0.770 3	2006	1.176 0	2010	1.910 9
1999	0.585 4	2003	0.847 2	2007	1.378 6	2011	2.180 9
2000	0.628 0	2004	0.942 2	2008	1.578 1	2012	2.456 5

以 1997 ~ 2006 年的数据为建模数据, 分别建立 DGM(1, 1)、NDGM(1, 1) 和 CDGM(1, 1) 模型如下:

$$\begin{cases} \widehat{x}^{(1)}(k+1) = 1.095\,9\widehat{x}^{(1)}(k) + 4\,819.5, \\ \widehat{x}^{(1)}(1) = 5\,160; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \widehat{x}^{(1)}(k+1) = \\ 1.215\,1\widehat{x}^{(1)}(k) - 759.18k + 5\,077.5, \\ \widehat{x}^{(1)}(1) = 5\,161; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \widehat{x}^{(1)}(k+1) = \\ (3.680\,8 - 1.269\,3k + 0.0980k^2 - \\ 0.002\,1k^3)\widehat{x}^{(1)}(k) + (0.451\,0 - 1.215\,9k + \\ 0.554\,2k^2 - 0.024\,8k^3), \\ \widehat{x}(1) = 0.516\,2; \end{cases} \tag{8}$$

$$\widehat{x}^{(0)}(k+1) = \\ \widehat{x}^{(1)}(k+1) - \widehat{x}^{(1)}(k),\ k = 1, 2, \cdots, n-1. \tag{9}$$

并用建模数据进行预测和模拟, 计算出预测和模拟平均相对误差, 具体数据如表 2 所示.

表 2　我国城镇居民家庭收入人均可支配收入的不同模型模拟预测值与平均相对误差比较

年份	实际值	DGM(1, 1)		NDGM(1, 1)		CDGM(1, 1)	
		模拟值	相对误差 / %	模拟值	相对误差 / %	模拟值	相对误差 / %
1997	0.516 0	0.516 0	0	0.516 1	0.010	0.516 2	0.039
1998	0.542 5	0.531 4	2.046	0.542 8	0.055	0.542 5	0
1999	0.585 4	0.582 4	0.512	0.583 6	0.307	0.585 4	0
2000	0.628 0	0.638 3	1.640	0.633 1	0.812	0.625 3	0.429
2001	0.685 9	0.699 5	1.982	0.693 3	1.079	0.682 4	0.510
2002	0.770 3	0.766 5	0.493	0.766 5	0.493	0.763 1	0.934
2003	0.847 2	0.840 0	0.849	0.855 3	0.956	0.838 0	1.085
2004	0.942 2	0.920 6	2.293	0.963 3	2.239	0.925 1	1.814
2005	1.049 3	1.008 9	3.850	1.094 6	4.317	1.022 7	2.535
2006	1.171 9	1.105 6	5.657	1.253 9	6.997	1.134 6	3.183
1997 ~ 2006 年平均模拟相对误差			1.932 2		1.726 5		1.052 9
2007	1.378 6	1.211 7	12.106	1.449 5	5.143	1.257 7	8.769
2008	1.578 1	1.327 9	15.517	1.685 4	6.799	1.395 5	11.571
2009	1.717 5	1.452 3	15.441	1.971 9	25.44	1.538 1	10.445
2010	1.910 9	1.594 8	16.512	2.320 3	16.715	1.681 4	12.010
2011	2.180 9	1.747 7	19.863	2.743 3	25.787	1.801 1	17.414
2012	2.456 5	1.935 3	21.221	3.357 5	36.678	1.840 2	25.089
2013	2.695 5	2.079 0	22.871	3.882 3	44.028	1.719 3	36.215
2007 ~ 2012 年平均模拟相对误差			16.777		19.409		14.216

由表2可以看出, DGM(1, 1) 模型的平均模拟相对误差为1.932 2%, NDGM(1, 1) 模型的平均模拟相对误差为1.726 5%, 而三次时变参数模型CDGM(1, 1) 模型的平均模拟相对误差仅为1.052 9%, 明显比DGM(1, 1) 和NDGM(1, 1) 的平均模拟相对误差值低. 从预测误差看, 对3个模型做了6步预测, DGM(1, 1) 模型的平均预测相对误差为16.777%, NDGM(1, 1) 模型的平均预测相对误差为19.409%, CDGM(1, 1) 模型的平均预测相对误差为14.216%, 由此可以看出, 对于中期预测, CDGM(1, 1) 的预测精度比DGM(1, 1) 和NDGM(1, 1) 的预测精度高.

5 结 论

本文基于已有的研究成果构造了三次时变参数离散灰色预测模型 (CDGM(1, 1)), 该模型能够有效解决因增长率恒定而造成模拟预测误差较大的问题. 值得注意的是, 当建模数据近似符合指数规律时, 目前已有的离散灰色预测模型均可以被看作CDGM(1, 1) 模型的特例, 即CDGM(1, 1) 模型是这些模型的一般形式.

通过对CDGM(1, 1) 模型性质进行研究, 给出了模型参数估计值计算公式, 同时证明了CDGM(1, 1) 具有白指数规律的重合性、线性规律的重合性、二次规律的重合性, 尤其对于三次序列能够完全模拟且模拟精度较好, 这是其他离散灰色预测模型所不具有的性质. 另外, CDGM(1, 1) 模型具有伸宿变换的一致性.

利用最优化理论及Matlab编程对CDGM(1, 1) 模型的迭代基值进行了优化, 建立了优化算法. 从优化的基值的计算结果可以看出, 用优化的基值进行迭代计算确实能够提高模型的模拟精度, 对于中长期的预测, 其预测精度明显提高.

参考文献(**References**)

[1] Deng J L. Introduction to grey system theory[J]. The J of Grey System,1989, 1(1): 1-24.

[2] 邓聚龙. 灰预测与灰决策[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 43-51.
(Deng J L. Grey predication and grey decision[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science and Technology, 2002: 43-51.)

[3] 王义闹, 刘开第. 优化灰导数白化值得GM(1, 1) 建模法[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(5): 124-128.
(Wang Y N, Liu K D. GM(1, 1) modeling method of optimun the whiting values[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2001, 21(5): 124-128.)

[4] 宋中民, 同小军, 肖新平. 中心逼近式灰色GM(1, 1) 模型[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(5): 110-113.
(Song Z M, Tong X J, Xiao X P. Center approach grey GM(1, 1) model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2001, 21(5): 110-113.)

[5] 穆勇. 优化灰导数白化值的无偏灰色GM(1, 1) 模型[J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(3): 13-16.
(Mu Y. An unbiased grey GM(1, 1) model with optimun grey derivation whiting values[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2003, 33(3): 13-16.)

[6] 罗党, 刘思峰, 党耀国. 灰色模型GM(1, 1) 优化[J]. 中国工程科学, 2003, 5(8): 50-53.
(Luo D, Liu S F, Dang Y G. The optimization of grey model GM(1, 1)[J]. Engineering Science, 2003, 5(8): 50-53.)

[7] 熊萍萍, 党耀国, 王正新. MGM(1, 1) 模型背景值优化[J]. 控制与决策, 2011, 26(6): 806-810.
(Xiong P P, Dang Y G, Wang Z X. A optimization of background value in MGM(1, m) model[J]. Control and Decision, 2011, 26(6): 806-810.)

[8] 王叶梅, 党耀国, 王正新. 非等间距GM(1, 1) 模型背景值的优化[J]. 中国管理科学, 2008, 16(4): 159-162.
(Wang Y M, Dang Y G, Wang Z X. The optimization of background value in non-equidistant GM(1, 1) model[J]. Chinese J of Management Science, 2008, 16(4): 159-162.)

[9] 刘斌, 刘思峰, 翟振杰, 等. GM(1, 1) 模型时间响应函数的最优化[J]. 中国管理科学, 2003, 5(8): 50-53.
(Liu B, Liu S F, Zhai Z J, et al. Optimization time responce sequence for GM(1, 1)[J]. Chinese J of Management Science, 2003, 5(8): 50-53.)

[10] 谢乃明, 刘思峰. 离散GM(1, 1) 模型与灰色预测建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-98.
(Xie N M, Liu S F. Discrete GM(1, 1) and mechanism of grey forecasting model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2005, 25(1): 93-98.)

[11] 姚天祥, 刘思峰. 改进的离散灰色预测模型[J]. 系统工程, 2007, 25(6): 103-106.
(Yao T X, Liu S F. Improvement of a forecasting discrete GM(1, 1)[J]. Systems Engineering, 2007, 25(6): 103-106.)

[12] 张可, 刘思峰. 线性时变参数离散灰色预测模型[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1650-1657.
(Zhang K, Liu S F. Linear time-varying parameters discrete grey forecasting model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2010, 30(9): 1650-1657.)

[13] 邬丽云, 吴正朋, 李梅. 二次时变参数离散灰色模型[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(11): 2888-2893.
(Wu L Y, Wu Z P, Li M. Quadratic time-varying parameters discrete grey model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(11): 2888-2893.)

[14] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第5版. 北京: 科学出版社, 2010: 182-183.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G, et al. Grey system theory and its application[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2010: 182-183.)

(责任编辑：曹洪武)