

一类不确定切换中立型系统的鲁棒滑模控制

肖会敏¹, 刘振²

(1. 河南财经政法大学信息与系统工程研究所, 郑州 450003; 2. 中国海洋大学数学科学学院, 山东 青岛 266100)

摘要: 针对一类不确定切换中立型系统, 设计相应的积分型滑模面. 基于平均驻留时间方法和线性矩阵不等式技术, 给出滑模动力学系统鲁棒指数渐近稳定的时滞相关性判据. 通过设计滑模控制器, 使闭环系统的状态满足到达条件. 数值仿真表明, 所提出的方法是有效可行的.

关键词: 切换中立型系统; 指数镇定; 平均驻留时间; 积分滑模控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Robust sliding mode control for a class of uncertain switched neutral systems

XIAO Hui-min¹, LIU Zhen²

(1. Institute of Information and Systems Engineering, He'nan University of Finance and Economics, Zhengzhou 450003, China; 2. School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao 266100, China. Correspondent: LIU Zhen, E-mail: liuzhen8788@163.com)

Abstract: An integral sliding surface is constructed for a class of uncertain switched neutral systems. Based on the average dwell time approach and the linear matrix inequality technique, a delay-dependent robust exponential stability criterion is presented for sliding mode dynamics(SMDs) with all admissible uncertainties under some decay rate. An sliding mode control(SMC) law is synthesized for reaching motion. A numerical simulation example illustrates the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Keywords: switched neutral systems; exponential stabilization; average dwell time; integral sliding mode control

0 引言

切换系统是混杂动态系统的一个重要分支, 它由一系列连续或离散的子系统以及协调这些子系统之间切换运行的规则组成. 在化工过程、传输系统、计算机控制系统以及通讯工业等实际系统中, 切换系统都有着广泛的应用. 近年来, 切换系统的稳定性与镇定等问题引起了众多学者的关注^[1-2]. 此外, 时滞的存在使系统的分析与综合变得更加复杂和困难, 也往往是系统失稳和性能变差的主要因素. 目前, 已有大量的文献对时滞切换系统进行研究, 并获得了诸多有意义的进展^[3-5].

中立型系统作为一类特殊的时滞系统, 其系统的状态和状态的导数均含有时滞, 该类系统对于时滞的影响更为敏感. 若切换系统中每个子系统均为中立型系统, 则称为切换中立型系统. 由于状态的导数中含

有时滞, 对这种系统的研究相对于仅含有状态时滞的系统而言更加复杂. 目前, 人们在系统的鲁棒稳定性与鲁棒控制方面已经取得了一定的成果^[6-14].

滑模控制作为消除不确定性影响的有效控制策略, 具有响应速度快、鲁棒性能好等优点, 已被成功应用于许多实际工业系统中, 例如机器人系统、电力系统、水下推进器、航天器等. 近年来, 切换系统的滑模控制理论引起了人们的研究兴趣^[15-23]. 文献[15]提出了一种采用带有调整参数递归式滑模函数的离散滑模控制方案, 研究了一类不确定离散切换系统的滑模控制问题; 文献[16]针对一类带有多时滞的不确定离散马尔科夫跳变系统, 给出了系统在准滑模面上随机稳定的充分条件, 进而获得了该系统鲁棒滑模控制的结果.

对于连续系统的情形, 文献[17-18]通过设计系

收稿日期: 2014-12-17; 修回日期: 2015-04-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61374079); 河南省基础与前沿技术研究项目(132300410011).

作者简介: 肖会敏(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统建模与分析、混杂系统等研究; 刘振(1987-), 男, 博士生, 从事混杂系统、滑模变结构控制等研究.

统的单一滑模面,研究了变时滞不确定切换系统的滑模控制问题;文献[19]结合 H 无穷理论,进一步讨论了带有时滞的不确定切换系统的 H 无穷滑模变结构控制;文献[20]通过对各个子系统分别设计滑模面,给出了不确定时滞切换系统的鲁棒滑模控制方案,并在此基础上对系统的无源性进行了分析.针对一类带有马尔可夫跳变的不确定随机系统,文献[21]研究了其滑模控制问题,同时讨论了基于观测器的滑模降阶控制.此外,对于广义切换系统,文献[22-23]设计了积分型多滑模面,研究了该类系统的鲁棒滑模控制问题.然而,目前有关切换中立型系统的滑模控制的研究成果尚不多见.

综上所述,对于一类同时含有非匹配不确定性和非线性扰动的切换中立型系统,本文探讨了该类系统鲁棒指数渐近稳定的滑模控制方案.首先,设计一种积分型滑模面,利用平均驻留时间方法和线性矩阵不等式技术,得到滑模动力学系统在任意切换规则下鲁棒指数渐近稳定的时滞相关性判据;然后,设计滑模变结构控制器,使得系统的状态能于有限时刻到达预先设计的滑模面上,并产生滑动模态;最后,通过数值仿真结果表明了所提出方法的有效性和可行性.

1 问题描述

考察下面含有变时滞与非匹配不确定性的切换中立型系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - D_{\sigma(t)}\dot{x}(t - \tau_1) = & \\ [A_{\sigma(t)} + \Delta A_{\sigma(t)}(t)]x(t) + & \\ [A_{d\sigma(t)} + \Delta A_{d\sigma(t)}(t)]x(t - \tau_2(t)) + & \\ B_{\sigma(t)}[u(t) + f_{\sigma(t)}(t, x)]; & \\ x(s) = \varphi(s), \dot{x}(s) = \psi(s), s \in [-\tau, 0]. & \quad (1) \end{aligned}$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为系统的控制输入; 切换信号 $\sigma(t) : [0, +\infty) \rightarrow \Pi = \{1, 2, \dots, N\}$ 为分段右连续常值函数, $\sigma(t) = i$ 表示第 i 个子系统运行; $\varphi(s)$ 为系统初始条件函数. 系统的离散时滞 $\tau_1, \tau_2(t)$ 满足: $0 < \tau_1, 0 < \tau_2(t) \leq \tau_2, \dot{\tau}_2(t) \leq \mu < 1; \tau = \max\{\tau_1, \tau_2\}$, 且 τ_1, τ_2, μ 均已知. 系统矩阵 A_i, A_{di}, D_i 和 B_i 均为适当维数的已知实矩阵且 B_i 为列满秩. $\Delta A_i(t), \Delta A_{di}(t)$ 为系统的不确定参数, 并满足以下条件:

$$[\Delta A_i(t) \quad \Delta A_{di}(t)] = M_i F_i(t) [N_i \quad N_{di}].$$

这里: M_i, N_i 和 N_{di} 均为已知实矩阵; $F_i(t)$ 为时间 t 的不确定实函数且满足 $F_i^T(t)F_i(t) \leq I$. $f_i(t, x)$ 为系统的非线性项, 且存在函数 $\alpha_i(t)$ 满足 $\|f_i(t, x)\| \leq \alpha_i(t)$.

定义 1 给定常数 $\beta > 0$, 称系统 (1) 在切换信

号 $\sigma(t)$ 下是指数渐近稳定的, 若存在常数 $\delta \geq 1$ 满足以下条件:

$$\|x(t)\| \leq \delta e^{-\beta(t-t_0)} \|\varphi\|_{\tau}, \forall t \geq t_0,$$

其中 $\|\varphi\|_{\tau} = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \{\|\varphi(t_0 + s)\|, \|\dot{\varphi}(t_0 + s)\|\}$.

定义 2^[24] 对于任意时刻 $T_2 > T_1 \geq 0$, 用 $N_{\sigma}(T_1, T_2)$ 表示在时间段 (T_1, T_2) 上的切换次数. 若存在 $T_a > 0, N_0 \geq 0$, 使得不等式

$$N_{\sigma}(T_1, T_2) \leq N_0 + (T_2 - T_1)/T_a$$

成立, 则称 T_a 为平均驻留时间, N_0 为抖振界. 为了研究方便, 本文取 $N_0 = 0$.

引理 1^[25] 对于任意的正定矩阵 Y 和适当维数的可微向量函数 $x(t)$, 有以下不等式成立:

$$\begin{aligned} \left[\int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \right]^T Y \left[\int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \right] \leq \\ \tau \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) Y \dot{x}(s) ds. \end{aligned}$$

引理 2^[26] 设 Z, S, Q 为具有适当维数的矩阵, 且 Z 为对称阵, 则对于任意满足 $\Gamma^T(t)\Gamma(t) \leq I$ 的 $\Gamma(t)$, 有 $Z + S^T \Gamma(t)Q + Q^T \Gamma(t)^T S < 0$, 当且仅当存在一个常数 $\lambda > 0$, 使下面的不等式成立:

$$Z + \lambda^{-1} S^T S + \lambda Q^T Q < 0.$$

2 主要结果

2.1 积分滑模面的设计

设计如下积分型滑模面泛函:

$$\begin{aligned} s(t) = & \\ G_i[x(t) - D_i x(t - \tau_1)] - \int_0^t G_i A_{di} x(s - \tau_2(s)) ds - & \\ \int_0^t G_i (A_i + B_i K_i) x(s) ds. & \quad (2) \end{aligned}$$

其中: $G_i, K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 均为待定矩阵; A_i, A_{di} 和 D_i 为系统定义的矩阵; 特别地, G_i 满足 $G_i B_i$ 非奇异.

根据滑模控制理论的等效控制原理, 当系统的状态处于滑动模态时, 有

$$s(t) = 0, \dot{s}(t) = 0.$$

由此可得等效控制为

$$\begin{aligned} u_{\text{eq}} = [K_i - (G_i B_i)^{-1} G_i \Delta A_i(t)]x(t) - f_i(t, x) - & \\ (G_i B_i)^{-1} G_i \Delta A_{di}(t)x(t - \tau_2(t)). & \quad (3) \end{aligned}$$

将式 (3) 代入 (1), 可得滑模运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - D_i \dot{x}(t - \tau_1) = & \\ [A_i + B_i K_i + G_{B_i} \Delta A_i(t)]x(t) + & \\ [A_{di} + G_{B_i} \Delta A_{di}(t)]x(t - \tau_2(t)), & \quad (4) \end{aligned}$$

其中 $G_{B_i} = I - B_i (G_i B_i)^{-1} G_i$.

注 1 根据所设计的积分型滑模面可得形式较为简便的滑模运动方程, 这不仅有利于讨论滑模动力学系统 (4) 的性态特征和参数设计问题, 也便于滑模

控制器的综合.

首先, 考虑滑模动力学系统 (4) 的标称系统, 即

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - D_i \dot{x}(t - \tau_1) = \\ [A_i + B_i K_i]x(t) + A_{di}x(t - \tau_2(t)). \end{aligned} \quad (5)$$

定理 1 给定标量 $\varepsilon_{ij}, j = 1, 2, 3, 4, \beta > 0$. 若存在正定矩阵 $\hat{P}_i, \hat{Q}_i, \hat{R}_i, \hat{Z}_i$ 以及矩阵 X_i, Υ_i , 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\hat{\Theta}_i = \begin{bmatrix} \hat{\Theta}_{i11} & \hat{\Theta}_{i12} & \hat{\Theta}_{i13} & \hat{\Theta}_{i14} \\ * & \hat{\Theta}_{i22} & \hat{\Theta}_{i23} & \hat{\Theta}_{i24} \\ * & * & \hat{\Theta}_{i33} & \hat{\Theta}_{i34} \\ * & * & * & \hat{\Theta}_{i44} \end{bmatrix} < 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_i \leq \kappa \hat{P}_l, \hat{Q}_i \leq \kappa \hat{Q}_l, \hat{R}_i \leq \kappa \hat{R}_l, \hat{Z}_i \leq \kappa \hat{Z}_l, \kappa \geq 1, \\ \forall i, l \in \Pi, \end{aligned} \quad (7)$$

则标称滑模动力学系统 (5) 在任意切换信号下是指数渐近稳定的, 且平均驻留时间满足

$$T_a > T_a^* = \ln k / \beta, \quad (8)$$

滑模增益矩阵 $K_i = X_i \Upsilon_i^{-T}$. 其中: 符号 * 代表矩阵的对称项, 而

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_{i11} &= -\varepsilon_{i1} \text{sym}\{A_i \Upsilon_i^T + B_i X_i\} + \hat{Q}_i - \\ &\quad e^{-\beta \tau_2} \hat{Z}_i + \beta \hat{P}_i, \\ \hat{\Theta}_{i12} &= -\varepsilon_{i2} (A_i \Upsilon_i^T + B_i X_i)^T + \hat{P}_i + \varepsilon_{i1} \Upsilon_i^T, \\ \hat{\Theta}_{i13} &= -\varepsilon_{i1} A_{di} \Upsilon_i^T - \varepsilon_{i3} (A_i \Upsilon_i^T + B_i X_i)^T + \\ &\quad e^{-\beta \tau_2} \hat{Z}_i, \\ \hat{\Theta}_{i14} &= -\varepsilon_{i1} D_i \Upsilon_i^T - \varepsilon_{i4} (A_i \Upsilon_i^T + B_i X_i)^T, \\ \hat{\Theta}_{i22} &= \varepsilon_{i2} (\Upsilon_i + \Upsilon_i^T) + \hat{R}_i + \tau_2^2 \hat{Z}_i, \\ \hat{\Theta}_{i23} &= -\varepsilon_{i2} A_{di} \Upsilon_i^T + \varepsilon_{i2} \Upsilon_i, \\ \hat{\Theta}_{i24} &= -\varepsilon_{i2} D_i \Upsilon_i^T + \varepsilon_{i4} \Upsilon_i, \\ \hat{\Theta}_{i33} &= -\varepsilon_{i3} \text{sym}\{A_{di} \Upsilon_i^T\} + (\mu - 1) e^{-\beta \tau_2} \hat{Q}_i - \\ &\quad e^{-\beta \tau_2} \hat{Z}_i, \\ \hat{\Theta}_{i34} &= -\varepsilon_{i3} D_i \Upsilon_i^T - \varepsilon_{i4} \Upsilon_i A_{di}^T, \\ \hat{\Theta}_{i44} &= -\varepsilon_{i4} \text{sym}\{D_i \Upsilon_i^T\} - e^{-\beta \tau_1} \hat{R}_i. \end{aligned}$$

证明 为了方便起见, 将 $A_i + A_i^T$ 简记为 $\text{sym}\{A_i\}$. 选取如下 Lyapunov 函数:

$$V_i(t) = V_{i1}(t) + V_{i2}(t) + V_{i3}(t) + V_{i4}(t).$$

其中

$$\begin{aligned} V_{i1}(t) &= x^T(t) P_i x(t), \\ V_{i2}(t) &= \int_{t-\tau_2(t)}^t e^{\beta(s-t)} x^T(s) Q_i x(s) ds, \\ V_{i3}(t) &= \int_{t-\tau_1}^t e^{\beta(s-t)} \dot{x}^T(s) R_i \dot{x}(s) ds, \\ V_{i4}(t) &= \tau_2 \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t e^{\beta(s-t)} \dot{x}^T(s) Z_i \dot{x}(s) ds d\theta. \end{aligned}$$

对 $V_{ij}(t) (j = 1, 2, 3, 4)$ 分别沿系统 (5) 的解求导, 可得

$$\dot{V}_{i1}(t) = 2x(t) P_i \dot{x}(t), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i2}(t) \leq x^T(t) Q_i x(t) - (1 - \mu) e^{-\beta \tau_2} \cdot \\ x^T(t - \tau_2(t)) Q_i x(t - \tau_2(t)) - \beta V_{i2}(t), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i3}(t) = x^T(t) R_i x(t) - e^{-\beta \tau_1} \cdot \\ x^T(t - \tau_1) R_i x(t - \tau_1) - \beta V_{i3}(t), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i4}(t) \leq \tau_2^2 \dot{x}^T(t) Z_i \dot{x}(t) - \beta V_{i4}(t) - \\ \tau_2 e^{-\beta \tau_2} \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}^T(s) Z_i \dot{x}(s) ds, \end{aligned} \quad (12)$$

由引理 1 和牛顿-莱布尼茨公式可得

$$\begin{aligned} -\tau_2 e^{-\beta \tau_2} \int_{t-\tau_2}^t \dot{x}^T(s) Z_i \dot{x}(s) ds \leq \\ -e^{-\beta \tau_2} \left[\int_{t-\tau_2}^t \dot{x}^T(s) ds \right]^T Z_i \left[\int_{t-\tau_2}^t \dot{x}^T(s) ds \right] \leq \\ -e^{-\beta \tau_2} [x^T Z_i x(t) - 2x^T(t) Z_i x(t - \tau_2(t)) + \\ x^T(t - \tau_2(t)) Z_i x(t - \tau_2(t))]. \end{aligned} \quad (13)$$

又由标称系统等式可得

$$\begin{aligned} 2\xi^T(t) L_i [\dot{x}(t) - D_i \dot{x}(t - \tau_1) - \\ A_{iK_i} x(t) - A_{di} x(t - \tau_2(t))] = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \xi^T(t) &= [x^T(t) \dot{x}^T(t) x^T(t - \tau_2(t)) \dot{x}^T(t - \tau_1)], \\ L_i &= [L_{i1}^T \ L_{i2}^T \ L_{i3}^T \ L_{i4}^T]^T, A_{iK_i} = A_i + B_i K_i. \end{aligned}$$

结合式 (6)、(9)~(14), 可得

$$\dot{V}_i(t) + \beta V_i(t) \leq \xi^T(t) \Theta_i \xi(t) \leq 0. \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} \Theta_i &= \begin{bmatrix} \Theta_{i11} & \Theta_{i12} & \Theta_{i13} & \Theta_{i14} \\ * & \Theta_{i22} & \Theta_{i23} & \Theta_{i24} \\ * & * & \Theta_{i33} & \Theta_{i34} \\ * & * & * & \Theta_{i44} \end{bmatrix}, \\ \Theta_{i11} &= \text{sym}\{-L_{i1} (A_i + B_i K_i)\} + Q_i - \\ &\quad e^{-\beta \tau_2} Z_i + \beta P_i, \\ \Theta_{i12} &= L_{i1} - (A_i + B_i K_i)^T L_{i2}^T + P_i, \\ \Theta_{i13} &= -L_{i1} A_{di} - (A_i + B_i K_i)^T L_{i3}^T + e^{-\beta \tau_2} Z_i, \\ \Theta_{i14} &= -L_{i1} D_i - (A_i + B_i K_i)^T L_{i4}^T, \\ \Theta_{i22} &= L_{i2} + L_{i2}^T + R_i + \tau_2^2 Z_i, \\ \Theta_{i23} &= -L_{i2} A_{di} + L_{i3}^T, \\ \Theta_{i24} &= -L_{i2} D_i + L_{i4}^T, \\ \Theta_{i34} &= -L_{i3} D_i - A_{di}^T L_{i4}^T, \\ \Theta_{i33} &= (\mu - 1) e^{-\beta \tau_2} Q_i - e^{-\beta \tau_2} Z_i + \\ &\quad \text{sym}\{-L_{i3} A_{di}\}, \\ \Theta_{i44} &= \text{sym}\{-L_{i4} D_i\} - e^{-\beta \tau_1} R_i. \end{aligned}$$

注意到 $\dot{V}_i(t) + \beta V_i(t) \leq 0$, 则对于 $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, 对

式(15)从 t_k 到 t 积分, 可得

$$V_{\sigma(t)}(t) \leq e^{-\beta(t-t_k)} V_{\sigma(t_k)}(t_k). \quad (16)$$

设 t_k 为第 j 个子系统到第 i 个子系统的切换时刻, 则有 $\sigma(t_k^-) = j, \sigma(t_k^+) = i$. 由 $N_{\sigma}(t_0, t) \leq (t - t_0)/T_a$, 以及式(7)和(16), 可得

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(t) &\leq e^{-\beta(t-t_k)} \kappa V_{\sigma(t_k^-)}(t_k^-) \leq \dots \leq \\ &e^{-\beta(t-t_0)} \kappa^{N_{\sigma}(t_0, t)} V_{\sigma(t_0)}(t_0) \leq \\ &e^{-(\beta - \ln \kappa / T_a)(t-t_0)} V_{\sigma(t_0)}(t_0). \end{aligned} \quad (17)$$

记

$$\begin{aligned} \lambda &= \min_{\forall i \in \Pi} \{\lambda_{\min}(P_i)\}, \\ \bar{\lambda} &= \max_{\forall i \in \Pi} \{\lambda_{\max}(P_i) + \tau_2 \lambda_{\max}(Q_i) + \\ &\tau_1 \lambda_{\max}(R_i) + \tau_2^3 \lambda_{\max}(Z_i)\}. \end{aligned}$$

又根据 Lyapunov 函数可得

$$\Delta \|x(t)\|^2 \leq V_{i1}(t) \leq V_{\sigma(t)}(t), \quad V_{\sigma(t)}(t_0) \leq \bar{\lambda} \|\varphi\|_{\tau}^2.$$

因此有

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda} V_{\sigma(t)}(t) \leq \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} e^{-(\beta - \ln \kappa / T_a)(t-t_0)} \|\varphi\|_{\tau}^2,$$

即

$$\|x(t)\| \leq \delta \cdot e^{-\hat{\beta}(t-t_0)} \|\varphi\|_{\tau}.$$

其中

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{\bar{\lambda} \cdot \lambda^{-1}} \geq 1, \\ \hat{\beta} &= \frac{1}{2}(\beta - \ln \kappa / T_a). \end{aligned}$$

由此可知, 标称系统(5)在平均驻留时间满足式(8)的情况下是指数渐近稳定的, 且具有 $\hat{\beta}$ 稳定裕度.

另一方面, 为了得到滑模面参数 K_i , 令

$$L_{ij} = \varepsilon_{ij} \Upsilon_i^{-1}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

并记

$$\begin{aligned} \hat{P}_i &= \Upsilon_i P_i \Upsilon_i^T, \quad \hat{Q}_i = \Upsilon_i Q_i \Upsilon_i^T, \quad \hat{R}_i = \Upsilon_i R_i \Upsilon_i^T, \\ \hat{Z}_i &= \Upsilon_i Z_i \Upsilon_i^T, \quad X_i = K_i \Upsilon_i^T, \end{aligned}$$

对 $\Theta_i < 0$ 两边分别左、右乘

$$\text{diag}\{\Upsilon_i, \Upsilon_i, \Upsilon_i, \Upsilon_i\}, \text{diag}\{\Upsilon_i^T, \Upsilon_i^T, \Upsilon_i^T, \Upsilon_i^T\},$$

由此定理 1 得证. \square

注 2 矩阵 Υ_i 为非奇异的. 由式(6)和负定矩阵的性质可得

$$\hat{\Theta}_{i22} = \varepsilon_{i2}(\Upsilon_i + \Upsilon_i^T) + \hat{R}_i + \tau_2^2 \hat{Z}_i < 0.$$

事实上, 假定 Υ_i 奇异, 则由 $\varepsilon_{i2}(\Upsilon_i + \Upsilon_i^T) < 0$ 可知 Υ_i 为非奇异, 自相矛盾.

下面考虑不确定滑模动力学系统(4)的鲁棒指数渐近稳定性.

定理 2 给定标量 $\varepsilon_{ij}, j = 1, 2, 3, 4, \beta > 0$. 若存在正定矩阵 $\hat{P}_i, \hat{Q}_i, \hat{R}_i, \hat{Z}_i$, 矩阵 X_i, Υ_i 以及常数 λ_i

$> 0, i \in \Pi$, 使得式(7)、(8)以及如下线性矩阵不等式成立:

$$\tilde{\Theta}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_{i11} & \tilde{\Theta}_{i12} & \tilde{\Theta}_{i13} & \tilde{\Theta}_{i14} & \Upsilon_i N_i^T \\ * & \tilde{\Theta}_{i22} & \hat{\Theta}_{i23} & \tilde{\Theta}_{i24} & 0 \\ * & * & \tilde{\Theta}_{i33} & \tilde{\Theta}_{i34} & \Upsilon_i N_{di}^T \\ * & * & * & \tilde{\Theta}_{i44} & 0 \\ * & * & * & * & -\lambda_i I \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

则切换系统(1)的滑模动力学系统(4)在任意切换信号下是鲁棒指数渐近稳定的. 其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_{i11} &= \hat{\Theta}_{i11} + \lambda_i \varepsilon_{i1}^2 M_{Gi} M_{Gi}^T, \\ \tilde{\Theta}_{i12} &= \hat{\Theta}_{i12} + \lambda_i \varepsilon_{i1} \varepsilon_{i2} M_{Gi} M_{Gi}^T, \\ \tilde{\Theta}_{i13} &= \hat{\Theta}_{i13} + \lambda_i \varepsilon_{i1} \varepsilon_{i3} M_{Gi} M_{Gi}^T, \\ \tilde{\Theta}_{i14} &= \hat{\Theta}_{i14} + \lambda_i \varepsilon_{i1} \varepsilon_{i4} M_{Gi} M_{Gi}^T, \\ \tilde{\Theta}_{i22} &= \hat{\Theta}_{i22} + \lambda_i \varepsilon_{i2}^2 M_{Gi} M_{Gi}^T, \\ \tilde{\Theta}_{i23} &= \hat{\Theta}_{i23} + \lambda_i \varepsilon_{i2} \varepsilon_{i3} M_{Gi} M_{Gi}^T, \\ \tilde{\Theta}_{i24} &= \hat{\Theta}_{i24} + \lambda_i \varepsilon_{i2} \varepsilon_{i4} M_{Gi} M_{Gi}^T, \\ \tilde{\Theta}_{i33} &= \hat{\Theta}_{i33} + \lambda_i \varepsilon_{i3}^2 M_{Gi} M_{Gi}^T, \\ \tilde{\Theta}_{i34} &= \hat{\Theta}_{i34} + \lambda_i \varepsilon_{i3} \varepsilon_{i4} M_{Gi} M_{Gi}^T, \\ \tilde{\Theta}_{i44} &= \hat{\Theta}_{i44} + \lambda_i \varepsilon_{i4}^2 M_{Gi} M_{Gi}^T. \end{aligned}$$

证明 记 $M_{Gi} = G_{Bi} M_i$, 将 A_i, A_{di} 替换为 $A_i + M_{Gi} F_i(t) N_i, A_{di} + M_{Gi} F_i(t) N_{di}$, 可得

$$\hat{\Theta}_i + \text{sym}\{U_i^T F_i(t) W_i\} < 0. \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} U_i &= [-\varepsilon_{i1} M_{Gi}^T \quad -\varepsilon_{i2} M_{Gi}^T \quad -\varepsilon_{i3} M_{Gi}^T \quad -\varepsilon_{i4} M_{Gi}^T], \\ W_i &= [N_i \Upsilon_i^T \quad 0 \quad N_{di} \Upsilon_i^T \quad 0]. \end{aligned}$$

根据引理 2, 式(19)等价于

$$\tilde{\Theta}_i + \lambda_i U_i^T U_i + \lambda_i^{-1} W_i^T W_i < 0, \quad \exists \lambda_i > 0.$$

应用 Schur 补引理即可得式(18). \square

2.2 滑模变结构控制器的设计

下面设计滑模变结构控制器, 以确保系统的状态能于有限时刻到达滑模面, 并作滑动运动.

定理 3 假定由定理 2 可得 $K_i = X_i \Upsilon_i^{-T}$, 并取 $G_i = B_i^T \hat{P}_i$, 则 $G_i B_i$ 非奇异且为正定矩阵. 对于切换中立型系统(1), 若定义滑模控制器为

$$u_{vs}(t) = X_i \Upsilon_i^{-T} x(t) - \rho(t) \text{sgn}(s(t)), \quad (20)$$

其中 $\eta_i > 0$ 为常数, 而

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \eta_i + \alpha_i(t) + \|M_{Gi}\| \cdot [\|N_i x(t)\| + \\ &\|N_{di} x(t - \tau_2(t))\|], \end{aligned}$$

则在控制器(20)的作用下, 可使系统(1)的状态于有限时刻进入滑动模态区, 并作滑动运动.

证明 取 $\hat{V}_i(t) = 0.5s^T(t)(G_i B_i)^{-1}s(t)$, 当 $s(t) \neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}}_i(t) &= s^T(t)(G_i B_i)^{-1}\dot{s}(t) = \\ & s^T(G_i B_i)^{-1}[G_i B_i u_{vs}(t) - G_i B_i K_i x(t) + \\ & M_{G_i} F_i(t) N_i x(t) + G_i B_i f_i(t, x) + \\ & M_{G_i} F_i(t) N_{di} x(t - \tau_2(t))] = \\ & s^T(t)[u_{vs}(t) - K_i x(t) + M_{G_i} F_i(t) N_i x(t) + \\ & f_i(t, x) + M_{G_i} F_i(t) N_{di} x(t - \tau_2(t))]. \end{aligned}$$

将式(20)代入上式可得

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}}_i(t) &\leq s^T(t)[- \varrho(t) \operatorname{sgn}(s(t)) + M_{G_i} F_i(t) N_i x(t) + \\ & M_{G_i} F_i(t) N_{di} x(t - \tau_2(t))] \leq \\ & - \eta_i \|s(t)\| < 0, \end{aligned}$$

其中

$$\varrho(t) = \eta_i + \|M_{G_i}\|[\|N_i x(t)\| + \|N_{di} x(t - \tau_2(t))\|],$$

因此满足到达条件. 同时, 注意到

$$\begin{aligned} 2\hat{V}_i(t) &= s^T(t)(G_i B_i)^{-1}s(t) \leq \\ & \lambda_{\max}((G_i B_i)^{-1}) \cdot \|s(t)\|^2, \end{aligned}$$

于是可得

$$\dot{\hat{V}}_i(t) \leq -\hat{\eta}_i \cdot \hat{V}_i^{\frac{1}{2}}(t), \quad (21)$$

其中

$$\hat{\eta}_i = \eta_i \sqrt{2\lambda_{\max}((G_i B_i)^{-1})^{-1}}.$$

因此, 系统状态到达滑模面的有限可达时间可估计为

$$t_{\text{fin}} \leq \max_{i \in I} \{\sqrt{\hat{V}_i(0)/\hat{\eta}_i}\}, \quad (22)$$

即当 $t \geq t_{\text{fin}}$ 时, $\hat{V}_i(t) = 0$, 即 $s(t) = 0$. \square

注3 为了更好地利用平均驻留时间方法, 考虑到系统滑动模态的趋近过程, 可取系统切换的实际平均驻留时间为

$$\hat{T}_a = T_a + t_{\text{fin}}.$$

事实上, 因为系统的状态进入滑动模态后是鲁棒指数渐近稳定的, 所以由式(21)和(22)可知, 到达滑模面的时间将逐渐减小, 并趋于0.

3 仿真算例

考虑切换系统(1), 其中 $I = \{1, 2\}$, 有

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -0.2 & -0.5 & 0.0 \\ 0.2 & -0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & -0.2 \end{bmatrix}, \\ A_{d1} &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.1 & 0.0 \\ 0.4 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 & 0.0 \\ -0.2 & -0.3 & 1.0 \\ 0.0 & -0.1 & -0.3 \end{bmatrix},$$

$$A_{d2} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 & -0.2 \\ 0.0 & -0.1 & 0.0 \\ 1.0 & -0.2 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ -2.0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -2.0 \\ 2.0 \\ 1.0 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.0 & 0.02 \\ 0.0 & 0.01 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.02 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.0 & 0.02 \\ 0.0 & -0.01 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -0.02 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = M_2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.01 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -0.02 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = N_2 = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -0.01 \\ 0.0 & 0.01 & 0.0 \end{bmatrix},$$

$$N_{d1} = N_{d2} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & -0.02 \\ 0.0 & 0.01 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -0.01 \end{bmatrix},$$

$$F_1(t) = F_2(t) = \begin{bmatrix} \sin t & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & \sin t & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & \sin t \end{bmatrix}.$$

为了讨论方便, 选取

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_2 = \mu = 0.2, \\ \beta &= 0.25, \quad \tau_2(t) = 0.2|\sin t|; \\ \kappa &= 1.2, \quad f_1 = f_2 = 0.6\sin t; \\ \varepsilon_{ij} &= -0.001, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

此时, 取切换滑模动力学系统间的平均驻留时间为

$$T_a > \ln \kappa / \beta = 0.7293.$$

根据注3, 为了满足仿真需要, 可将系统切换的实际平均驻留时间选为 $\hat{T}_a = 2.5$. 于是, 根据定理2, 可求得 $\lambda_1 = 0.1144$, $\lambda_2 = 0.1242$. 滑模增益矩阵为

$$K_1 = [0.5185 \quad -0.5221 \quad 0.7914],$$

$$K_2 = [2.1260 \quad -0.2683 \quad 0.9519].$$

从而, 系统的滑模面泛函为

$$s(t) = \begin{cases} [1.0 & 1.0 & -2.0]x(t) + \\ [0.02 & -0.01 & -0.02]x(t-0.2) - \\ \int_0^t [2.9111 & -3.8324 & 5.2484]x(s)ds + \\ \int_0^t [-1.0 & -0.3 & 0.6]x(s-0.2|\sin s|)ds, & i = 1; \\ [-2.0 & 2.0 & 1.0]x(t) + \\ [0.08 & 0.02 & 0.06]x(t-0.2) - \\ \int_0^t [18.1339 & -2.9145 & 10.2671]x(s)ds - \\ \int_0^t [1.6 & -0.8 & 0.7]x(s-0.2|\sin s|)ds, & i = 2. \end{cases}$$

由定理 3 可求得滑模控制器为

$$u_{vs}(t) = \begin{cases} [0.5185 & -0.5221 & 0.7914]x(t) - \\ [0.60 + 0.60 + 0.0707(\|N_1x(t)\| + \\ \|N_{d1}x(t - \tau_2(t))\|)]\text{sgn}(s(t)), & i = 1; \\ [7.6119 & -8.7132 & 9.0793]x(t) - \\ [0.60 + 0.60 + 0.0385(\|N_2x(t)\| + \\ \|N_{d2}x(t - \tau_2(t))\|)]\text{sgn}(s(t)), & i = 2. \end{cases}$$

系统的初始条件为

$$\varphi(t) = [-2.0 \quad 3.0 \quad 1.5]^T, t \in [-0.2, 0].$$

Matlab 仿真结果如图 1~图 6 所示. 图 1 和图 2 分别为切换子系统状态的开环响应曲线, 图 3 为在平均驻留时间为 T_a^* 下的系统切换信号曲线, 图 4 为在所给出方法下闭环系统的状态响应曲线, 图 5 为系统的控制输入, 图 6 为滑模面泛函曲线.

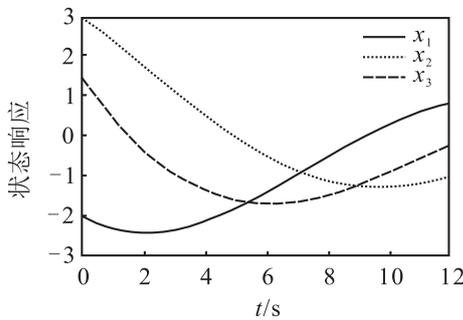


图 1 子系统 1 的状态响应曲线

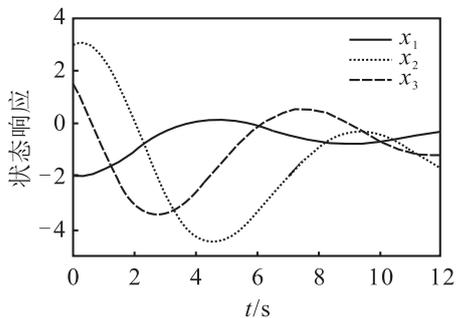


图 2 子系统 2 的状态响应曲线

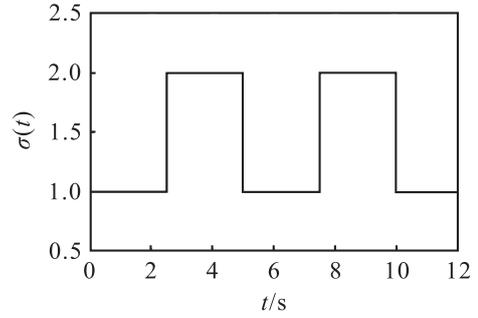


图 3 切换信号

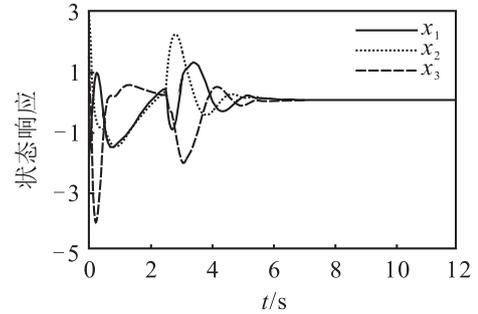


图 4 闭环系统 (1) 的状态响应曲线

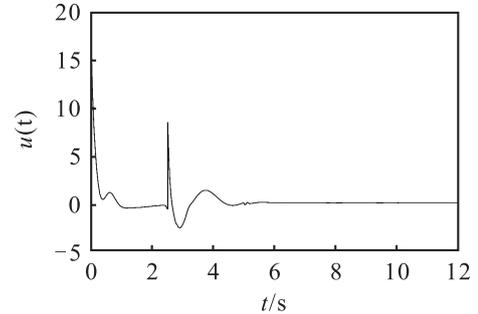


图 5 控制输入

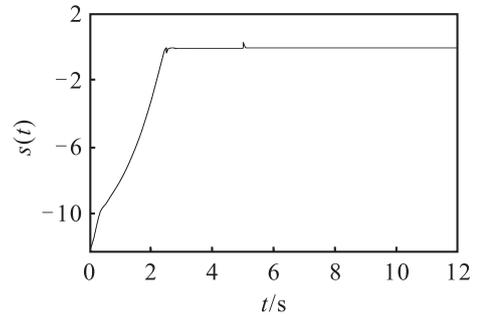


图 6 滑模面泛函

4 结 论

本文针对一类同时含有非匹配不确定性和非线性扰动的切换中立型系统, 研究了系统的鲁棒积分滑模变结构控制. 首先, 设计了积分型滑模面, 基于线性矩阵不等式技术, 利用平均驻留时间和自由权矩阵方法, 得到了滑模动力学系统在任意切换信号下鲁棒指数渐近稳定的时滞相关性准则; 然后, 设计了滑模变结构控制器, 以保证系统状态的有限时刻可达性, 并作滑动运动; 最后, 通过数值仿真结果表明了所提出的设计方法是有效可行的.

参考文献(References)

- [1] Liberzon D. Switching in systems and control[M]. Boston: Birkhauser, 2003.
- [2] Sun Z, Ge S S. Switched linear systems: Control and design[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004.
- [3] Magdi S Mahmoud. Switched time-delay systems[M]. New York: Springer-Verlag, 2010.
- [4] Sun X M, Wang W, Liu G P, et al. Stability analysis for linear switched systems with time-varying delay[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2008, 38(2): 528-533.
- [5] Ji Z J, Guo X X, Xu S X, et al. Stabilization of switched linear systems with time-varying delay in switching occurrence detection[J]. Circuits Systems & Signal Processing, 2007, 26(3): 361-367.
- [6] Chen W H, Zheng W X. Delay-dependent robust stabilization for uncertain neutral systems with distributed delays[J]. Automatica, 2007, 43(1): 95-104.
- [7] Jiang C. Observer design for neutral systems with delays and nonlinear perturbations: Delay-dependent design method[J]. Int J of Control, Automation and Systems, 2013, 11(2): 427-432.
- [8] Gao C C, Liu Z, Xu R P. On exponential stabilization for a class of neutral-type systems with parameter uncertainties: An integral sliding mode approach[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(23): 11044-11055.
- [9] 惠俊军, 张合新, 孔祥玉, 等. 混合变时滞不确定中立型系统鲁棒稳定性分析[J]. 控制与决策, 2014, 29(12): 2260-2264.
(Hui J J, Zhang H X, Kong X Y, et al. Stability analysis for uncertain neutral systems with mixed time-varying delays[J]. Control and Decision, 2014, 29(12): 2260-2264.)
- [10] 张琴, 张霄力. 一类切换中立时滞系统的指数稳定性[J]. 厦门大学学报, 2011, 50(4): 680-684.
(Zhang Q, Zhang X L. Exponential stability of a class of switched neutral systems with time-varying delay[J]. J of Xiamen University, 2011, 50(4): 680-684.)
- [11] Hamid G M, Reza J M, Mojtaba B Y. Robust stabilization for uncertain switched neutral systems with interval time-varying mixed delays[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2014, 13: 2-21.
- [12] Krishnasamy R, Balasubramaniam P. A descriptor system approach to the delay-dependent exponential stability analysis for switched neutral systems with nonlinear perturbations[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2015, 15: 23-36.
- [13] Zhang Y P, Liu X Z, Zhu H, et al. Stability analysis and control synthesis for a class of switched neutral systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 190(2): 1258-1266.
- [14] Lien C H, Yu K W, Chung J Y. Exponential stability analysis for uncertain switched neutral systems with interval time-varying state delay[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2009, 3(3): 334-342.
- [15] 何召兰, 王茂, 黄昆, 等. 不确定离散切换系统的滑模控制[J]. 控制与决策, 2008, 24(5): 789-793.
(He Z L, Wang M, Huang K, et al. Sliding mode control for uncertain discrete time switched system[J]. Control and Decision, 2008, 24(5): 789-793.)
- [16] Hu J, Wang Z D, Niu Y G, et al. Sliding mode control for uncertain discrete-time systems with Markovian jumping parameters and mixed delays[J]. J of the Franklin Institute, 2014, 351(4): 2185-2202.
- [17] Lian J, Zhao J. SMC of uncertain switched delay systems via hysteresis switching strategy[J]. Int J of Control, Automation and Systems, 2010, 8(6): 1171-1178.
- [18] Lian J, Wang M. Sliding mode control of switched delay systems with nonlinear perturbations: Average dwell time approach[J]. Nonlinear Dynamics, 2010, 62(4): 791-798.
- [19] Lian J, Zhao J. Robust H_∞ control of uncertain switched systems: A sliding mode control design[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(7): 965-970.
- [20] Xiao H M, Zhao L. Robust passive control of uncertain switched time-delay systems: A sliding mode control design[J]. J of Control Theory and Applications, 2013, 11(1): 96-102.
- [21] Wu L G, Daniel W C Ho, Li C W. Sliding mode control of switched hybrid systems with stochastic perturbation[J]. Systems & Control Letters, 2011, 60(8): 531-539.
- [22] Wu L G, Su X J, Shi P. Sliding mode control with bounded L_2 gain performance of Markovian jump singular time-delay systems[J]. Automatica, 2012, 48(8): 1929-1933.
- [23] 肖会敏, 赵林, 王春花. 一类带有变时滞的广义切换系统的滑模控制[J]. 控制与决策, 2011, 26(3): 376-380.
(Xiao H M, Zhao L, Wang C H. Sliding mode control for a class of singular switched systems with time-varying delay[J]. Control and Decision, 2011, 26(3): 376-380.)
- [24] Wu L G, Feng Z G, Zheng W X. Exponential stability analysis for delayed neural networks with switching parameters: Average dwell time approach[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2010, 21(9): 1396-1407.
- [25] Gu K, Kharitonov V, Chen J. Stability of time-delay systems[M]. Boston: Birkhauser, 2003: 322.
- [26] Wu M, He Y, She J H, et al. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems[J]. Automatica, 2004, 40(8): 1435-1439.