

主/子惯导标定中挠曲变形误差综合补偿方法

周大旺, 赵国荣, 徐胜红, 胡正高

(海军航空工程学院 控制工程系, 山东 烟台 264001)

摘要: 针对挠曲变形对主/子惯导在线标定误差方程多方面影响的问题, 提出一种挠曲变形误差综合补偿方法. 首先, 基于极大似然估计和赤池信息量准则(AIC)定阶的自回归(AR)模型对挠曲变形进行建模; 然后, 针对挠曲变形引起的动态杆臂效应问题, 利用机理建模方法建立动态杆臂与挠曲变形角之间的关系模型; 在此基础上, 推导出挠曲变形与动态杆臂误差综合补偿方法; 最后, 将该方法应用于主/子惯导标定滤波器设计. 仿真结果表明, 所提出的综合补偿方法是有效的.

关键词: 惯性导航; 挠曲变形; 杆臂效应; 在线标定; 动态杆臂

中图分类号: V24

文献标志码: A

Flexure comprehensive compensation in master/slave INS calibration

ZHOU Da-wang, ZHAO Guo-rong, XU Sheng-hong, HU Zheng-gao

(Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China.

Correspondent: ZHOU Da-wang, E-mail: zhouawang10@163.com)

Abstract: For the problem of the master/slave inertial navigation system(INS) online calibration error equation multifaceted impacted by flexure, a comprehensive error compensation method is proposed. The auto regressive model(AR) model based on maximum likelihood estimation and Akaike information criterion(AIC) order is used to determine the flexure modeling parameter at first. Then for the dynamic lever arm effect problem caused by flexure, the mechanism modeling method is used to establish a dynamic arm and flexure angle between the relational models. The comprehensive error compensation method on the basis of the flexure and the dynamic lever arm is deduced. Finally, the method is applied to master/slave INS calibration filter design. The simulation results show the effectiveness of the proposed comprehensive compensation method.

Keywords: inertial navigation system; flexure; lever arm; online calibration; dynamic lever arm

0 引言

惯性导航被广泛应用于各种武器装备中, 然而由于自身和外界等多种原因, 惯导系统使用一段时间后需要对惯性仪表重新标定^[1-2]. 传统方法是先将其拆卸下来再送回标校机构标定, 该方法给维护工作带来了很大不便, 因此, 在舰艇上有完成一定条件下标定的需求. 在舰艇环境下, 中、低精度的子惯导(SINS)有希望利用舰船主惯导系统(MINS)提供的基准信息完成一定条件下标定的工作. 然而, 该方法遇到的首要问题是如何获取主惯导高精度的基准信息. 在舰上, 由于激励只有舰船摇摆的特点, 主/子惯导之间的匹配方法一般选择“速度+姿态”或者“速度+角速度”的模式^[1, 3-6]. 但是, 在这两种匹配模式下对姿态信息要求很高, 需要补偿对姿态有重要影响的挠曲变形^[7-8]. 同时, 挠曲变形还能引发动态杆臂等

问题, 这些干扰因素对标定有重要影响^[9-10]. 因此, 如何同时补偿这些误差便成为一个亟待解决的问题.

文献[4-6]针对挠曲变形引起的动态杆臂使用机理建模方法, 但是该机理建模方法比较粗糙. 文献[11]建立了3阶 Gauss-Markov 随机模型, 并将挠曲变形扩展为系统状态, 对于挠曲变形引起的动态杆臂等也建模为随机过程. 由此引起的问题是滤波器维数非常高, 另外, 随机模型参数是由离线数据处理获得的, 是否适用于实际尚待证实. 该文献最后提出次优方法, 将挠曲当成噪声处理, 以牺牲精度为代价. 文献[12]在文献[11]的基础上将挠曲变形分为准静态挠曲和动态挠曲, 分别建模为3阶 Gauss-Markov 随机模型, 针对计算量大的问题, 提出预滤波技术, 并将挠曲当成噪声处理. 文献[13-14]针对舰艇上挠曲变形特点, 将挠曲变形大的 y 轴分量从整个系统中删

收稿日期: 2014-12-18; **修回日期:** 2015-05-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61473306); 武器装备预研基金项目(9140-A09040112-JB141110).

作者简介: 周大旺(1984—), 男, 博士生, 从事惯性导航的研究; 赵国荣(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事导航、制导与控制等研究.

除, 而忽略其他轴的挠曲变形, 对挠曲变形采用回避态度. 文献[15]针对挠曲变形、振动等时间相关噪声, 将它们处理为有色噪声, 并用 Gauss-Markov 过程来建模, 然后修改 Kalman 滤波器的更新公式. 文献[16]针对舰艇上的挠曲变形建立 2 阶 Gauss-Markov 模型, 并利用相关因子法论证了利用子惯导测量数据的差分构造的序列与挠曲变形序列是相似的, 然后利用自相关函数法求出挠曲变形模型的参数. 文献[17]利用激光测量数据获取挠曲变形随机过程序列, 并利用最小二乘法辨识模型参数. 文献[18]使用主/子惯导的测量数据差值作为挠曲变形建模的随机过程序列, 这种处理方法是否得当还需进一步分析, 毕竟主/子惯导的测量数据差中包含的误差很多, 如失准角引起的误差不应该忽略. 文献[19]将挠曲变形处理为白噪声, 采用从滤波器的方法对其进行处理. 文献[20]对 SINS 的杆臂效应误差实时补偿进行了研究.

综合上述文献发现, 将挠曲变形处理为噪声是不适合在线标定的, 而文献[4-5]虽然提出了对动态杆臂机理建模, 但其模型比较粗糙; 另外, 对于挠曲变形模型参数确定方法有离线的、激光测量的, 但这些都不是理想. 本文首先通过深入分析, 对挠曲变形建立 AR 模型, 并使用文献[16]的方法获取辨识数据序列, 利用极大似然估计法和 AIC 定阶原则对 AR 模型进行辨识, 辨识结果利用 χ^2 检验法进行检验; 然后建立动态杆臂与挠曲变形角之间的关系模型, 并设计了挠曲变形综合补偿方法; 最后为主/子惯导在线标定设计滤波器. 仿真结果验证了本文方法的有效性.

1 问题描述

本文用到的坐标系如下.

i: 地心惯性坐标系. 该坐标系原点取地球中心, z_i 轴沿地球自转轴指向北极, x_i 轴、 y_i 轴在地球赤道平面内, 与 z_i 轴组成右手坐标系, 坐标轴无转动.

e: 地心地球坐标系. 该坐标系原点在地球中心, z_e 轴沿地球自转轴且指向北极, x_e 轴、 y_e 轴在地球赤道平面内, x_e 轴指向零子午线. 该坐标系相对地心惯性坐标系以地球自转角速度旋转.

n: 导航坐标系. 本文选择东北天地理坐标系作为导航系, 该坐标系的原点取在运动体 *M* 和地球中心连线与地球表面的交点 *O* (或取运动体 *M* 在地球表面上的投影点). 通过点 *O* 作经度圈的切线 *ON* 指北, 作纬度圈的切线指东, *OC* 沿当地大地垂线方向并且指向天顶, 与 *OE*、*ON* 组成右手坐标系.

b: 运载体坐标系. 该坐标系原点在运载体的重心处, x_b 轴与运载体横轴重合指向右, y_b 轴与运载体纵

轴重合指向前, z_b 轴与运载体竖轴重合指向上方.

b_m : 主惯导坐标系. 该坐标系原点在主惯导重心, 取 x 、 y 、 z 轴与舰船坐标系平行.

b_s : 子惯导坐标系. 该坐标系原点在子惯导重心, 取 x 、 y 、 z 轴分别沿载体的横轴向右、纵轴向前和立轴向上.

在主/子惯导组合中, 子惯导敏感到的角速度和加速度可分别表示为^[8]

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_{ib_s}^{b_s} &= \omega_{ib_m}^{b_s} + \omega_{f_s}^{b_s} + \varepsilon + n_g, \\ \hat{f}_s^{b_s} &= f_m^{b_s} + f_r^{b_s} + f_{fb}^{b_s} + \nabla + n_a.\end{aligned}\quad (1)$$

其中: $\omega_{ib_m}^{b_s}$ 为能被主惯导敏感到的载体角速度在子惯导坐标系上的表示; $\omega_{f_s}^{b_s}$ 表示挠曲角速度, 该值无法被主惯导敏感到; ε 为陀螺零偏误差; $f_m^{b_s}$ 为能被主惯导敏感到的载体加速度在子惯导坐标系上的表示; $f_r^{b_s}$ 为刚体转动引起的子惯导杆臂加速度; $f_{fb}^{b_s}$ 为挠曲变形引起的被子惯导敏感到的加速度; ∇ 为加速度计零偏误差; n_g 和 n_a 为随机噪声.

假设待标参数误差为常值误差, 随机噪声为零均值不相关白噪声, 则有

$$\dot{\varepsilon} = 0_{3 \times 1}, \quad \dot{\nabla} = 0_{3 \times 1}.$$

在线标定使用以下线性化误差方程^[11]:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_m &= (\psi_m - \psi_a) \times \omega_{in}^{b_s} + \omega_{f_s}^{b_s} + \varepsilon, \\ \delta \dot{v} &= C_{b_m}^n \{(\psi_m - \psi_a) \times (f_m^{b_s} + f_r^{b_m}) + (f_{fb}^{b_s} + \nabla)\}.\end{aligned}\quad (2)$$

$$(3)$$

其中: ψ_m 表示主惯导体坐标系到子惯导计算坐标系的误差角, ψ_a 表示子惯导体坐标系到子惯导计算坐标系的误差角, 如图 1 所示; $\omega_{in}^{b_s}$ 表示导航系相对惯性系的转动角速度在子惯导体坐标系上的表示; $\omega_{f_s}^{b_s}$ 表示挠曲变形引起的误差; δv 表示速度误差, 满足 $\delta v = v_s^n - v_m^n - v_r^n$; $C_{b_m}^n$ 表示从主惯导体坐标系到导航坐标系的方向余弦矩阵; $f_m^{b_s}$ 表示主惯导敏感到的比力; $f_r^{b_m}$ 表示静态杆臂引起的杆臂效应; $f_{fb}^{b_s}$ 表示由于挠曲变形引起的动态杆臂效应.

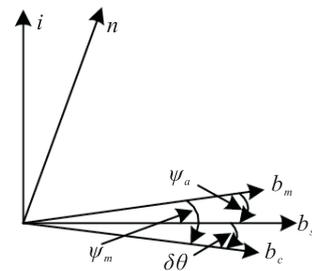


图 1 坐标系关系示意图

由式 (2) 和 (3) 可见, 挠曲变形对系统误差方程的影响为 $\omega_{f_s}^{b_s}$ 和 $f_{fb}^{b_s}$, 其中通过 $\omega_{f_s}^{b_s}$ 对姿态误差方程产生影响, 通过 $f_{fb}^{b_s}$ 对杆臂速度产生影响, 通过 $\omega_{f_s}^{b_s}$ 对杆

臂长度产生影响, 进而对杆臂速度产生影响. 如何对这3种影响进行建模和一体化补偿是本文研究的问题.

2 挠曲变形误差综合补偿建模

2.1 挠曲变形对姿态影响的补偿方法

本文利用AR模型对挠曲变形进行建模, 并且将其扩展到系统状态中.

1) 挠曲变形模型.

AR模型为

$$\theta_k = a_1\theta_{k-1} + \dots + a_p\theta_{k-p} + \varepsilon_k. \quad (4)$$

2) 挠曲随机序列的获取.

模型辨识中的挠曲变形数据利用文献[16]的方法获取, 其公式为

$$D_{k-j}^\omega = \omega_{is-j}^b(t_k) - \omega_{is-j}^b(t_{k-1}), \quad j = 1, 2, 3.$$

3) 参数估计的极大似然估计方法.

假设 $\{u_k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 为零均值正态AR(p)序列, 已取得样本 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$, 其概率密度为

$$f(u|\beta, \sigma_\varepsilon^2) = (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} |M|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{u^T Mu}{2\sigma_\varepsilon^2}\right). \quad (5)$$

其中

$$\beta = (a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q)^T,$$

$$M = \sigma_\varepsilon^2 \Sigma^{-1}, \quad \Sigma = E(uu^T).$$

取对数似然函数

$$L(\beta, \sigma_\varepsilon^2|x) = \frac{1}{2} \ln |M| - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma_\varepsilon^2 - \frac{u^T Mu}{2\sigma_\varepsilon^2}. \quad (6)$$

由于 $u^T Mu$ 仅与 β 有关, 而与 σ_ε^2 无关, 记 $S(\beta) = u^T Mu$, $\hat{\varepsilon}_k = E(\varepsilon_k|u_1, u_2, \dots, u_n)$, 则有

$$S(\beta) = \sum_{i=-\infty}^n \hat{\varepsilon}_k^2.$$

对于AR(p)序列, 当 $n \geq 2p$ 时, 有

$$S(A) = u^T Mu = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n d_{ij} a_i a_j. \quad (7)$$

其中: $a_0 = -1$, $d_{ij} = \sum_{k=1+j}^{n-i} u_{k+i-j} u_k = d_{ji}$, $i, j = 0, 1, \dots, p$. 记

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \dots & d_{pp} \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_{01} \\ d_{02} \\ \vdots \\ d_{0p} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

式(8)又可表示为

$$S(A) = A^T D A - 2A^T d + d_{00},$$

使 $S(A)$ 达到最小的解为

$$\hat{A}_S = D^{-1}d.$$

针对式(6), 令

$$\frac{\partial L}{\partial(\sigma_\varepsilon^2)} = -\frac{n}{2\sigma_\varepsilon^2} + \frac{S(\beta)}{2(\sigma_\varepsilon^2)^2} = 0, \quad (9)$$

可得

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{S(\beta)}{n} = \frac{u^T Mu}{n}, \quad (10)$$

将其代入式(6), 可得

$$L(\beta, \sigma_\varepsilon^2|x) = \frac{1}{2} \ln |M| - \frac{n}{2} \ln(u^T Mu) + c, \quad (11)$$

其中 c 为常数, 对求极值无影响. β 的最大似然估计是使式(11)达到最大. 若 $\hat{\beta}_m$ 使式(11)达到最大, 则 $\hat{\beta}_m$ 是 β 的极大似然估计, 代入式(10)可得 σ_ε^2 的极大似然估计.

4) 模型定阶.

AR模型的定阶采用AIC准则, 该准则为: 选取 p , 使得

$$\min \text{AIC}(k) = n \ln \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + 2p. \quad (12)$$

其中: n 为样本容量, $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ 与 p 有关, 若当 $p = \hat{p}$ 时, 式(12)达到最小值, 则认为序列为AR(\hat{p}).

5) 模型 χ^2 检验.

对于AR(p)序列, 设未知参数的估计为 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_p$, 则残差

$$\hat{\varepsilon}_k = u_k - \hat{a}_1 u_{k-1} - \dots - \hat{a}_p u_{k-p}.$$

记

$$\eta_i = \frac{\sum_{k=1}^{n-k} \hat{\varepsilon}_k \hat{\varepsilon}_{k+i}}{\sum_{k=1}^n \hat{\varepsilon}_k^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

则Ljung-Box的 χ^2 检验统计量为

$$\chi^2 = n(n+2) \sum_{i=1}^m \frac{\eta_i^2}{n-i}.$$

检验假设

$$H_0: \rho_i = 0, \quad k \leq m; \quad H_1: \rho_k \neq 0, \quad k \leq m.$$

在 H_0 成立时, 若 n 充分大, 则 χ^2 近似于 $\chi^2(m-r)$ 分布, 其中 r 为估计的模型参数个数.

χ^2 检验法如下: 若给定显著性水平 α , 查表可得 α 分位数为 $\chi_\alpha^2(m-r)$, 则当 $\chi^2 > \chi_\alpha^2(m-r)$ 时拒绝 H_0 , 即认为 ε_k 非白噪声, 模型检验未通过; 而当 $\chi^2 \leq \chi_\alpha^2(m-r)$ 时, 接受 H_0 , 认为 ε_k 是白噪声, 模型通过检验.

2.2 挠曲变形对杆臂效应的影响及补偿

挠曲变形对杆臂效应的影响包括两个方面: 一是挠曲变形引起的杆臂长度变化, 二是对挠曲角速度引

起的杆臂速度. 由于惯性传感器安装位置与载体摇摆中心不重合, 当载体存在摇摆运动时, 传感器测量到的附加离心加速度和切向加速度称为杆臂效应^[8]. 一般假设主惯导处于摇摆中心, 不考虑杆臂效应; 子惯导远离摇摆中心, 需要考虑杆臂效应.

根据文献[3], 当存在杆臂时, 子惯导敏感到的加速度可表示为

$$f_s^{b_m} = f_m^{b_m} + \dot{\omega}_{ib} \times r + \omega_{ib} \times (\omega_{ib} \times r). \quad (13)$$

当杆臂为刚体时, 满足

$$dr^b/dt = 0, \quad d^2r^b/dt^2 = 0. \quad (14)$$

在此条件下, 定义杆臂速度 $v_r^n = v_s^n - v_m^n$ 和杆臂加速度为 $f_r^b = f_s^{b_m} - f_m^{b_m}$, 则有

$$v_r^n = C_b^n [\omega_{eb}^b \times] r^b, \quad (15)$$

$$f_r^b = \dot{\omega}_{ib} \times r + \omega_{ib} \times (\omega_{ib} \times r). \quad (16)$$

然而杆臂并非刚体, 挠曲变形会引发动态杆臂问题, 式(14)不再成立, 即

$$\left. \frac{d^2r}{dt^2} \right|_m = \ddot{r} \neq 0, \quad \left. \frac{dr}{dt} \right|_m = \dot{r} \neq 0.$$

从理论上讲, 这种动态杆臂将对式(15)和(16)的杆臂速度和加速度产生影响. 为了对挠曲变形误差进行一体化补偿, 下面分析动态杆臂对与挠曲变形角之间的关系.

设未发生挠曲变形的杆臂长度在导航坐标系内的投影为 $r_0 = [x_0, y_0, z_0]^T$, 挠曲变形引起的3个轴的转动角度为 $\theta = [\theta_x, \theta_y, \theta_z]^T$. 由于X、Y和Z轴存在对称性质, 这里仅对绕Z轴挠曲进行分析, 然后推广到3轴, 如图2所示. 图2中: OD表示未发生变形时的杆臂, \widehat{OA} 表示变形后的杆臂. 目标是求出变形后 \widehat{OA} 在X轴和Y轴的投影, 为杆臂建模补偿提供基础.

对图2作如下假设: 1) 挠曲变形不存在拉伸、压缩的情况, 只存在弯曲, 满足 $\widehat{OA} = OD = x_0$; 2) \widehat{OA} 可近似为一段圆弧; 3) 挠曲变形角之间不存在互相耦合的情况, 各个挠曲角度是独立的.

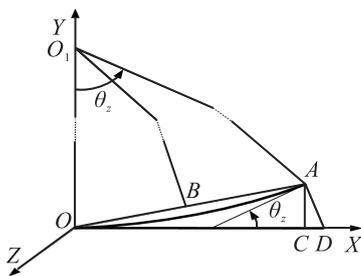


图2 绕Z轴的挠曲变形角 θ_z 引起的杆臂坐标变化量

根据上面假设和几何原理, 有

$$\angle AO_1O = 2\angle AOC = \theta_z.$$

由弧长与半径关系公式有

$$OO_1 = \widehat{OA} / \angle AO_1O = x_0 / \theta_z.$$

由此可得

$$OA = 2OB = 2OO_1 \sin \frac{\theta_z}{2} = 2 \frac{x_0}{\theta_z} \sin \frac{\theta_z}{2}, \quad (17)$$

$$OC = OA \cos \frac{\theta_z}{2} = \frac{2x_0}{\theta_z} \sin \frac{\theta_z}{2} \cos \frac{\theta_z}{2}, \quad (18)$$

$$AC = OA \sin \frac{\theta_z}{2} = \frac{2x_0}{\theta_z} \sin^2 \frac{\theta_z}{2}. \quad (19)$$

根据三角函数关系, 有

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2},$$

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

式(18)和(19)变为

$$OC = \frac{x_0}{\theta_z} \sin \theta_z,$$

$$AC = \frac{x_0}{\theta_z} (1 - \cos \theta_z).$$

同理, 可以求得绕X轴和Y轴挠曲变形引起的杆臂坐标变化量, 如表1所示.

表1 挠曲变形引起的杆臂坐标变化

杆臂坐标	θ_x	θ_y	θ_z
r_x	0	$\frac{z_0}{\theta_y} (1 - \cos \theta_y)$	$\frac{x_0}{\theta_z} \sin \theta_z$
r_y	$\frac{y_0}{\theta_x} \sin \theta_x$	0	$\frac{x_0}{\theta_z} (1 - \cos \theta_z)$
r_z	$\frac{y_0}{\theta_x} (1 - \cos \theta_x)$	$\frac{z_0}{\theta_y} \sin \theta_y$	0

为了便于处理, 将三角函数进行Taylor展开, 取前两项作近似处理. 三角函数Taylor展开为

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots,$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots,$$

因此表1可以近似为表2.

表2 挠曲变形引起的杆臂坐标变化

杆臂坐标	θ_x	θ_y	θ_z
r_x	0	$\frac{\theta_y}{2} z_0$	$\left(1 - \frac{\theta_z^2}{6}\right) x_0$
r_y	$\left(1 - \frac{\theta_x^2}{6}\right) y_0$	0	$\frac{\theta_z}{2} x_0$
r_z	$\frac{\theta_x}{2} y_0$	$\left(1 - \frac{\theta_y^2}{6}\right) z_0$	0

由于挠曲变形都是小量, 忽略二阶项影响, 表2可以写成

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_0 + \frac{\theta_y}{2} z_0 \\ y_0 + \frac{\theta_x}{2} x_0 \\ z_0 + \frac{\theta_z}{2} y_0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

将其写成矩阵形式为

$$r = r_0 + R\theta, \quad (21)$$

其中

$$R = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & z_0 & 0 \\ 0 & 0 & x_0 \\ y_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由式(21)可得

$$\begin{cases} r = r_0 + R\theta, \\ \dot{r} = R\dot{\theta}, \\ \ddot{r} = R\ddot{\theta}. \end{cases} \quad (22)$$

将式(22)代入(13)可得

$$f_s^{b_m} = f_m^{b_m} + f_{r0} + f_{rR} + 2[\omega_{ib} \times]R\dot{\theta} + R\ddot{\theta}. \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} f_{r0} &= \dot{\omega}_{ib} \times r_0 + \omega_{ib} \times (\omega_{ib} \times r_0), \\ f_{rR} &= [\dot{\omega}_{ib} \times]R\theta + [\omega_{ib} \times][\omega_{ib} \times]R\theta. \end{aligned}$$

注1 文献[6]对挠曲角如何定义没有详细说明,从该文献给出的相应公式可以看出,其定义与文献[1,5]相同,而文献[1,5]将 $\angle AOD$ 当成挠曲变形角 θ_z 是存在问题的.由挠曲变形角的定义可知,挠曲变形引起的角度是子惯导点的切线方向与主惯导的基准水平线的交角,即图2中的角 θ_z ,其与 $\angle AOD$ 的关系为 $\theta_z = 2\angle AOD$.

3 主/子惯导标定滤波器设计

3.1 滤波器误差方程

姿态误差方程使用方程(2),与文献[3]相同,该姿态误差方程的一个优点是能获得姿态误差角 ψ_m 的观测量.速度误差方程(3)是文献[3]针对快速传递对准设计的,对一些相关量作了近似与忽略处理.本文在考虑挠曲变形综合误差补偿的基础上推导相应的速度误差方程.

根据式(23),设刚体杆臂效应为 f_{r0} ,其定义为

$$f_{r0} = \dot{\omega}_{ib} \times r_0 + \omega_{ib} \times (\omega_{ib} \times r_0).$$

设挠曲效应引起的杆臂效应为 f_{rf} ,其定义为

$$f_{rf} = [\dot{\omega}_{ib} \times]R\theta + [\omega_{ib} \times][\omega_{ib} \times]R\theta + 2[\omega_{ib} \times]R\dot{\theta} + R\ddot{\theta}.$$

刚体杆臂速度定义为

$$v_{r0} = \left. \frac{dr_0}{dt} \right|_e = \left. \frac{dr_0}{dt} \right|_b + \omega_{eb}^e \times r_0^e.$$

其中:竖线下标表示矢量在该坐标系中求导,上标表示在该系中表示, $\left. \frac{dr_0}{dt} \right|_e$ 表示刚体杆臂矢量相对地球系对时间的导数在地球系的表示,而 $\left. \frac{dr_0}{dt} \right|_b$ 表示刚体杆臂矢量相对载体系对时间的导数在地球系的表示, ω_{eb}^e 表示载体系对地球系的角速度在地球 e 系上的表示, r_0^e 为刚体杆臂在地球系上的表示.

由于刚体杆臂相对 b 系的导数为0,并将刚体杆

臂投影到导航系,得到

$$v_{r0}^n = \omega_{eb}^n \times r_0^n.$$

根据惯导速度微分方程,有

$$\begin{aligned} \dot{v}_m^n &= f_m^n + G_m - \omega_{ie}^n \times (\omega_{ie}^n \times R_m) - \\ & (\omega_{ie}^n + \omega_{in}^n) \times v_m^n, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_s^n &= f_s^n + G_s - \omega_{ie}^n \times (\omega_{ie}^n \times R_s) - \\ & (\omega_{ie}^n + \omega_{in}^n) \times v_s^n, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{r0}^n &= f_{r0}^n + G_{r0} - \omega_{ie}^n \times (\omega_{ie}^n \times r_0) - \\ & (\omega_{ie}^n + \omega_{in}^n) \times v_{r0}^n. \end{aligned} \quad (26)$$

因为杆臂长度向量 r_0 相对主惯导处的向量 R_m 和子惯导处的向量 R_s 为小量(向量 R_m 和向量 R_s 的起点为地心,终点为主惯导和子惯导所在位置),所以其万有引力 G_{r0} 和 $\omega_{ie}^n \times (\omega_{ie}^n \times r)$ 项可以近似为0,因此有

$$\dot{v}_{r0}^n = f_{r0}^n - (\omega_{ie}^n + \omega_{in}^n) \times v_{r0}^n. \quad (27)$$

由

$$f_r^n = f_{r0} + f_{rf}, \quad R_s = R_m + r,$$

有

$$f_s^n + G_s = (f_m^n + G_m) + (f_r^n + G_r),$$

由此可得

$$f_r^n = f_s^n - f_m^n.$$

忽略重力差异,考虑子惯导仪表测量误差并假设主惯导仪表误差可以忽略,将式(25)与(24)作差,可得

$$\dot{v}_s^n - \dot{v}_m^n = \hat{f}_s^n - f_m^n - (\omega_{ie}^n + \omega_{in}^n) \times (v_s^n - v_m^n). \quad (28)$$

根据式(1)和坐标变换关系,可以得到

$$\hat{f}_s^n - f_m^n = C_{bc}^n (f_m^{b_s} + f_{r0}^{b_s} + f_{rf}^{b_s} + \nabla) - C_{bs}^n f_m^{b_s}. \quad (29)$$

为了在方向余弦变换中引入姿态误差角,将式(29)变形为

$$\begin{aligned} f_s^n - f_m^n &= \\ C_{bm}^n C_{bc}^{b_m} (f_m^{b_s} + f_{r0}^{b_s} + f_{rf}^{b_s} + \nabla) - C_{bm}^n C_{bs}^{b_m} f_m^{b_s} &\approx \\ C_{bm}^n (I + \psi_m) (f_m^{b_s} + f_{r0}^{b_s} + f_{rf}^{b_s} + \nabla) - \\ C_{bm}^n (I + \psi_a) f_m^{b_s} &= \\ C_{bm}^n (f_{r0}^{b_s} + f_{rf}^{b_s} + \nabla) + \\ C_{bm}^n (\psi_m \times) (f_m^{b_s} + f_{r0}^{b_s} + f_{rf}^{b_s} + \nabla) - \\ C_{bm}^n (\psi_a \times) f_m^{b_s} &\approx \\ C_{bm}^n (f_{r0}^{b_s} + f_{rf}^{b_s} + \nabla) + \\ C_{bm}^n (\psi_m - \psi_a) \times (f_m^{b_s} + f_{r0}^{b_s}) &= \\ C_{bm}^n f_{r0}^{b_s} + C_{bm}^n (f_{rf}^{b_s} + \nabla) + \\ C_{bm}^n (\psi_m - \psi_a) \times (f_m^{b_s} + f_{r0}^{b_s}). \end{aligned} \quad (30)$$

将式(30)和(27)代入(28),可得

$$\begin{aligned} \dot{v}_s^n - \dot{v}_m^n - \dot{v}_{r0}^n = & \\ C_{b_m}^n f_{r0}^{b_s} - f_{r0}^n + C_{b_m}^n (f_{rf}^{b_s} + \nabla) + & \\ C_{b_m}^n (\psi_m - \psi_a) \times (f_m^{b_s} + f_{r0}^{b_s}) - & \\ (\omega_{ie}^n + \omega_{in}^n) \times (v_s^n - v_m^n - v_{r0}^n). & \end{aligned} \quad (31)$$

取速度误差为 $\delta v = v_s^n - v_m^n - v_{r0}^n$, 并考虑到 $f_{r0}^{b_s} \approx f_{r0}^n$, 式(31)变形为

$$\begin{aligned} \delta \dot{v}^n = C_{b_m}^n (\psi_m - \psi_a) \times (f_m^{b_s} + f_{r0}^{b_s}) - & \\ (\omega_{ie}^n + \omega_{in}^n) \times (\delta v^n) + C_{b_m}^n (f_{rf}^{b_s} + \nabla). & \end{aligned}$$

3.2 滤波器设计

重写滤波器误差方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_m = (\psi_m - \psi_a) \times \omega_{nb}^{b_s} + \omega_{f_s}^{b_s} + \varepsilon, & \\ \delta \dot{v}^n = C_{b_m}^n (\psi_m - \psi_a) \times (f_m^{b_s} + f_{r0}^{b_s}) - & \\ (\omega_{ie}^n + \omega_{in}^n) \times (\delta v^n) + C_{b_m}^n (f_{rf}^{b_s} + \nabla). & \end{aligned}$$

由于挠曲变形的阶数需要辨识确定, 滤波器设计需要首先知道阶数, 然后设计相应的状态. 这里的滤波器设计是挠曲变形为二阶时的结构, 其他阶数模型只要增减相应的挠曲角状态即可.

设滤波器状态为

$$X = [\delta v^T, \psi_m^T, \psi_a^T, \varepsilon^T, \nabla^T, \theta^T, \dot{\theta}^T]^T,$$

则滤波器状态方程为

$$\dot{X} = AX + Gw.$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & 0 & C_{b_s}^n & A_4 & A_5 \\ 0 & A_6 & -A_6 & A_7 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_8 & A_9 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = -[(\omega_{ie}^n + \omega_{in}^n) \times],$$

$$A_2 = -C_{b_m}^n [(f_m^{b_s} + f_{r0}^{b_s}) \times], \quad A_3 = -A_2,$$

$$A_4 = C_{b_m}^n \{[\omega_{ib_m} \times]R + [\omega_{ib_m} \times][\omega_{ib_m} \times]R + a_2\},$$

$$A_5 = C_{b_m}^n \{2[\omega_{ib} \times]R + a_1\}, \quad A_6 = -[\omega_{nb_m} \times],$$

$$A_7 = C_{b_s}^n, \quad A_8 = \text{diag}(a_{1x}, a_{1y}, a_{1z}),$$

$$A_9 = \text{diag}(a_{2x}, a_{2y}, a_{2z}).$$

观测方程选择“速度+姿态+角速度”的匹配模式, 具体方程如下.

1) 列出速度和姿态观测方程.

将子惯导解算提供的速度减去主惯导提供的经过刚性杆臂补偿后的速度, 可以得到速度误差观测量.

在误差方程中, 姿态误差 ψ_m 是一个可观测量. 因此这两个匹配量的观测方程为

$$z = [\delta v^T, \psi_m^T]^T,$$

相应观测矩阵为 $H_1 = [I_{6 \times 6}, 0_{15 \times 15}]$.

2) 角速度匹配观测方程.

取角速度误差观测量为 $\Delta \omega = \hat{\omega}_{is}^{b_s} - C_n^{b_c} \omega_{ib_m}^n$, 由式(1)可得

$$\begin{aligned} \Delta \omega = \omega_{ib_m}^{b_s} + \omega_{f_s}^{b_s} + \delta \omega - C_n^{b_c} \omega_{ib_m}^n = & \\ [I - (\psi_m - \psi_a) \times] C_n^{b_c} \omega_{ib_m}^n + \omega_{f_s}^{b_s} + \delta \omega - C_n^{b_c} \omega_{ib_m}^n = & \\ [C_n^{b_c} \omega_{ib_m}^n \times] (\psi_m - \psi_a) + \omega_{f_s}^{b_s} + \delta \omega. & \end{aligned}$$

由此可得观测矩阵为

$$H_2 = [0_{3 \times 3}, [C_n^{b_c} \omega_{ib_m}^n \times], -[C_n^{b_c} \omega_{ib_m}^n \times], 0, I, 0, I].$$

综上可得“速度+姿态+角速度”匹配模式的观测矩阵为

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}.$$

4 仿真研究

下面利用仿真验证本文方法的有效性. 仿真分为两个部分: 1) 验证挠曲变形辨识结果的有效性; 2) 分析动态杆臂补偿方法的有效性.

仿真条件设置如下: 舰船系泊条件下处于摇摆状态, 摇摆运动满足余弦波, 其中横摇角的幅值为 13° , 周期为 10 s; 纵摇角幅值为 5° , 周期为 8 s; 艏摇角幅值为 3° , 周期为 6 s. 假设主惯导的误差可以忽略, 而且子惯导在进行标定前已经经过对准, 对准精度为 $1 \text{ m} \cdot \text{rad}$. 子惯导陀螺仪常值零偏为 $0.2^\circ/h$, 刻度系数误差为 200 ppm, 加速度计零偏为 $3 \times 10^{-4} \text{ g}$, 刻度系数误差为 200 ppm, 刚体杆臂长度为 $[10, 4, 15]^T \text{ m}$.

挠曲变形仿真真值采用 2 阶 Markov 过程进行模拟, 其方程为

$$\theta_k = 0.0035\theta_{k-1} + 0.07\theta_{k-2} + \eta_k, \quad (32)$$

其中 η_k 的均方差取为 0.0001° .

卡尔曼滤波器初值为 $x = 0_{21 \times 1}$, 初始方程阵 P_0 为对角阵, 各元素如下:

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = (0.1 \text{ m/s})^2,$$

$$p_{44} = p_{55} = p_{66} = (\pi/180 \text{ rad})^2,$$

$$p_{77} = p_{88} = p_{99} = (\pi/180 \text{ rad})^2,$$

$$p_{1010} = p_{1111} = p_{1212} = (\pi/180/3600 \text{ rad/s})^2,$$

$$p_{1313} = p_{1414} = p_{1515} = (10^{-6} \text{ g} \cdot \text{m/s}^2)^2,$$

$$p_{1616} = p_{1717} = p_{1818} = (\pi/180 \text{ rad})^2,$$

$$p_{1919} = p_{2020} = p_{2121} = (\pi/180/3600 \text{ rad/s})^2.$$

系统方差阵 Q 为对角阵, 其对角线元素为

$$\text{diag}(Q) = [10^{-6}(\text{m/s})^2, 10^{-6}(\text{m/s})^2, 10^{-6}(\text{m/s})^2, 10^{-13}\text{rad}^2, 10^{-13}\text{rad}^2, 10^{-13}\text{rad}^2, 0_{1 \times 12}, 10^{-9}(\text{rad/s})^2, 10^{-9}(\text{rad/s})^2, 10^{-9}(\text{rad/s})^2].$$

测量方差阵 R 为对角阵, 其各元素为

$$\text{diag}(R) = [(0.1 \text{ m/s})^2, (0.1 \text{ m/s})^2, (0.1 \text{ m/s})^2, (0.1\pi/180 \text{ rad})^2, (0.1\pi/180 \text{ rad})^2, (0.1\pi/180 \text{ rad})^2, (0.1\pi/180/3600 \text{ rad/s})^2, (0.1\pi/180/3600 \text{ rad/s})^2, (0.1\pi/180/3600 \text{ rad/s})^2].$$

下面针对式 (32) 的二阶模型进行辨识. 首先基于 AIC 原则, 求得当 AR 各阶模型时各种情况的 AIC 数据, 模型求解结果如表 3 所示.

表 3 模型定阶计算表

阶次 p	AIC	BIC
$R = 0$	2846.230 012	2860.650 692
$R = 1$	2847.515 635	2869.146 656
$R = 2$	2838.963 628	2867.804 989
$R = 3$	2840.916 110	2876.967 812

由表 3 可知, 模型阶次为 $p = 2$. 定阶结束后可以进行参数估计以获得相关参数估计. 某一次估计结果确定的模型为

$$\theta_k = 0.00315\theta_{k-1} + 0.0329\theta_{k-2} + \eta_k.$$

利用 Matlab 中的 χ^2 检验函数 chi2gof 的计算结果: $h = 0$, 即接受假设 H_0 , 模型通过检验. 图 3 为对 200 个数据的跟踪值与真值的比较情况. 由图 3 可以看出辨识模型的跟踪效果良好.

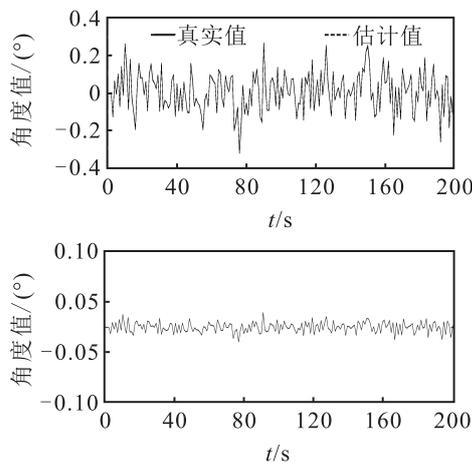


图 3 辨识模型的跟踪效果

图 4 和图 5 为在“速度+姿态+角速度”匹配模式下, 仪表零偏参数的估计结果. 图 4 和图 5 中: 虚线表示未补偿动态杆臂项的结果, 实线表示补偿了动态杆

臂项的结果, 可以看出, 经过补偿动态项后所提出的方法具有更高的精度.

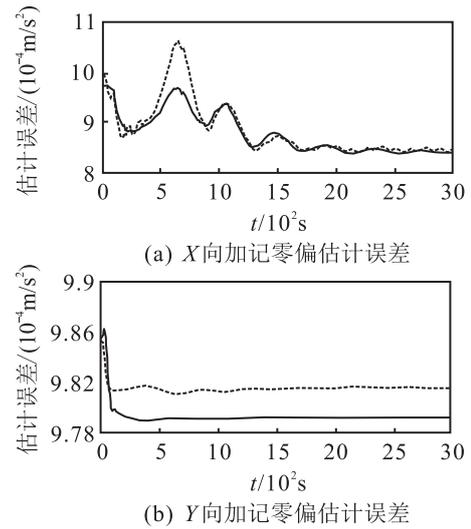


图 4 加速度计零偏估计比较情况

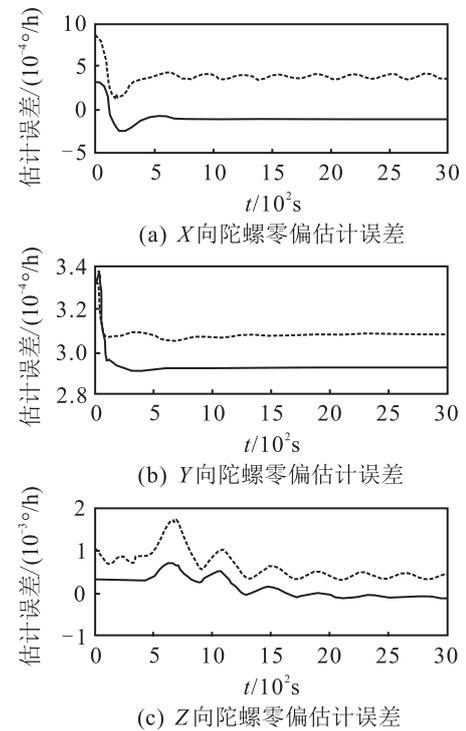


图 5 陀螺仪零偏估计比较情况

5 结 论

本文针对挠曲变形对主/子惯导在线标定多方面影响的问题进行了综合补偿研究, 得到如下结论: 基于极大似然估计方法和 AIC 定阶原则辨识出的 AR 模型能有效跟踪挠曲变形. 首先, 利用机理建模方法建立挠曲变形与杆臂变化之间的数学模型; 然后, 利用挠曲信息对动态杆臂进行补偿, 这种一体化综合补偿方法具有更高的精度; 最后, 将这种综合补偿方法应用到主/子惯导在线标定中, 为在线标定设计相应的滤波器. 仿真结果验证了该综合补偿方法是有效的.

参考文献(References)

- [1] David H Titterton, John L Weston. Strapdown inertial navigation technology[M]. 2nd ed. London: The Institute of Electrical Engineers, 2007: 219-261.
- [2] Savage P G. Strapdown analytics[M]. Maple Plain: Strapdown Associates, Inc., 2007.
- [3] 付梦印, 郑辛, 邓志红, 等. 传递对准理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 1-8.
(Fu M Y, Zheng X, Deng Z H, et al. Transfer alignment theory and application[M]. Beijing: Science Press, 2012: 1-8.)
- [4] Liu C, Deng Z H, Gao W H, et al. Estimate dynamic lever-arm caused by ship flexure deformation based on acceleration matching[C]. Proc of the 30th Chinese Control Conf. Yantai, 2011: 1476-1481.
- [5] Gao Qingwei, Zhao Guorong, Wang Xibin. Transfer alignment error compensator design for flexure and lever-arm effect[C]. IEEE Conf on Industrial Electronic and Applications. Xi'an, 2009, 21(6): 1819-1822.
- [6] 高青伟, 赵国荣, 吴芳. 大方位失准角传递对准非线性模型研究[J]. 控制与决策, 2011, 26(3): 402-406.
(Gao Q W, Zhao G R, Wu F. Research on nonlinear error model of transfer alignment with large azimuth misalignment angle[J]. Control and Decision, 2011, 26(3): 402-406.)
- [7] Güray A, Pehlivanoglu, Yücel Ercan. Investigation of flexure effect on transfer alignment performance[J]. J of Navigation, 2013, 66: 1-15.
- [8] Chattaraj S, Mukherjee A, Chaudhuri S K. Transfer alignment problem: Algorithms and design issues[J]. Gyroscopy and Navigation, 2013, 4(3): 130-146.
- [9] He X F, Liu J Y. Analysis of lever arm effects in GPS and IMU integration system[J]. Trans of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2002, 19(1): 59-64.
- [10] Tedaldi D, Pretto A, Menegatti E. A robust and easy to implement method for IMU calibration without external equipments[C]. IEEE Int Conf on Robotics and Automation. Hong Kong, 2014: 3042-3049.
- [11] Kain J E, Cloutier J R. Rapid transfer alignment for tactical weapon applications[C]. Guidance, Navigation and Control Conf. Boston: AIAA, 1989: 1290-1300.
- [12] Spalding K, Missouri S L. An efficient rapid transfer alignment filter[C]. Astrodynamics Conf. Hilton Head Island: AIAA, 1992: 1276-1286.
- [13] You-Chol Lim, Joon Lyou. An error compensation method for transfer alignment[C]. Proc of IEEE Conf on Electrical and Electronic Technology. Singapore, 2001, 12: 850-855.
- [14] Joon Lyou, You-Chol Lim. Transfer alignment considering measurement time delay and ship body flexure[J]. J of Mechanical Science and Technology, 2009, 23(23): 195-203.
- [15] Jan Wendel, Jürgen Metzger, Gert Trommer. Rapid transfer alignment in the presence of time correlated measurement and system noise[C]. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf and Exhibit. Rhode Island, 2004: 1-12.
- [16] 孙昌跃, 邓正隆. 舰体挠曲运动在线建模研究[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(2): 243-245.
(Sun C Y, Deng Z L. Research on the ship flexure on-line modeling[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(2): 243-245.)
- [17] 解春明, 赵剡, 王纪南. 传递对准中机翼弹性变形建模与滤波处理[J]. 北京航空航天大学学报, 2010, 36(8): 931-935.
(Xie C M, Zhao Y, Wang J N. Modeling of wing flexure and filtering solution in transfer alignment[J]. J of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2010, 36(8): 931-935.)
- [18] 陈雨, 赵剡, 张华强. 传递对准中机翼弹性变形处理[J]. 火力与指挥控制, 2013, 38(6): 111-114.
(Chen Y, Zhao Y, Zhang H Q. Processing of Wing Flexure in Transfer Alignment[J]. Fire Control & Command Control, 2013, 38(6): 111-114.)
- [19] 林杰, 付梦印, 邓志红, 等. 主-从滤波器设计及其在传递对准中的应用[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(10): 1447-1450.
(Lin J, Fu M Y, Deng Z H, et al. Design of master-slave filter and its application to transfer alignment[J]. Control Theory & Applications, 2011, 28(10): 1447-1450.)
- [20] 孙伟, 孙枫. 基于SINS的杆臂效应误差补偿方法研究[J]. 控制与决策, 2012, 27(6): 891-894.
(Sun W, Sun F. Research on error compensation methods of lever arm effect based on SINS[J]. Control and Decision, 2012, 27(6): 891-894.)
- [21] Marthinus C Havinga. Flight test results of a MEMS IMU based transfer alignment algorithm for short range air-to-air missiles[C]. AIAA Guidance, Navigation, and Control(GNC) Conf. Boston, 2013: 1-10.

(责任编辑: 滕 蓉)