

基于双幂次趋近律的滑模控制方法

李慧洁, 蔡远利

(西安交通大学 电子与信息工程学院, 西安 710049)

摘要: 针对滑模控制中传统趋近律存在抖振、收敛速度慢的问题, 提出一种基于特定双幂次趋近律的滑模控制方案. 双幂次趋近律具有全局快速的固定时间收敛特性, 收敛时间存在与滑模初值无关的上界. 当系统存在有界集总扰动时, 双幂次趋近律能使滑模及其一阶导数在有限时间收敛到稳态误差界内. 仿真分析验证了所提出方法的有效性.

关键词: 滑模控制; 双幂次趋近律; 固定时间收敛; 稳态误差界

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Sliding mode control with double power reaching law

LI Hui-jie, CAI Yuan-li

(School of Electronic & Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China. Correspondent: CAI Yuan-li, E-mail: ylicai@mail.xjtu.edu.cn)

Abstract: A double power reaching law-based sliding mode control approach is proposed for the low convergence speed and chattering phenomenon in the scheme with conventional reaching laws. This double power reaching law has the characteristic of global fixed-time convergence, which means the upper bound of convergence time is independent of the initial value of the sliding mode. It is proved that, for a class of uncertain systems, the sliding mode and its derivative can converge to the proposed steady-state error bounds in finite time, respectively. A typical simulation is given to validate the theoretical results presented in the paper.

Keywords: sliding mode control; double power reaching law; fixed-time convergence; steady-state error bound

0 引言

滑模控制方法是一种鲁棒的控制方法, 能够有效处理一类不确定系统的控制问题, 但传统滑模控制方法存在严重的控制抖振现象, 抖振不仅影响控制精确性, 增加能量消耗, 而且容易激发未建模的高频动态而使系统失稳. 此外, 滑模控制系统仅在滑模运动阶段对系统不确定性和匹配外扰具有不变性, 因此, 如何在减少滑模趋近时间的同时消除滑模运动阶段的抖振仍是目前研究的热点之一.

目前, 国内外针对滑模控制抖振问题的研究很多, 其中典型的是准滑模方法^[1]、高阶滑模方法^[2-4]、动态滑模方法^[5]和趋近律方法^[6]. 准滑模方法利用边界层或者连续函数近似, 有效削弱了抖振, 但降低了控制精度. 动态滑模方法和高阶滑模方法选取的滑模面不仅依赖于系统状态, 而且与系统输入甚至输入的

一阶或高阶导数有关, 因此不连续项的影响有相当部分转移到控制的一阶或高阶导数项中去, 大大削弱了抖振. 高为炳分析了抖振产生的主要原因, 提出了3种趋近律方法. 等速趋近律趋近速度恒定, 指数趋近律加快了远离滑模面时的趋近速度, 但这两种趋近律方法都不能从理论上消除抖振, 幂次趋近律在到达滑模面时趋近速度为零, 从而平滑地进入滑动模态, 消除了抖振, 但在远离滑模面时存在趋近速度过小的问题. 文献[7]结合指数趋近律和幂次趋近律提出了一种快速幂次趋近律, 综合了两者的优点. 文献[8]提出了一种全局快速收敛的双幂次趋近律, 但缺乏对该趋近律特性的定性分析. 文献[9]分析指出, 快速幂次趋近律和双幂次趋近律都具有二阶滑模特性, 并且推导了受扰时的稳态误差界. 文献[10]分析指出, 双幂次趋近律在有限收敛时间后具有二阶滑模特

收稿日期: 2014-12-15; 修回日期: 2015-03-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61308120, 61463029); 宇航动力学国家重点实验室开放基金项目(2011ADL-JD0202).

作者简介: 李慧洁(1990—), 男, 博士生, 从事滑模控制理论、飞行器制导与控制的研究; 蔡远利(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器制导、控制与仿真等研究.

性且消除了抖振,并给出了收敛时间的估计.

在以上研究的基础上,本文建立了双幂次趋近律收敛时间公式,并结合固定时间收敛理论^[11-12],分析指出双幂次趋近律具有固定时间收敛特性,即收敛时间存在与滑模初始状态无关的上界.发现了一类特定的双幂次趋近律,给出了滑模运动轨迹的解析式和收敛时间.对于一般的双幂次趋近律,给出了收敛时间的一个上界.当存在有界扰动时,滑模及其一阶导数有限时间收敛到稳态误差界内,并给出了收敛时间的估计.仿真结果表明,与快速幂次趋近律相比,双幂次趋近律在滑模趋近阶段具有更好的动态品质,即固定时间收敛特性.仿真分析验证了所提出收敛时间和受扰时稳态误差界的正确性.

1 双幂次趋近律的收敛特性分析

快速幂次趋近律和双幂次趋近律如下:

$$\dot{s} = -k_1 s - k_2 |s|^a \operatorname{sgn}(s), \quad s(0) = s_0; \quad (1)$$

$$\dot{s} = -k_1 |s|^{a_1} \operatorname{sgn}(s) - k_2 |s|^{a_2} \operatorname{sgn}(s), \quad s(0) = s_0. \quad (2)$$

其中: $k_1 > 0, k_2 > 0, 0 < a < 1, a_1 > 1, 0 < a_2 < 1$, s 为滑模控制设计中选取的滑模变量.

简单分析可知,快速幂次趋近律和双幂次趋近律本质上都是连续的,且当 $s = 0$ 时有 $\dot{s} = 0$,表明当系统状态到达滑模面时,趋近速度减小为零,实现了光滑过渡,有效地消除了控制抖振.式(1)和(2)仅第1项不同,当系统状态远离滑模面,即 $|s| > 1$ 时,双幂次趋近律的趋近速度更快.因此,与快速幂次趋近律相比,双幂次趋近律应具有更好的全局快速收敛性能.

1.1 固定时间收敛的概念及相关引理

定义 1^[11] 考虑如下非线性系统:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0. \quad (3)$$

其中: $x \in R^n$, 非线性函数 $f: R_+ \times R^n \rightarrow R^n$ 可以不连续.系统(3)的轨迹定义在 Filippov 意义下,原点是全局有限时间收敛的平衡点.若收敛时间函数 $T(x_0)$ 有界,即存在 $T_{\max} > 0$,使得 $T(x_0) \leq T_{\max}, \forall x_0 \in R^n$,则原点是系统(3)的固定时间收敛的平衡点.

引理 1^[12] 若连续的径向无界的函数 $V(x): R^n \rightarrow R_+ \cup \{0\}$ 满足以下条件: 1) $V(0) = 0$,原点是全局有限时间收敛平衡点; 2) 存在 $0 < \mu < 1, \nu > 0, r_\mu > 0, r_\nu > 0$ 使下式成立:

$$\dot{V} \leq \begin{cases} -r_\mu V^{1-\mu}, & V \leq 1; \\ -r_\nu V^{1+\nu}, & V \geq 1. \end{cases} \quad (4)$$

则原点是全局固定时间收敛的平衡点,且最大收敛时间 $T_{\max}$ 满足

$$T(x_0) \leq T_{\max} \leq \frac{1}{\mu r_\mu} + \frac{1}{\nu r_\nu}. \quad (5)$$

1.2 双幂次趋近律的固定时间收敛特性

受文献[13]的启发,在双幂次趋近律(2)的作用下,滑模变量 s 收敛到零所需时间为

$$T = \int_0^{|s_0|} \frac{1}{k_1 s^{a_1} + k_2 s^{a_2}} ds = \frac{k_1^{1/(a_1-1)} |s_0|^{1-a_1}}{1-a_1} \times F\left(1, \frac{a_1-1}{a_1-a_2}; 1 + \frac{a_1-1}{a_1-a_2}; -\frac{k_2}{k_1} |s_0|^{a_2-a_1}\right), \quad (6)$$

其中 $F(\cdot)$ 为高斯超几何函数^[14].换言之,系统(2)状态在有限时间 T 内收敛到零.

定理 1 对于系统(2),若满足 $a_1 + a_2 = 2$,则状态 s 和 $\dot{s}$ 在固定时间 $T_{\sup}$ 内收敛到零,即在有限收敛时间 T 后有 $s = \dot{s} = 0$,且收敛时间 T 存在与状态初值 s_0 无关的上确界 $T_{\sup}$,其中

$$T = \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2} (1-a_2)} \arctan\left(\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} |s_0|^{1-a_2}\right), \quad (7)$$

$$T_{\sup} = \frac{\pi}{2\sqrt{k_1 k_2} (1-a_2)}. \quad (8)$$

证明 当 $s > 0$ 时,满足 $a_1 + a_2 = 2$,则系统(2)有

$$\dot{s} + k_1 s^{2-a_2} + k_2 s^{a_2} = 0. \quad (9)$$

方程两边同除以 s^{a_2} ,化为

$$s^{-a_2} \dot{s} + k_1 s^{2-2a_2} + k_2 = 0. \quad (10)$$

令 $y = s^{1-a_2}$,则 $s = y^{1/(1-a_2)}$,代入式(10)化简后得到广义的 Riccati 微分方程为

$$\dot{y} + (1-a_2)k_1 y^2 + (1-a_2)k_2 = 0, \quad (11)$$

其通解为

$$s^{1-a_2} = y = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \tan[T_0 - \sqrt{k_1 k_2} (1-a_2)t]. \quad (12)$$

由 $s(0) = s_0$ 可得

$$s = \begin{cases} \operatorname{sgn}(s_0) \left[\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \tan(T_0 - ct) \right]^{1/(1-a_2)}, & t \leq \frac{T_0}{c}; \\ 0, & t > T_0/c. \end{cases} \quad (13)$$

其中: $T_0 = \arctan(\sqrt{k_1/k_2} |s_0|^{1-a_2})$, $c = \sqrt{k_1 k_2} (1-a_2)$.因此,收敛时间函数为

$$T = \frac{T_0}{c} = \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2} (1-a_2)} \arctan\left(\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} |s_0|^{1-a_2}\right). \quad (14)$$

观察式(14)可以发现,滑模初值 s_0 仅出现在反正切函数里.由 $\arctan(x) \in [0, \pi/2)$, $x \geq 0$,可得

$$T < T_{\sup} = \frac{\pi}{2\sqrt{k_1 k_2} (1-a_2)}. \quad (15)$$

因此,这类双幂次趋近律的收敛时间存在上确界 $T_{\sup}$,且 $T_{\sup}$ 与滑模初值 s_0 无关. $\square$

对于不满足定理1条件的双幂次趋近律,其收敛时间 T 的上确界 $T_{\sup}$ 虽然无法准确获得,但可获得一个与滑模初值 s_0 无关的上界 $T_{\max}$.

定理 2 系统 (2) 状态 s 和 $\dot{s}$ 将在固定时间 $T_{\max}$ 内收敛到零, 即在有限收敛时间 T 后有 $s = \dot{s} = 0$, 且收敛时间 T 存在与状态初值 s_0 无关的上界 $T_{\max}$, 有

$$T_{\max} = \frac{1}{k_1(a_1 - 1)} + \frac{1}{k_2(1 - a_2)}. \quad (16)$$

证明 选取 Lyapunov 函数

$$V = s^2. \quad (17)$$

可知, $s = 0$ 是全局有限时间收敛的平衡点^[10].

对 V 求一次时间导数并将式 (2) 代入, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2s\dot{s} = 2s[-k_1|s|^{a_1}\text{sgn}(s) - k_2|s|^{a_2}\text{sgn}(s)] = \\ &= -2k_1|s|^{a_1+1} - 2k_2|s|^{a_2+1} = \\ &= -2k_1V^{(a_1+1)/2} - 2k_2V^{(a_2+1)/2} = \\ &= -2k_1V^{1+(a_1-1)/2} - 2k_2V^{1-(1-a_2)/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

因此, 有

$$\dot{V} \leq \begin{cases} -2k_2V^{1-(1-a_2)/2}, & V \leq 1; \\ -2k_1V^{1+(a_1-1)/2}, & V \geq 1. \end{cases} \quad (19)$$

令 $\mu = (1 - a_2)/2$, $\nu = (a_1 - 1)/2$, $r_\mu = 2k_2$, $r_\nu = 2k_1$, 对比发现 $\dot{V}$ 满足式 (4). 因此, 由引理 1 可知, $s = 0$ 是全局固定时间收敛的平衡点, 收敛时间满足

$$T \leq T_{\max} = \frac{1}{\nu r_\nu} + \frac{1}{\mu r_\mu} = \frac{1}{k_1(a_1 - 1)} + \frac{1}{k_2(1 - a_2)}. \quad (20)$$

由此定理得证. $\square$

注 1 双幂次趋近律满足 $a_1 + a_2 = 2$ 时, 滑模 s 及其一阶导数 $\dot{s}$ 在固定时间 $T_{\sup}$ 内收敛到零, $T_{\sup}$ 由式 (8) 给出, 容易验证 $T_{\sup} < T_{\max}$.

1.3 双幂次趋近律的稳态误差界分析

考虑如下不确定系统:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + d. \quad (21)$$

其中: $x \in R^n$ 为系统状态, $u \in R$ 为控制输入, f, g 为光滑的已知向量场, d 为集总扰动. 定义滑模面 $s(x) = 0$, 控制目标是使系统状态在有限时间内到达滑模面, 且具有二阶滑模动态, 即 $s = \dot{s} = 0$.

滑模变量 s 的一阶导数为

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial s}{\partial x} f + \left(\frac{\partial s}{\partial x} g \right) u + \frac{\partial s}{\partial x} d. \quad (22)$$

假设 $\frac{\partial s}{\partial x} g$ 非奇异, 记 $d' = \frac{\partial s}{\partial x} d$, 若存在常数 $\delta > 0$, 使得 $|d'| \leq \delta$, 则基于双幂次趋近律 (2) 的控制律为

$$u = \left(\frac{\partial s}{\partial x} g \right)^{-1} \left(-\frac{\partial s}{\partial x} f + u_s \right), \quad (23)$$

其中 $u_s = -k_1|s|^{a_1}\text{sgn}(s) - k_2|s|^{a_2}\text{sgn}(s)$.

将式 (23) 代入 (22) 得到

$$\dot{s} = u_s + d' = -k_1|s|^{a_1}\text{sgn}(s) - k_2|s|^{a_2}\text{sgn}(s) + d'. \quad (24)$$

定理 3 不确定系统 (24) 的状态 s 和 $\dot{s}$ 分别有限

时间收敛到以下区域:

$$|s| \leq \min\{(\delta/k_1)^{1/a_1}, (\delta/k_2)^{1/a_2}\}, \quad (25)$$

$$|\dot{s}| \leq \min\{k_2(\delta/k_1)^{a_2/a_1}, k_1(\delta/k_2)^{a_1/a_2}\} + 2\delta. \quad (26)$$

证明 选取 Lyapunov 函数

$$V = 0.5s^2, \quad V_0 = 0.5s_0^2. \quad (27)$$

对 V 求一次时间导数并将式 (24) 代入, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} = s(u_s + d') = \\ &= -k_1|s|^{a_1+1} - k_2|s|^{a_2+1} + d's \leq \\ &= -k_1|s|^{a_1+1} - k_2|s|^{a_2+1} + \delta|s|. \end{aligned} \quad (28)$$

进一步, 式 (28) 可写成以下两种形式:

$$\dot{V} \leq -k_1|s|^{a_1+1} - (k_2|s|^{a_2} - \delta)|s|, \quad (29)$$

$$\dot{V} \leq -(k_1|s|^{a_1} - \delta)|s| - k_2|s|^{a_2+1}. \quad (30)$$

当 $|s| \geq (\delta/k_2)^{1/a_2}$, 即 $V \geq V_1 = 0.5(\delta/k_2)^{2/a_2}$ 时, 由式 (29) 可知

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \\ &= -k_1|s|^{a_1+1} = -2^{(a_1+1)/2}k_1V^{(a_1+1)/2}. \end{aligned} \quad (31)$$

故 V 由 V_0 收敛到 V_1 所需的时间 $T_1 \leq T_{1\max}$, 其中

$$\begin{aligned} T_{1\max} &= \\ &= \int_{V_1}^{V_0} \frac{1}{2^{(a_1+1)/2}k_1V^{(a_1+1)/2}} dV = \\ &= \frac{2^{(1-a_1)/2}}{k_1(a_1 - 1)} (V_1^{(1-a_1)/2} - V_0^{(1-a_1)/2}) = \\ &= \frac{1}{k_1(a_1 - 1)} ((\delta/k_2)^{(1-a_1)/a_2} - |s_0|^{1-a_1}). \end{aligned} \quad (32)$$

当 $|s| \geq (\delta/k_1)^{1/a_1}$, 即 $V \geq V_2 = 0.5(\delta/k_1)^{2/a_1}$ 时, 由式 (30) 可知

$$\dot{V} \leq -k_2|s|^{a_2+1} = -2^{(a_2+1)/2}k_2V^{(a_2+1)/2}. \quad (33)$$

故 V 由 V_0 收敛到 V_2 所需的时间 $T_2 \leq T_{2\max}$, 其中

$$\begin{aligned} T_{2\max} &= \\ &= \int_{V_2}^{V_0} \frac{1}{2^{(a_2+1)/2}k_2V^{(a_2+1)/2}} dV = \\ &= \frac{2^{(1-a_2)/2}}{k_2(1 - a_2)} (V_0^{(1-a_2)/2} - V_2^{(1-a_2)/2}) = \\ &= \frac{1}{k_2(1 - a_2)} (|s_0|^{1-a_2} - (\delta/k_1)^{(1-a_2)/a_1}). \end{aligned} \quad (34)$$

综上所述, 状态 s 将有限时间内收敛到区域

$$|s| \leq \min\{(\delta/k_1)^{1/a_1}, (\delta/k_2)^{1/a_2}\}. \quad (35)$$

将式 (35) 代入 (24) 可得

$$\begin{aligned} |\dot{s}| &\leq k_1|s|^{a_1} + k_2|s|^{a_2} + |d'| \leq \\ &= \min\{k_2(\delta/k_1)^{a_2/a_1}, k_1(\delta/k_2)^{a_1/a_2}\} + 2\delta. \end{aligned} \quad (36)$$

由此定理 3 得证. $\square$

注 2 由式 (35) 和 (36) 可知, 该稳态误差界与扰动上界有关, 增大 k_1 和 k_2 可以减小稳态误差界.

2 仿真算例及分析

考虑非线性 SISO 系统

$$\dot{s} = u + d(t), \quad s(0) = s_0. \quad (37)$$

其中: s 为滑模变量, d 为有界集总扰动, u 为控制输入。

对于确定系统 (37), 即 $d = 0$ 时, 设置 4 种滑模初值, $s_0 = 1, s_0 = 10, s_0 = 100, s_0 = 1000$, 控制输入 u 分别采用快速幂次趋近律和双幂次趋近律, 检验本文提出的双幂次趋近律的固定时间收敛特性。

对不确定系统 (37), 取 $d = 0.3 + 0.5 \sin(2t)$, 设置滑模初值 $s_0 = 5$, 检验本文提出的双幂次趋近律的稳态误差界和收敛时间的正确性。

2.1 双幂次趋近律收敛特性仿真

对于确定系统 (37), 即 $d = 0$, 分别采用如下控制律:

1) 快速幂次趋近律

$$u_1 = -s - |s|^{1/2} \operatorname{sgn}(s). \quad (38)$$

2) 双幂次趋近律 1

$$u_2 = -|s|^{3/2} \operatorname{sgn}(s) - |s|^{1/2} \operatorname{sgn}(s). \quad (39)$$

3) 双幂次趋近律 2

$$u_3 = -|s|^2 \operatorname{sgn}(s) - |s|^{1/2} \operatorname{sgn}(s). \quad (40)$$

滑模 s 及其一阶导数绝对值 $|\dot{s}|$ 的收敛曲线如图 1~图 3 所示。为了显示清晰, 图中纵轴均采用对数坐标。

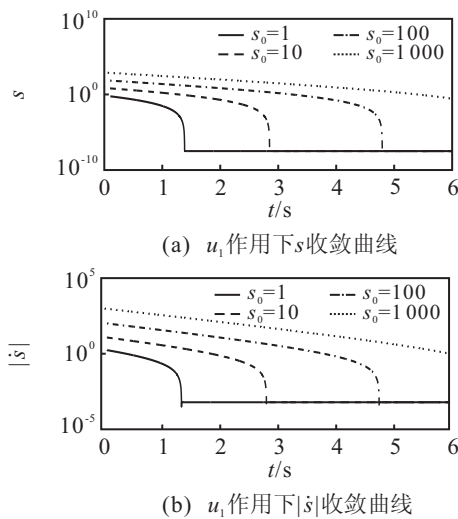
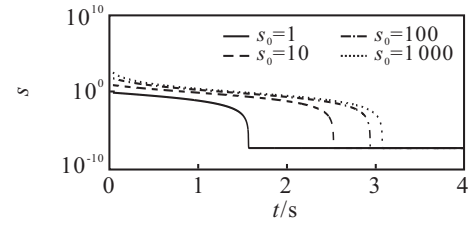


图 1 u_1 作用下 s 和 $|\dot{s}|$ 收敛曲线

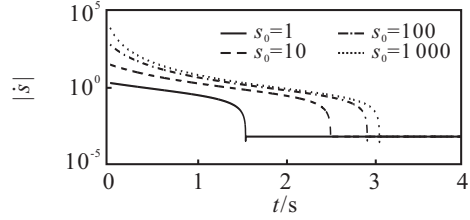
图 1 表明, 快速幂次趋近律使滑模 s 及其一阶导数 $\dot{s}$ 有限时间收敛, 但收敛时间受滑模初值 s_0 影响较大, 且不存在与滑模初值 s_0 无关的收敛时间上界。

由定理 1 可知, 控制律 u_2 作用下, 即采用双幂次趋近律 1, 滑模 s 及其一阶导数 $\dot{s}$ 的收敛时间为

$$T_{u_2} = 2 \arctan(|s_0|^{1/2}) < T_{u_2, \sup} = \pi. \quad (41)$$

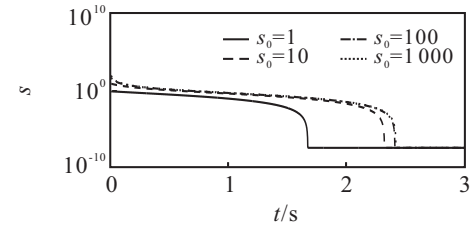


(a) u_2 作用下 s 收敛曲线

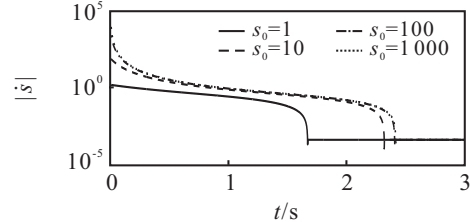


(b) u_2 作用下 $|\dot{s}|$ 收敛曲线

图 2 u_2 作用下 s 和 $|\dot{s}|$ 收敛曲线



(a) u_3 作用下 s 收敛曲线



(b) u_3 作用下 $|\dot{s}|$ 收敛曲线

图 3 u_3 作用下 s 和 $|\dot{s}|$ 收敛曲线

由图 2 可见, 当滑模初值 $s_0 = 1000$ 时, 滑模 s 及其一阶导数 $\dot{s}$ 的收敛时间约为 3.1 s。

由定理 2 可知, 控制律 u_3 作用下, 即采用双幂次趋近律 2, 滑模 s 及其一阶导数 $\dot{s}$ 收敛时间的一个上界为

$$T_{u_3, \max} = \frac{1}{2-1} + \frac{1}{1-1/2} = 3. \quad (42)$$

由图 3 可见, 当滑模初值 $s_0 = 1000$ 时, 滑模 s 及其一阶导数 $\dot{s}$ 的收敛时间约为 2.4 s。

由图 1~图 3 可见, 双幂次趋近律和快速幂次趋近律都实现了滑模变量在滑模面附近的光滑过渡, 没有出现控制抖振现象。

2.2 双幂次趋近律稳态误差界仿真

不确定系统 (37) 中 $\delta = 0.8$, 采用双幂次趋近律 (39), 滑模 s 及其一阶导数收敛情况如图 4 所示。

由定理 3 可知, 采用双幂次趋近律 (39), 滑模 s 和滑模一阶导数 $\dot{s}$ 有限时间 T 内分别收敛到以下区域:

$$|s| \leq \min\{0.8^{2/3}, 0.8^2\} = 0.64, \quad (43)$$

$$|\dot{s}| \leq \min\{0.8^{1/3}, 0.8^3\} + 1.6 = 2.112, \quad (44)$$

其中 $T \leq T_{1\max} = 2(0.8^{-1} - 5^{-1/2}) = 1.60$ s.

图4表明,对于不确定系统(37),双幂次趋近律能使滑模 s 和滑模一阶导数 $\dot{s}$ 有限时间分别收敛到稳态误差界内,收敛时间约为1.3 s.

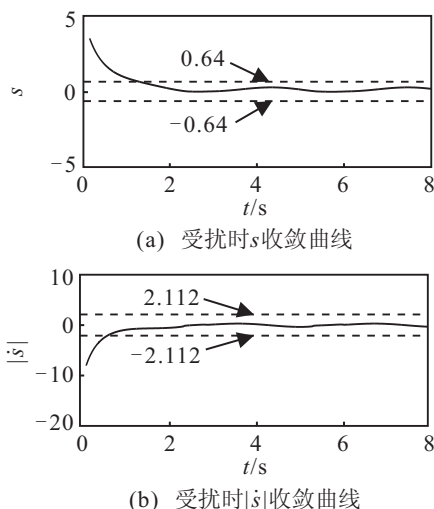


图4 受扰时 s 和 $|\dot{s}|$ 收敛曲线

2.3 实际应用中干扰处理方案

上述仿真算例的结果表明,当存在有界集总扰动时,双幂次趋近律不再具有固定时间收敛特性,仅能使滑模变量有限时间收敛到与扰动上界有关的稳态误差界内.因此,在实际应用中,可以采用干扰观测器^[15]在线估计扰动,并在控制输出中补偿,以保证双幂次趋近律的固定时间收敛特性.

3 结论

本文提出了一种基于双幂次趋近律的滑模控制方案.对于确定系统,双幂次趋近律具有全局快速的固定时间收敛特性,有效消除了控制抖振,且收敛后具有二阶滑模特性.当存在有界集总扰动时,滑模及其一阶导数有限时间收敛到稳态误差界内.仿真分析验证了所提出方法的有效性.

参考文献(References)

[1] Slotine J J E, Li W. Applied nonlinear control[M]. NJ: Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1991: 290-301.
 [2] Levant A. Universal single-input-single-output(SISO) sliding-mode controllers with finite-time convergence[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(9): 1447-1451.
 [3] Laghrouche S, Plestan F, Glumineau A. Higher order sliding mode control based on integral sliding mode[J]. Automatica, 2007, 43(3): 531-537.

[4] Defoort M, Floquet T, Kokosy A, et al. A novel higher order sliding mode control scheme[J]. Systems & Control Letters, 2009, 58(2): 102-108.
 [5] Siraramirez H. On the dynamic sliding mode control of nonlinear systems[J]. Int J of Control, 1993, 57(5): 1039-1061.
 [6] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1996: 220-221.
 (Gao W B. Theory and design method for variable sliding mode control[M]. Beijing: Science Press, 1996: 220-221.)
 [7] Yu S H, Yu X H, Shirinzadeh B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode[J]. Automatica, 2005, 41(11): 1957-1964.
 [8] 梅红, 王勇. 快速收敛的机器人滑模变结构控制[J]. 信息与控制, 2009, 38(5): 552-557.
 (Mei H, Wang Y. Fast convergent sliding mode variable structure control of robot[J]. Information and Control, 2009, 38(5): 552-557.)
 [9] 李鹏, 马建军, 郑志强. 采用幂次趋近律的滑模控制稳态误差界[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(5): 619-624.
 (Li P, Ma J J, Zheng Z Q. Sliding mode control approach based on nonlinear integrator[J]. Control Theory & Applications, 2011, 28(5): 619-624.)
 [10] 张合新, 范金锁, 孟飞, 等. 一种新型滑模控制双幂次趋近律[J]. 控制与决策, 2013, 28(2): 289-293.
 (Zhang H X, Fan J S, Meng F, et al. A new double power reaching law for sliding mode control[J]. Control and Decision, 2013, 28(2): 289-293.)
 [11] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2012, 57(8): 2106-2110.
 [12] Polyakov A, Fridman L. Stability notions and Lyapunov functions for sliding mode control systems[J]. J of the Franklin Institute-Engineering and Applied Mathematics, 2014, 351(4): 1831-1865.
 [13] Yang L, Yang J Y. Nonsingular fast terminal sliding-mode control for nonlinear dynamical systems[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2011, 21(16): 1865-1879.
 [14] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of mathematical functions: With formulas, graphs, and mathematical tables[M]. New York: Courier Dover Publications, 1972: 556-557.
 [15] Shtessel Y B, Tournes C H. Advances in guidance and control of aerospace vehicles using sliding mode control and observation techniques[J]. J of the Franklin Institute-Engineering and Applied Mathematics, 2012, 349(2): 391-396.

(责任编辑: 郑晓蕾)