

# 一种考虑非高斯 Lévy 量测噪声下的改进分数阶卡尔曼滤波

孙永辉, 高振阳, 卫志农, 孙国强

(河海大学 能源与电气学院, 南京 210098)

**摘要:** 针对量测噪声模型为非高斯 Lévy 噪声, 研究离散线性随机分数阶系统的卡尔曼滤波设计问题. 通过剔除极大值的方法得到近似高斯白噪声的 Lévy 噪声, 基于最小二乘原理, 提出一种考虑非高斯 Lévy 量测噪声下的改进分数阶卡尔曼滤波算法. 与传统的分数阶卡尔曼滤波相比, 改进的分数阶卡尔曼滤波对非高斯 Lévy 噪声具有更好的滤波效果. 最后, 通过模拟仿真验证了所提出算法的正确性和有效性.

**关键词:** 分数阶卡尔曼滤波; Lévy 噪声; 状态估计

**中图分类号:** TP11

**文献标志码:** A

## An improved Kalman filter for fractional order system with non-Gaussian measurement Lévy noise

SUN Yong-hui, GAO Zhen-yang, WEI Zhi-nong, SUN Guo-qiang

(College of Energy and Electrical Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China. Correspondent: SUN Yong-hui, E-mail: sunyonghui168@gmail.com)

**Abstract:** Based on the measurement noise as the non-Gaussian Lévy noise, a novel Kalman filter for the discrete linear stochastic fractional order system is proposed. By eliminating the maximum, the approximated Gaussian white noise can be obtained. Based on the principle of least square, an improved Kalman filter can be developed for the discrete linear stochastic fractional order system with measurement Lévy noise. Compared to the traditional method, the proposed method gets better performance. Finally, simulation results show the effectiveness and usefulness of the proposed algorithm.

**Keywords:** fractional Kalman filter; Lévy noise; state estimation

### 0 引言

分数阶微积分的历史要追溯到 18 世纪, 由欧拉和拉格朗日两位数学家率先提出了分数阶微积分的概念. 随后在 19 世纪, Liouville 等<sup>[1]</sup>建立了系统的分数阶理论. 与整数阶模型相比, 采用分数阶微积分的数学模型, 不仅可以表现出更好的性能, 而且能描述实际生活中整数阶系统无法解决的物理问题.

近几十年来, 对分数阶系统的研究引起了越来越多学者的关注. 目前, 关于分数阶系统的稳定性和控制问题的研究取得了大量的成果. 文献[2]讨论了分数阶延迟系统的稳定性和分数阶 PID 控制器的设计问题; 文献[3]讨论了分数阶混沌系统的鲁棒稳定性和镇定问题. 此外, 分数阶系统的状态估计和参数辨识的研究也取得了一定的进展. 文献[4]讨论了连续分数阶延迟系统的参数辨识问题; 文献[5]讨论了

分数阶系统的参数辨识问题; 文献[6]讨论了基于分数阶卡尔曼滤波的状态估计问题; 文献[7]针对分数阶奇异系统, 提出了一种针对该系统的卡尔曼滤波算法; 文献[8]基于扩展分数阶卡尔曼滤波算法, 实现了对嘈杂混沌保密系统的状态估计.

需要指出的是, 目前的研究主要都是假设分数阶系统受到高斯白噪声的干扰, 然而在实际的工业过程中, 广义的噪声基本上以非高斯噪声为主, 这些非高斯噪声的统计特性会大大影响分数阶卡尔曼滤波的效果, 甚至会引起卡尔曼算法的失效. 目前, 对于非高斯 Lévy 噪声的研究也有不少成果. 文献[9]讨论了考虑 Lévy 噪声的高斯信号的最优滤波问题; 文献[10]借助仿真方法讨论了近似 Lévy 序列中的小跳跃过程; 文献[11]采用 UKF 和神经网络相结合的方法, 在模型未知的情况下, 解决了非线性系统的状态

**收稿日期:** 2014-12-04; **修回日期:** 2015-07-17.

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(61104045, 51107032, 51277052); 国家 111 计划项目(B14022).

**作者简介:** 孙永辉(1980—), 男, 教授, 博士生导师, 从事随机系统分析与综合、电力系统稳定控制等研究; 高振阳(1991—), 男, 硕士生, 从事分数阶卡尔曼滤波的研究.

估计问题. 目前, 还较少有报道 Lévy 噪声下分数阶卡尔曼滤波的设计问题.

由于系统状态在实际中难以测量, 虽然工程可以通过设计状态观测器的方法, 使得观测器的数据  $\hat{x}_k$  以一定的精度趋近于系统的真实状态  $x_k$ , 但系统观测值易受到噪声的影响, 需要考虑量测噪声为非高斯噪声下的卡尔曼滤波设计问题. 基于上述讨论, 在考虑量测噪声为 Lévy 噪声的情况下, 针对离散线性分数阶系统, 提出一种改进的分数阶卡尔曼滤波算法. 最后, 通过模拟仿真验证了所提出算法的正确性和有效性.

## 1 分数阶系统和卡尔曼滤波

### 1.1 分数阶微积分

分数阶微积分是整数阶微积分的推广, 它实质上是非整数阶微积分或者是任意阶微积分, 其阶数为实数或者复数<sup>[1]</sup>. 在 300 多年的发展过程中, 数学家们从不同角度出发, 给出了分数阶微积分不同的定义, 其定义的合理性和科学性已经在实践中得到广泛检验, 本文结果主要基于 Grünwald-Letnikov 定义.

**定义 1<sup>[1]</sup>** Grünwald-Letnikov 微分定义如下:

$${}_a D_t^\alpha = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{(t-a)/h} (-1)^j [\alpha \ j]^\text{T} f(t-jh). \quad (1)$$

当  $\alpha > 0$  时, 该式为分数阶微分; 当  $\alpha < 0$  时, 该式为分数阶积分. 其中:  $[\alpha \ j]^\text{T}$  为二项式系数,  $h$  为步长.

### 1.2 分数阶系统

由分数阶微积分的定义可得到分数阶差分方程.

**定义 2<sup>[6]</sup>** Grünwald-Letnikov 微分定义的分数阶差分方程为

$$\Delta^\alpha x_k = \sum_{j=0}^k (-1)^j [\alpha \ j]^\text{T} x_{k-j}. \quad (2)$$

其中: 采样时间设为 1;  $\alpha$  为分数阶微分算子;  $k$  为采样时刻;  $[\alpha \ j]^\text{T}$  由下式表示:

$$\begin{cases} 1, & j = 0; \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}, & j > 0. \end{cases}$$

**定义 3<sup>[6]</sup>** 离散线性随机分数阶系统可表示为

$$\Delta^\gamma x_{k+1} = A_d x_k + B u_k + \omega_k, \quad (3)$$

$$x_{k+1} = \Delta^\gamma x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \gamma_j x_{k+1-j}, \quad (4)$$

$$y_k = C x_k + \nu_k. \quad (5)$$

其中

$$\gamma_k = \text{diag} \left[ \begin{matrix} n_1 \\ k \end{matrix} \right] \cdots \left[ \begin{matrix} n_N \\ k \end{matrix} \right],$$

$$\Delta^\gamma x_{k+1} = [\Delta^{n_1} x_{1,k+1} \ \cdots \ \Delta^{n_N} x_{N,k+1}]^\text{T},$$

$n_1, n_2, \dots, n_N$  为分数阶系统的阶次;  $x(k)$ 、 $y(k)$  分别为  $k$  时刻的状态向量和系统输出;  $\omega(k)$  为过程噪声,  $\nu(k)$  为量测噪声, 均假定为高斯白噪声且满足特性

$$E[\omega_i \omega_k^\text{T}] = \begin{cases} Q_k, & i = k; \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \quad E[\nu_i \nu_k^\text{T}] = \begin{cases} R_k, & i = k; \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

$Q_k$ 、 $R_k$  分别为过程噪声和量测噪声的协方差.

### 1.3 分数阶卡尔曼滤波

**引理 1<sup>[6]</sup>** 针对离散线性随机分数阶系统 (3)~(5), 分数阶卡尔曼滤波设计如下:

$$\Delta^\gamma \tilde{x}_{k+1} = A_d \tilde{x}_k + B u_k, \quad (6)$$

$$\tilde{x}_{k+1} = \Delta^\gamma \tilde{x}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \gamma_j \tilde{x}_{k+1-j}, \quad (7)$$

$$\hat{P}_k = A_d P_{k-1} A_d^\text{T} + \sum_{j=1}^k \gamma_j P_{k-j} \gamma_j^\text{T} + Q_{k-1}, \quad (8)$$

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K_k (y_k - C \tilde{x}_k), \quad (9)$$

$$P_k = (I - K_k C) \hat{P}_k, \quad (10)$$

其中

$$K_k = \hat{P}_k C^\text{T} (C \hat{P}_k C^\text{T} + R_k)^{-1}. \quad (11)$$

## 2 改进的分数阶卡尔曼滤波

一般情况下, 传统的分数阶卡尔曼滤波都假设量测过程受到高斯白噪声的干扰<sup>[12]</sup>. 然而, 大部分实际系统噪声是非高斯的, 这些非高斯噪声的统计特性会大大影响分数阶卡尔曼滤波的效果, 甚至引起卡尔曼滤波算法的失效. 出于这种考虑, 提出一种考虑非高斯 Lévy 量测噪声下的改进型分数阶卡尔曼滤波算法.

假设量测噪声为 Lévy 噪声, 分数阶系统可写为

$$\Delta^\gamma x_{k+1} = A_d x_k + B u_k + \omega_k, \quad (12)$$

$$x_{k+1} = \Delta^\gamma x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \gamma_j x_{k+1-j}, \quad (13)$$

$$\bar{y}_k = C x_k + \bar{\nu}_k. \quad (14)$$

其中:  $\omega_k$  为高斯白噪声,  $\bar{\nu}_k$  为非高斯 Lévy 噪声.

通常, 离散时间的高斯过程可以通过布朗运动的增量来近似<sup>[13]</sup>. 同样, 非高斯 Lévy 噪声也可以用 Lévy 过程的增量来近似. 由 Lévy-Itô 理论<sup>[10]</sup>可知, 每个 Lévy 过程可以分解为一个高斯过程和一个纯跳跃过程<sup>[13]</sup>. 为解决非高斯 Lévy 噪声无限方差特性的问题, 将其分解成高斯白噪声加上某些极大值的和<sup>[10]</sup>, 但这些极大值的和是可以被剔除的, 从而将非高斯 Lévy 噪声转化为高斯噪声, 具体方法如下.

首先, 令  $\bar{\nu}_k$  表示量测噪声  $\bar{\nu}_k$  经过剔除极大值之后的值, 用  $\tilde{y}_k$  表示观测值  $\bar{y}_k$  经过剔除极大值之后的值. 然后, 运用逐个分量的方法将  $\bar{y}_k$  剔除, 得到  $\tilde{y}_k$  为

$$\tilde{y}_k^i = \begin{cases} \sum_j C_k^{i,j} \tilde{x}_k^j + F \text{sign}(\tilde{y}_k^i - \sum_j C_k^{i,j} \tilde{x}_k^j), \\ \left| \tilde{y}_k^i - \sum_j C_k^{i,j} \tilde{x}_k^j \right| \geq F; \\ \tilde{y}_k^i, \left| \tilde{y}_k^i - \sum_j C_k^{i,j} \tilde{x}_k^j \right| < F. \end{cases} \quad (15)$$

其中： $F$ 为临界值，由测量噪声  $\tilde{\nu}_k$  的统计特征决定； $\tilde{y}_k^i$  为  $\tilde{y}_k$  的第  $i$  个分量； $\tilde{x}_k^i$  为  $\tilde{x}_k$  的第  $i$  个分量； $\sum_j C_k^{i,j} \tilde{x}_k^j$  为  $C_k \tilde{x}_k$  的第  $i$  个分量。经过式 (15) 的变换，式 (14) 可以重写为

$$\tilde{y}_k = Cx_k + \tilde{\nu}_k. \quad (16)$$

结合式 (12)、(13) 和 (16) 可以得到过程噪声为高斯白噪声，量测噪声为 Lévy 噪声经过修剪近似高斯白噪声的离散线性随机分数阶系统。针对该系统，提出一种改进的分数阶卡尔曼滤波算法。

**定理 1** 基于系统 (12)、(13) 和 (16)，改进的分数阶卡尔曼滤波算法设计如下：

$$\begin{aligned} \Delta^\gamma \tilde{x}_{k+1} &= A_d \tilde{x}_k + B u_k, \\ \tilde{x}_{k+1} &= \Delta^\gamma \tilde{x}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \gamma_j \hat{x}_{k+1-j}, \\ \hat{P}_k &= A_d P_{k-1} A_d^T + \sum_{j=1}^k \gamma_j P_{k-j} \gamma_j^T + Q_{k-1}, \\ \hat{x}_{k+1} &= \tilde{x}_k + K_{k+1}(\tilde{y}_{k+1} - C \tilde{x}_{k+1}), \\ P_k &= (I - K_k C) \hat{P}_k. \end{aligned}$$

其中  $K_k = \hat{P}_k C^T (2C \hat{P}_k C^T + \bar{R}_k)^{-1}$ ， $\bar{R}_k = (\tilde{y}_k - C \tilde{x}_k)(\tilde{y}_k - C \tilde{x}_k)^T$ 。

**证明** 根据式 (9) 和 (16)，可以得到

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K_k(\tilde{y}_k - C \tilde{x}_k). \quad (17)$$

经过剔除极大值的量测噪声  $\tilde{\nu}_k$  的协方差为  $\tilde{R}_k$ ，即

$$E[\tilde{\nu}_i \tilde{\nu}_k^T] = \begin{cases} \tilde{R}_k, & i = k; \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

假设  $Q_k$  已知， $\tilde{R}_k$  的估计如下：

$$\begin{aligned} \tilde{R}_k &= E[\tilde{\nu}_k \tilde{\nu}_k^T] = E[(\tilde{y}_k - Cx_k)(\tilde{y}_k - Cx_k)^T] = \\ &= E[(\tilde{y}_k - C\tilde{x}_k) - C(x_k - \tilde{x}_k)] \times \\ &= E[(\tilde{y}_k - C\tilde{x}_k) - C(x_k - \tilde{x}_k)]^T = \\ &= (\tilde{y}_k - C\tilde{x}_k)(\tilde{y}_k - C\tilde{x}_k)^T - E[(\tilde{y}_k - C\tilde{x}_k) - \\ &= (x_k - \tilde{x}_k)^T C^T] - E[C(x_k - \tilde{x}_k)(\tilde{y}_k - C\tilde{x}_k)^T] + C \hat{P}_k C^T. \end{aligned} \quad (18)$$

在  $\tilde{y}$  与  $\tilde{x}_k$  已知的条件下，有  $(\tilde{y}_k - C\tilde{x}_k)E[(x_k - \tilde{x}_k)^T]C^T = 0$ ， $E[C(x_k - \tilde{x}_k)][(\tilde{y}_k - C\tilde{x}_k)]^T = 0$ 。式 (18) 可重写为

$$\tilde{R}_k = (\tilde{y}_k - C\tilde{x}_k)(\tilde{y}_k - C\tilde{x}_k)^T + C \hat{P}_k C^T. \quad (19)$$

由式 (11) 和 (19) 可以得到

$$K_k = \hat{P}_k C^T (2C \hat{P}_k C^T + \bar{R}_k)^{-1}, \quad (20)$$

其中

$$\bar{R}_k = (\tilde{y}_k - C\tilde{x}_k)(\tilde{y}_k - C\tilde{x}_k)^T. \quad (21)$$

为解决非高斯 Lévy 噪声的无限方差问题，将其分解成高斯白噪声加上某些极大值的和。通过剔除这些极大值的和，从而将非高斯 Lévy 噪声转化为高斯噪声，进而得到改进型的分数阶卡尔曼滤波。

### 3 仿真结果

考虑文献 [6] 所研究的分数阶系统，参数设定为

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [b_0 \quad b_1],$$

$$\alpha = [n_1, n_2]^T, a_0 = -0.4, a_1 = -0.6,$$

$$b_0 = 0.5, b_1 = 0.4, n_1 = 0.7, n_2 = 1.2.$$

**情形 1** 假设  $\omega_k$ 、 $\nu_k$  为高斯白噪声，方差分别为

$$E[\omega_k \omega_k^T] = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}, E[\nu_k \nu_k^T] = 0.3.$$

估计误差协方差的初值和状态初值分别为

$$P_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}.$$

在给定初值条件下，估计效果如图 1 所示。

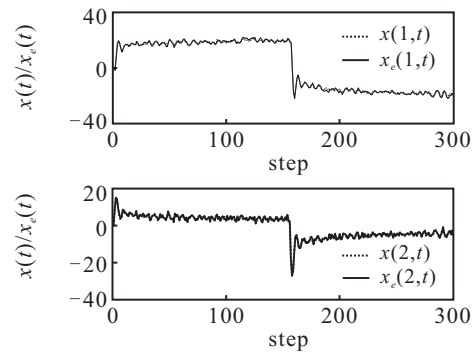


图 1 高斯白噪声下的状态估计效果 (引理 1)

为了更好地评价滤波效果，采用如下误差指标评价估计效果：

$$\text{Error ratio} = \frac{1}{l} \sum_{c=1}^l \left[ \frac{\sum_{k=1}^s (y_{ck} - \hat{y}_{ck})^2}{\sum_{k=1}^s (y_{ck})^2} \right]. \quad (22)$$

其中： $l$ 为量测输出向量的行数， $s$ 为待观测数据的个数。经过式 (22) 计算结果为 4.16%，表明传统的分数阶卡尔曼滤波对高斯白噪声具有较好的滤波效果。

**情形 2** 考虑  $\nu_k$  为非高斯 Lévy 量测噪声，采用分数阶卡尔曼滤波算法进行状态估计，仿真效果如图 2 所示。由图 2 可见，针对非高斯 Lévy 量测噪声的离散系统，传统的分数阶卡尔曼滤波效果较差。相比之下，采用改进的分数阶卡尔曼滤波算法，可以得到较为满意的状态估计效果，基于改进卡尔曼滤波的状态估计效果如图 3 所示。

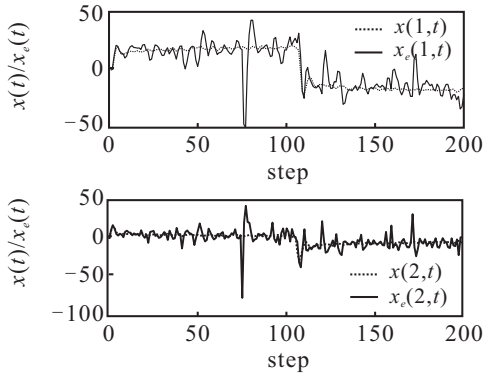


图 2 非高斯噪声下的状态估计效果(引理 1)

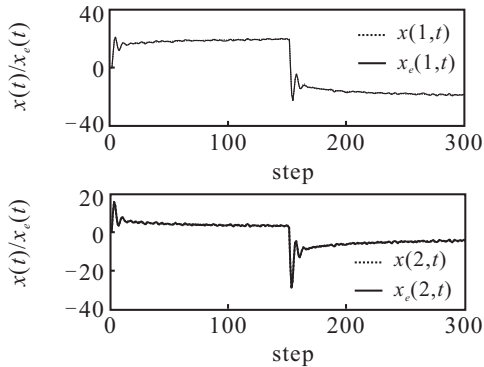


图 3 非高斯量测噪声下的状态估计效果(定理 1)

为了进一步验证算法的有效性,选取不同的实验次数  $N$  对算法进行“蒙特卡洛实验”,并计算平均相对误差,结果如表 1 和图 4 所示.可以看出,改进的分数阶卡尔曼滤波具有较好的滤波特性,并且当分数阶次满足  $0 < \alpha < 1$  时,误差精度更高.

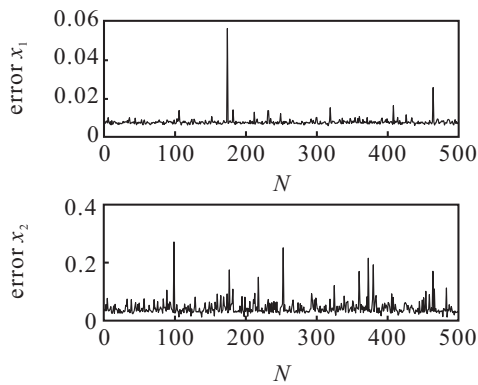


图 4 蒙特卡罗实验的相对误差

表 1 平均相对误差

抽样次数 $N$	100	200	300	500
$x_1$ 的相对误差	0.0078	0.0076	0.0080	0.0077
$x_2$ 的相对误差	0.0392	0.0418	0.0398	0.0336

## 4 结 论

本文针对量测噪声为非高斯 Lévy 噪声的离散线性分数阶随机系统的滤波设计问题,借助剔除 Lévy 噪声极大值的方法,基于最小二乘原理,提出了一种考虑非高斯 Lévy 量测噪声的改进分数阶卡尔曼滤波算法.仿真分析表明,在考虑量测噪声为非高斯 Lévy

噪声的情况下,改进的分数阶卡尔曼滤波方法具有较好的滤波效果,具有一定的实用价值.

## 参考文献(References)

- [1] Podlubny I. Fractional differential equation[M]. New York: Academic Press, 1999: 1-12.
- [2] Hamamci S E. An algorithm for stabilization of fractional-order time delay systems using fractional-order PID controllers[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(10): 1964-1969.
- [3] Faieghi M R, Kuntanapreeda S, Delavari H, et al. Robust stabilization of fractional-order chaotic systems with linear controllers: LMI-based sufficient conditions[J]. J of Vibration and Control, 2014, 20(7): 1042-1051.
- [4] Narang A, Shah S L, Chen T. Continuous-time model identification of fractional-order models with time delays[J]. IET Control Theory and Applications, 2011, 5(7): 900-912.
- [5] Idiou D, Charef A, Djouambi A. Linear fractional order system identification using adjustable fractional order differentiator[J]. IET Signal Processing, 2013, 8(4): 398-409.
- [6] Sierouiuk D, Dzieliński A. Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation[J]. Int of J Application Mathematic Computer Science, 2006, 16(1): 129-140.
- [7] Ashayeri L, Shafiee M, Menhaj M. Kalman filter for fractional order singular systems[J]. J of American Science, 2013, 9(1): 209-216.
- [8] Sadeghian H, Salarieh H, Alasty A, et al. On the fractional-order extended Kalman filter and its application to chaotic cryptography in noisy environment[J]. Application Mathematic Model, 2013, 38(3): 961-973.
- [9] Ahn A, Feldman R. Optimal filtering of a gaussian signal in the presence of Lévy noise[J]. SIAM J of Applied Mathematics, 1999, 60(5): 359-369.
- [10] Asmussen S, Rosinski J. Approximation of small jumps of Lévy processes with a view towards simulation[J]. J of Applied Probability, 2001, 38(2): 482-493.
- [11] 刘济, 高丽君. 基于 UKF 和神经网络的一类非线性系统状态估计[J]. 控制与决策, 2014, 29(11): 2076-2080. (Liu J, Gao L J. State estimation of a class of nonlinear system based on UKF and neural network[J]. Control and Decision, 2014, 29(11): 2076-2080.)
- [12] Sadeghian H, Salarieh H. On the general Kalman filter for discrete time stochastic fractional systems[J]. Mechatronics, 2013, 23(7): 764-771.
- [13] Applebaum D. Lévy processes and stochastic calculus[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2009: 84-91.

(责任编辑: 郑晓蕾)