文章编号: 1001-0920 (2016) 02-0297-06 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2014.1931

考虑属性权重优化的犹豫模糊多属性决策方法

刘小弟[1,2], 朱建军[1], 张世涛[1,2], 刘国栋[1]

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 211106；2. 安徽工业大学 数理学院，安徽 马鞍山 243002)

摘 要: 针对属性权重完全未知的犹豫模糊多属性决策问题, 提出一种属性权重多目标优化方法. 首先, 根据属性值的均值、方差以及属性间的关联度建立属性权重确定模型; 然后, 利用方案与犹豫模糊正理想点的相似度对方案进行排序; 最后, 通过算例分析表明了所提出方法的有效性和可行性.

关键词: 犹豫模糊集；属性权重；多属性决策

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Hesitant fuzzy multiple attribute decision making method based on optimization of attribute weights

LIU Xiao-di[1,2], *ZHU Jian-jun*[1], *ZHANG Shi-tao*[1,2], *LIU Guo-dong*[1]

(1. College of Economics and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 211106，China; 2. School of Mathematics and Physics，Anhui University of Technology，Ma'anshan 243002，China. Correspondent: LIU Xiao-di，E-mail：lxy1160@163.com)

Abstract：An approach based on multi-objective optimization of attribute weights is proposed to deal with the hesitant fuzzy multiple attribute decision making problem with attribute weights completely unknown. Firstly, the mean and variance for attribute values, and the correlation coefficients between attributes are computed. An optimization model is constructed to determine the attribute weights. Then, the similarity degree between each alternative and the hesitant fuzzy positive ideal point is obtained to rank the alternatives. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Keywords：hesitant fuzzy set；attribute weight；multiple attribute decision making

0 引 言

在处理不确定性和模糊性时, 模糊集[1]是一种十分有效的工具. 然而, 随着研究的不断深入和发展, 模糊集常常表现出一定的局限性[2], 因此, 许多拓展形式相继被提出[3-5]. 近年来, Torra 等[6-7]提出了犹豫模糊集, 作为模糊集的另一种拓展形式, 犹豫模糊集允许集合中元素的隶属度可以是 $[0,1]$ 中几个不同的值, 从而可以很好地反映和兼顾决策者的不同偏好. 目前, 犹豫模糊集已经被应用到不同的领域, 如聚类[8-11]、医疗诊断[12]、决策分析[13-16]等. 文献 [17] 定义了犹豫模糊偏好关系与犹豫乘性偏好关系, 并将其应用到群决策中; 文献 [18] 基于 TOPSIS 思想定义了方案的满意度, 并依据方案的满意度给出一种交互式决策方法; 文献 [19-23] 提出了几类不同的犹豫模糊信息集结算子, 并将其应用到多属性决策中. 然而, 这些犹豫模糊算子在信息集结时仅考虑属性重要性, 却忽视了属性间相互关系, 为此, 文献 [24] 提出了犹豫模糊 Choquet 积分算子, 文献 [25] 提出了犹豫模糊 Bonferroni 均值, 并将其应用到多属性决策中.

以上关于犹豫模糊集在多属性决策中的应用, 往往假定属性权重已知或部分已知, 但是由于决策者思维的模糊性以及认知上的不足, 属性权重常常难以确定. 为此, 文献 [26] 定义了犹豫模糊熵与交叉熵, 并基于熵权法获得属性权重; 文献 [27] 基于粗糙集理论与

收稿日期: 2014-12-20；**修回日期:** 2015-03-26.

基金项目: 国家社会科学基金重点项目(14AZD049)；国家自然科学基金项目(71171112, 71363046, 71503103, 71571100)；中央高校基本科研业务费专项资金项目(NS2014086)；教育部人文社科项目(13YJC790198)；江苏省普通高校研究生科研创新计划项目(CXLX13_171)；广义虚拟经济研究专项(GX2013-1017(M))；安徽工业大学青年教师科研基金项目(QZ201321).

作者简介: 刘小弟(1981−), 男, 讲师, 博士生, 从事多属性决策、复杂系统建模的研究；朱建军(1976−), 男, 教授, 博士生导师, 从事多属性决策理论与方法、智能优化算法、灰色系统理论等研究.

方法, 对属性进行约简, 从而确定属性权重; 文献 [14] 基于各属性下属性值的差异, 利用最大偏差法求属性权重.

在多属性决策问题中, 属性权重会直接影响到决策结果. 上述关于犹豫模糊环境下属性权重的确定方法主要基于以下两个不同方面:

1) 基于方案视角, 如文献 [18] 研究属性权重信息部分已知的犹豫模糊多属性决策问题, 根据方案满意度, 利用方案在各属性下的得分值建立优化模型以获得属性权重;

2) 基于属性视角, 如文献 [14] 的最大偏差法, 根据各属性下属性值的差异确定属性权重, 以及文献 [26] 中的熵权法和文献 [27] 中的属性约简法等.

通过梳理现有文献可以发现, 关于犹豫模糊环境下属性权重确定方法的研究较少, 而且在确定属性权重时, 考虑属性间相关性的研究鲜有报道. 鉴于此, 本文以最大限度利用决策信息为出发点, 针对属性权重完全未知的犹豫模糊多属性决策问题, 从方案和属性两个不同方面, 充分研究决策信息的分散程度、平均水平以及属性间的相互关系等, 提出一种属性权重多目标优化方法.

1 基本概念

定义 1 [6-7] 设非空集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$, 则从 X 到 $[0,1]$ 的一个子集的函数称为犹豫模糊集, 记作

$$h_A(X)=\{\langle x,h_A(x)\rangle|x\in X\}, \tag{1}$$

其中: $h_A(x)$ 为区间 $[0,1]$ 中几个可能的数的集合, 表示 $x\in X$ 属于集合 A 的可能的程度. 为便于讨论, 称 $h_A(x)$ 为犹豫模糊元[19].

定义 2 [19] 设 $h(x)$ 为定义在 $x\in X$ 上的一个犹豫模元, 则称

$$s(h)=\frac{1}{l_h}\sum_{\gamma\in h}\gamma \tag{2}$$

为犹豫模糊元 $h(x)$ 的得分函数, 其中 l_h 表示犹豫模糊元 $h(x)$ 中元素个数.

定义 3 [2] 设 $h(x)$ 为定义在 $x\in X$ 上的一个犹豫模元, 则称

$$v(h)=\frac{1}{l_h}\sqrt{\sum_{\gamma_i,\gamma_j\in h}(\gamma_i-\gamma_j)^2} \tag{3}$$

为犹豫模糊元 $h(x)$ 的方差函数, 其中 l_h 表示犹豫模糊元 $h(x)$ 中元素个数.

犹豫模糊元 $h(x)$ 的得分函数 $s(h)$ 和方差函数 $v(h)$ 分别类似于统计学中的期望和方差. 得分函数 $s(h)$ 反映了犹豫模糊元 $h(x)$ 中元素的平均水平, 方差函数 $v(h)$ 反映了 $h(x)$ 中元素的分散程度. 基于 $s(h)$ 和 $v(h)$, 文献 [2] 给出如下比较规则.

定义 4 [2] 设犹豫模糊元 $h_1(x)$ 的得分函数和方差函数分别为 $s(h_1)$、$v(h_1)$, $h_2(x)$ 的得分函数和方差函数分别为 $s(h_2)$、$v(h_2)$, 则:

1) 若 $s(h_1)<s(h_2)$, 则 $h_1<h_2$.

2) 若 $s(h_1)=s(h_2)$, 则:

①若 $v(h_1)=v(h_2)$, 则 $h_1=h_2$;

②若 $v(h_1)>v(h_2)$, 则 $h_1<h_2$;

③若 $v(h_1)<v(h_2)$, 则 $h_1>h_2$.

任意两个犹豫模糊元 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$, 其所包含的元素个数可能不同, 为了进行有效运算, 作如下规定[8,29]: 将 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ 中元素按照递增的顺序排列, 即 $h_1^{\tau(k)}(x), h_2^{\tau(k)}(x)$ 分别表示 $h_1(x), h_2(x)$ 中第 k 小的元素. 设犹豫模糊元 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ 中元素个数分别为 l_1 和 l_2, 为便于计算, 在元素较少的集合中添加元素, 使其个数达到 $l=\max\{l_A,l_B\}$, 添加原则反映了决策者的风险态度.

定义 5 [14] 设犹豫模糊元 $h(x)=\{\gamma_i|i=1,2,\cdots,l_h\}$, 且 h^+ 和 h^- 分别表示 $h(x)$ 中的最大值和最小值, 即

$$h^+=\max\{\gamma_i|i=1,2,\cdots,l_h\},$$

$$h^-=\min\{\gamma_i|i=1,2,\cdots,l_h\},$$

则按照下式在 $h(x)$ 中添加元素:

$$\tilde{h}=\theta h^+ +(1-\theta)h^-,\ 0\leqslant\theta\leqslant 1. \tag{4}$$

决策者可以根据自己的偏好在 $h(x)$ 中添加不同的值. 若 $\theta=0$, 添加的值为 $\tilde{h}=h^-$, 说明决策者厌恶风险, 对预期的结果估计比较悲观, 则添加集合中值最小的元素; 若 $\theta=1$, 添加的值为 $\tilde{h}=h^+$, 说明决策者喜好风险, 对预期的结果有比较乐观的估计, 则添加集合中值最大的元素; 若 $\theta=\dfrac{1}{2}$, 则 $\tilde{h}=\dfrac{1}{2}(h^+ + h^-)$, 说明决策者是风险中立的. 当然, 对于原始决策信息中各个需要补全的犹豫模糊元 (即属性值) 较多时, 必然与原始决策信息差异较大, 因此, 为提高决策质量和效果, 可以考虑利用决策信息可信度[28]等方式, 以减少补全元素所带来的影响, 这也是下一步研究的重要内容.

2 主要结论及方法

2.1 问题描述

对于犹豫模糊多属性决策问题, 设 $Y=\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_m\}$, $G=\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}$ 分别表示方案集和属性集, 且属性的权重向量为 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$, $w_j\in[0,1]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^n w_j=1$. 设 $D=(h_{ij})_{m\times n}$ 为犹豫模糊决策矩阵, 其中 $h_{ij}(i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n)$ 是一个犹豫模糊元, 表示方案 Y_i 满足属性 G_j 的程度.

为便于分析, 方案 $Y_i(i=1,2,\cdots,m)$ 采用向量

形式, 即

$$Y_i=(h_{i1},h_{i2},\cdots,h_{in}),\ i=1,2,\cdots,m.$$

假设犹豫模糊正理想点向量为

$$Y^+=(h_1^+,h_2^+,\cdots,h_n^+).\tag{5}$$

其中

$$h_j^+=\begin{cases}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant k\leqslant l_h}\{h_{ij}^{\tau(k)}\},\ G_j\text{ 是效益型属性;}\\ \min\limits_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant k\leqslant l_h}\{h_{ij}^{\tau(k)}\},\ G_j\text{ 是成本型属性.}\end{cases}\tag{6}$$

2.2　属性权重确定方法

由于决策情景的复杂性, 属性权重的确定并非易事. 本文基于方案和属性两个不同视角, 充分考虑犹豫模糊决策信息特点, 构建犹豫模糊环境下属性权重确定模型.

首先, 对于方案 $Y_i=(h_{i1},h_{i2},\cdots,h_{in}),i=1,2,\cdots,m$, 若 h_{ij} 中的值越大, 即得分值 $s(h_{ij})$ 越高, 则方案越优; 若 h_{ij} 的方差 $v(h_{ij})$ 越小, 即 h_{ij} 中元素越集中, 则决策者提供的评价值越一致, 从而越能体现项目或方案所处的真实水平. 同时, 考虑各决策方案之间是公平竞争的, 不存在偏好关系, 基于此, 构建如下模型:

$$\text{M1}\begin{cases}\max f_1(W)=\sum\limits_{i=1}^m\sum\limits_{j=1}^n\dfrac{s(h_{ij})}{s(h_{ij})+v(h_{ij})}w_j;\\ \text{s.t. }\sum\limits_{j=1}^n w_j^2=1,\ 0\leqslant w_j\leqslant 1.\end{cases}$$

其次, 若各决策方案在属性 G_j 下的属性值差异越大或越分散, 则该属性 G_j 对方案的决策和排序所起的作用越大, 此时对该属性赋予较大的权重; 反之, 若属性 G_j 下的属性值差异越小或越集中, 则该属性 G_j 对方案的决策和排序所起的作用越小, 此时对该属性赋予较小的权重[14,30]. 因此, 基于式 (3) 构建如下模型:

$$\text{M2}\begin{cases}\max f_2(W)=\\ \dfrac{1}{m}\sum\limits_{j=1}^n\sqrt{\sum\limits_{1\leqslant p,q\leqslant m}d^2(h_{pj},h_{qj})}\ w_j;\\ \text{s.t. }\sum\limits_{j=1}^n w_j^2=1,\ 0\leqslant w_j\leqslant 1.\end{cases}$$

其中 $d(h_{pj},h_{qj})$ 表示犹豫模糊元 h_{pj} 与 h_{qj} 之间的距离. 不失一般性, $d(h_{pj},h_{qj})$ 按照犹豫欧氏距离计算[12], 即

$$d(h_{pj},h_{qj})=\sqrt{\frac{1}{l}\sum_{k=1}^l|h_{pj}^{\tau(k)}-h_{qj}^{\tau(k)}|^2}.\tag{7}$$

另外, 设 R_{jt} 表示属性 G_j 与其余属性的关联度, 且 $R_{jt}=\sum\limits_{t=1,t\neq j}^n r_{jt}$, 其中 r_{jt} 表示属性 G_j 与 G_t 的关联度. 不失一般性, r_{jt} 按照下式[8]计算:

$$r_{jt}=\frac{\sum\limits_{a=1}^m\Big(\dfrac{1}{l_a}\sum\limits_{k=1}^{l_a}h_{aj}^{\tau(k)}\cdot h_{at}^{\tau(k)}\Big)}{\max\Big\{\sum\limits_{a=1}^m\Big(\dfrac{1}{l_a}\sum\limits_{k=1}^{l_a}(h_{aj}^{\tau(k)})^2\Big),\sum\limits_{a=1}^m\Big(\dfrac{1}{l_a}\sum\limits_{k=1}^{l_a}(h_{at}^{\tau(k)})^2\Big)\Big\}}.\tag{8}$$

若 R_{jt} 越大, 属性 G_j 与其余属性值的分布和排列越相似, 此时剔除属性 G_j 对方案排序影响较小, 则可对属性 G_j 赋予较小的权重; 反之赋予较大的权重[30]. 基于此, 构建如下模型:

$$\text{M3}\begin{cases}\max f_3(W)=\sum\limits_{j=1}^n\sum\limits_{t=1}^n(1-r_{jt})w_j;\\ \text{s.t. }\sum\limits_{j=1}^n w_j^2=1,\ 0\leqslant w_j\leqslant 1.\end{cases}$$

综合模型 M1、M2 及 M3, 可得以下组合模型:

$$\text{M4}\begin{cases}\max f(W)=\\ \alpha\sum\limits_{i=1}^m\sum\limits_{j=1}^n\dfrac{s(h_{ij})}{s(h_{ij})+v(h_{ij})}w_j+\\ \beta\dfrac{1}{m}\sum\limits_{j=1}^n\sqrt{\sum\limits_{1\leqslant p,q\leqslant m}d^2(h_{pj},h_{qj})}\ w_j+\\ \gamma\sum\limits_{j=1}^n\sum\limits_{t=1}^n(1-r_{jt})w_j;\\ \text{s.t. }\sum\limits_{j=1}^n w_j^2=1,\ 0\leqslant w_j\leqslant 1.\end{cases}$$

其中: α,β,γ 为平衡系数, $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant 1,\alpha+\beta+\gamma=1$, 由决策者根据实际情形事先给出. 为求解模型 M4, 构造拉格朗日辅助函数

$$L(W,\lambda)=f(W)+\frac{1}{2}\lambda\Big(\sum_{j=1}^n w_j^2-1\Big).\tag{9}$$

关于 $w_j(j=1,2,\cdots,n)$, λ 求偏导, 同时令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial w_j}=\alpha\sum\limits_{i=1}^m\dfrac{s(h_{ij})}{s(h_{ij})+v(h_{ij})}+\\ \qquad\beta\dfrac{1}{m}\sqrt{\sum\limits_{1\leqslant p,q\leqslant m}d^2(h_{pj},h_{qj})}+\\ \qquad\gamma\sum\limits_{t=1}^n(1-r_{jt})+\lambda w_j=0;\\ \dfrac{\partial L}{\partial\lambda}=\dfrac{1}{2}\Big(\sum\limits_{j=1}^n w_j^2-1\Big)=0,\ j=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

解得属性权重 $w_j^*(j=1,2,\cdots,n)$ 为

$$w_j^*=\frac{\alpha\sum\limits_{i=1}^m\dfrac{s(h_{ij})}{s(h_{ij})+v(h_{ij})}+}{\Big(\sum\limits_{j=1}^n\Big(\alpha\sum\limits_{i=1}^m\dfrac{s(h_{ij})}{s(h_{ij})+v(h_{ij})}+}\rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{\beta \dfrac{1}{m}\sqrt{\displaystyle\sum_{1\leqslant p,q\leqslant m} d^2(h_{pj},h_{qj})}+}{\beta \dfrac{1}{m}\sqrt{\displaystyle\sum_{1\leqslant p,q\leqslant m} d^2(h_{pj},h_{qj})}+} \rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{\gamma \displaystyle\sum_{t=1}^{n}(1-r_{jt})}{\gamma \displaystyle\sum_{t=1}^{n}(1-r_{jt})\Big)^2\Big)^{1/2}}. \tag{10}$$

将 $w_j^*(j=1,2,\cdots,n)$ 归一化, 得

$$w_j^* =$$

$$\frac{\alpha\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{s(h_{ij})}{s(h_{ij})+v(h_{ij})}+}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\Big(\alpha\sum_{i=1}^{m}\frac{s(h_{ij})}{s(h_{ij})+v(h_{ij})}+} \rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{\beta\dfrac{1}{m}\sqrt{\displaystyle\sum_{1\leqslant p,q\leqslant m} d^2(h_{pj},h_{qj})}+\gamma\displaystyle\sum_{t=1}^{n}(1-r_{jt})}{\beta\dfrac{1}{m}\sqrt{\displaystyle\sum_{1\leqslant p,q\leqslant m} d^2(h_{pj},h_{qj})}+\gamma\displaystyle\sum_{t=1}^{n}(1-r_{jt})\Big)}. \tag{11}$$

根据方案与正理想点的相似度对方案进行排序[29], 有

$$S(Y_i)=1-d_w(Y_i,Y^+). \tag{12}$$

$S(Y_i)(i=1,2,\cdots,m)$ 越大, 对应的方案越优. 其中距离 $d_w(Y_i,Y^+)$ 按式 (7) 计算, 表示方案与正理想点的犹豫加权欧氏距离

$$d_w(Y_i,Y^+)=\sum_{j=1}^{n} w_j\sqrt{\frac{1}{l_j}\sum_{k=1}^{l_j}|(h_{ij})^{\tau(k)}-(h_j^+)^{\tau(k)}|^2}. \tag{13}$$

显然, 上述模型 M1 $\sim$ M3 可以看成模型 M4 的特殊情形. 本文方法在求属性权重时也较为灵活, 通过平衡系数的取值不同, 可以反映决策者的不同偏好. 当 $\alpha=1,\beta=\gamma=0$ 时, 决策者注重方案自身特征; 当 $\alpha=\gamma=0,\beta=1$ 时, 决策者注重属性特征; 当 $\alpha=\beta=0$, $\gamma=1$ 时, 决策者注重属性间相互关系; 当 $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\neq 0$ 时, 决策者综合考虑方案、属性特点, 充分利用决策信息, 并对评价对象作出较为全面、客观、合理的评价. 而单纯的考虑方案或属性特点只是关注了决策信息的某个方面, 从而在对属性权重的确定上缺乏一定的可靠、合理性. 本文方法正是基于这一思想, 通过较为全面地衡量项目或方案, 以期较大程度地反映属性权重的真实水平.

2.3 决策步骤

对于某犹豫模糊多属性决策问题, 设 Y、G、W 如前所述, 分别表示方案集、属性集及属性权重向量. 综上分析, 下面给出具体决策步骤.

Step 1: 决策者对每个方案按照各属性进行测度, 获得犹豫模糊决策矩阵 $D=(h_{ij})_{m\times n}$, 根据式 (5) 和 (6) 计算犹豫模糊正理想点向量;

Step 2: 根据式 (11) 计算属性权重;

Step 3: 根据式 (12) 计算各方案与理想点的相似度 $S(Y_i), i=1,2,\cdots,m$;

Step 4: 根据 $S(Y_i)$ 的值对方案 Y_i 进行排序, $S(Y_i)$ 越大, 方案 $Y_i(i=1,2,\cdots,m)$ 越优;

Step 5: 结束.

3 算例分析

3.1 算例 [26]

某汽车制造公司决定为其核心零件选择合适的供应商. 决策小组经过评价, 选出 4 个供应商 (方案) 以供选择, 主要考虑 4 个因素: 产品质量 G_1, 可信度 G_2, 交货期 G_3, 产品价格 G_4. 其中 G_4 为成本型属性, 其余为效益型属性. 决策小组对方案 Y_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 按各属性 $G_j(j=1,2,\cdots,n)$ 进行测度, 获得犹豫模糊决策矩阵 $D=(h_{ij})_{4\times 4}$ (见表 1). 其中 $h_{11}=\{0.2,0.4,0.7\}$ 表示在产品质量方面决策小组有 3 种不同观点, 即对方案 Y_1 满足属性 G_1 的程度, 有 0.2、0.4 和 0.7 三种, 表明决策小组中的成员意见不一致.

1) 根据式 (5) 和 (6), 可得犹豫模糊正理想点向量为

$$Y^+=(\{0.7\},\{0.9\},\{0.9\},\{0.1\});$$

2) 假设决策者为风险厌恶型, 利用式 (11) 获得属性权重向量 (不失一般性, 取 $\alpha=\beta=\gamma=1/3$) 为

$$W=(0.26,0.23,0.26,0.25)^{\mathrm{T}};$$

3) 根据式 (12) 计算各方案与正理想点的相似度 $S(Y_i), i=1,2,3,4$, 有

$$S(Y_1)=0.575\,8,\ S(Y_2)=0.669\,3,$$
$$S(Y_3)=0.578\,8,\ S(Y_4)=0.621\,3;$$

表 1　犹豫模糊决策矩阵 $D=(h_{ij})_{4\times 4}$

方案	G_1	G_2	G_3	G_4
Y_1	$\{0.2,0.4,0.7\}$	$\{0.1,0.2,0.5,0.7\}$	$\{0.2,0.3,0.5,0.7,0.8\}$	$\{0.1,0.4,0.6\}$
Y_2	$\{0.4,0.6,0.7\}$	$\{0.1,0.2,0.4,0.6\}$	$\{0.3,0.4,0.6,0.8,0.9\}$	$\{0.1,0.2,0.4\}$
Y_3	$\{0.2,0.3,0.6\}$	$\{0.3,0.4,0.5,0.9\}$	$\{0.2,0.4,0.6,0.7,0.8\}$	$\{0.3,0.4,0.8\}$
Y_4	$\{0.2,0.3,0.5\}$	$\{0.2,0.3,0.5,0.7\}$	$\{0.4,0.6,0.7,0.8,0.9\}$	$\{0.1,0.2,0.7\}$

4) 根据 $S(Y_i)$ 的值对方案 Y_i 进行排序, 有

$$A_2 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_1.$$

假设决策者为风险中立或偏好型的, 则获得的最优方案均为 A_2, 但方案排序不同 (见表 2). 可见决策者的风险态度会影响决策结果, 因此, 在实际决策过程中, 应根据决策者风险态度进行合理决策.

表 2　风险态度与方案排序

风险态度	属性权重	方案排序
厌恶型	$(0.26, 0.23, 0.26, 0.25)^{\mathrm{T}}$	$A_2 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_1$
中立型	$(0.32, 0.12, 0.16, 0.40)^{\mathrm{T}}$	$A_2 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$
偏好型	$(0.28, 0.22, 0.24, 0.26)^{\mathrm{T}}$	$A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$

3.2　结果比较

对于属性权重完全未知的犹豫模糊多属性决策问题, 文献 [14]、文献 [26] 和文献 [27] 分别利用最大偏差法、熵权法及属性约简法获得属性权重, 与其相比 (见表 3), 本文方法具有下述特点:

1) 文献 [14] 利用最大偏差法确定属性权重, 该方法侧重决策信息的差异程度, 通过方案在各属性下的属性值差异最大建立优化模型获得属性权重. 利用式 (12) 获得的方案排序为 $A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$. 而本文基于决策信息测度建立优化模型获得权重, 尤其当模型中的平衡系数 $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$ 时, 获得的最优方案及排序与其一致 (见表 3). 此时, 模型只考虑各属性下属性值的分散程度 (方差), 即基于方差最大建立模型获得权重, 其建模思想与最大偏差法一致, 从这点看, 文献 [14] 中的最大偏差法可以看成是本文的一种特殊情形.

2) 文献 [26] 利用熵权法获得属性权重, 该方法侧重决策信息模糊程度; 文献 [27] 基于粗糙集理论与方法对属性进行约简, 去除冗余属性并确定非冗余属性权重. 这两种方法均基于属性视角考虑属性的重要性, 利用式 (12) 获得的方案排序均为 $A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$. 若按照本文方法, 则当 $\alpha = \beta = 0, \gamma = 1$, 或 $\alpha = \gamma = 0, \beta = 1$ 时, 模型 M4 均基于属性视角, 排序结果与文献 [26]、文献 [27] 相同; 当 $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ 时, 模型 M4 基于方案视角, 与上述方法考虑问题视角不同, 导致排序结果稍有不同; 当 $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$ 时, 模型 M4 同时考虑方案和属性特点, 此时方案排序为 $A_2 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_1$. 与文献 [26]、文献 [27] 相比, 最优方案一致, 但排序结果略有差异. 主要是文献 [26]、文献 [27] 在求属性权重时, 仅考虑属性自身重要性, 忽视了属性间相互关系. 而本文方法则充分利用了决策信息, 既考虑属性自身重要性, 又考虑属性间的相关性, 以及方案的整体水平.

3) 文献 [18] 依据方案的满意度建立非线性优化模型, 实质上是利用了方案在各属性下的得分值 (即均值) 建立模型以确定属性权重. 该模型基于方案视角, 但忽视了属性间的相关性, 并且主要针对属性权重信息部分已知的犹豫模糊多属性决策问题. 而本文则讨论了属性权重完全未知的犹豫模糊多属性决策问题, 不仅考虑了方案在各属性下的得分值, 同时考虑了决策信息的分散程度 (即方差) 以及属性间的相关性建立优化模型, 确定权重. 另外, 本文方法同样适用于属性权重信息部分已知的情形, 只需对模型 M4 中约束条件稍加变化, 利用 Matlab 或 Lingo 等数学软件求解即可.

表 3　结果比较

属性权重确定方法		属性权重	方案排序
最大偏差法		$(0.26, 0.22, 0.20, 0.32)^{\mathrm{T}}$	$A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$
熵权法		$(0.18, 0.21, 0.16, 0.45)^{\mathrm{T}}$	$A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$
属性约简法		$(1/3, 0, 1/3, 1/3)^{\mathrm{T}}$	$A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$
本文方法	$\alpha = \beta = \gamma = 1/3$	$(0.26, 0.23, 0.26, 0.25)^{\mathrm{T}}$	$A_2 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_1$
	$\alpha = \gamma = 0, \beta = 1$	$(0.26, 0.25, 0.20, 0.29)^{\mathrm{T}}$	$A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$
	$\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$	$(0.27, 0.25, 0.23, 0.25)^{\mathrm{T}}$	$A_2 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_1$
	$\alpha = \beta = 0, \gamma = 1$	$(0.31, 0.19, 0.24, 0.26)^{\mathrm{T}}$	$A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$

4　结　论

本文对属性权重完全未知的犹豫模糊多属性决策问题进行了研究. 为充分利用决策信息, 根据犹豫模糊信息测度, 如均值、方差以及属性间的关联度, 构造优化模型获得属性权重. 属性权重确定方法灵活且易于操作, 可以根据实际需要选择不同的平衡系数. 最后, 通过方案与正理想点的相似度实现了方案的择优排序.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Liao H C, Xu Z S. A VIKOR-based method for hesitant fuzzy multi-criteria decision making[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2013, 12(4): 373-392.

[3] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[4] Dubois D, Prade H. Fuzzy sets and systems: Theory and applications[M]. New York: Academic Press, 1980: 30-32.

[5] Yager R R. On the theory of bags[J]. Int J of General Systems, 1986, 13(1): 23-37.

[6] Torra V, Narukawa Y. On hesitant fuzzy sets and decision[C]. The 18th IEEE Int Conf on Fuzzy Systems. Jeju Island, 2009: 1378-1382.

[7] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.

[8] Chen N, Xu Z S, Xia M M. Correlation coefficients of hesitant fuzzy sets and their applications to clustering analysis[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(4): 2197-2211.

[9] Zhang X L, Xu Z S. A MST clustering analysis method under hesitant fuzzy environment[J]. Control and Cybernetics, 2012, 41(3): 645-666.

[10] Chen N, Xu Z S, Xia M M. Hierarchical hesitant fuzzy K-means clustering algorithm[J]. Applied Mathematics: A J of Chinese Universities(Series B), 2014, 29(1): 1-17.

[11] Zhang X L, Xu Z S. Hesitant fuzzy agglomerative hierarchical clustering algorithms[J]. Int J of Systems Science, 2015, 46(3): 562-576.

[12] Xu Z S, Xia M M. On distance and correlation measures of hesitant fuzzy information[J]. Int J of Intelligent Systems, 2011, 26(5): 410-425.

[13] Zhang X L, Xu Z S. The TODIM analysis approach based on novel measured functions under hesitant fuzzy environment[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 61(1): 48-58.

[14] Xu Z S, Zhang X L. Hesitant fuzzy multi-attribute decision making based on TOPSIS with incomplete weight information[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 52(1): 53-64.

[15] Wang J Q, Wang D D, Zhang H Y, et al. Multi-criteria outranking approach with hesitant fuzzy sets[J]. OR Spectrum, 2014, 36(4): 1001-1019.

[16] Farhadinia B. A novel method of ranking hesitant fuzzy values for multiple attribute decision making problems[J]. Int J of Intelligent Systems, 2013, 28(8):752-767.

[17] Xia M M, Xu Z S. Managing hesitant information in GDM problems under fuzzy and multiplicative preference relations[J]. Int J of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2013, 21(6): 865-897.

[18] Liao H C, Xu Z S. Satisfaction degree based interactive decision making method under hesitant fuzzy environment with incomplete weights[J]. Int J of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2014, 22(4): 505-529.

[19] Xia M M, Xu Z S. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2011, 52(3): 395-407.

[20] Xia M M, Xu Z S, Chen N. Some hesitant fuzzy aggregation operators with their application in group decision making[J]. Group Decision and Negotiation, 2013, 22(2): 259-279.

[21] Zhang Z M. Hesitant fuzzy power aggregation operators and their application to multiple attribute group decision making[J]. Information Sciences, 2013, 234(1): 150-181.

[22] Wei G W. Hesitant fuzzy prioritized operators and their application to multiple attribute decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 31(1):176-182.

[23] Yu D J, Zhang W Y, Xu Y J. Group decision making under hesitant fuzzy environment with application to personnel evaluation[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 52(1): 1-10.

[24] Wei G W, Zhao X F, Wang H J, et al. Hesitant fuzzy Choquet integral aggregation operators and their applications to multiple attribute decision making[J]. Information: An Int Interdisciplinary J, 2012, 15(2): 441-448.

[25] Zhu B, Xu Z S, Xia M M. Hesitant fuzzy geometric Bonferroni means[J]. Information Sciences, 2012, 205(1): 72-85.

[26] Xu Z S, Xia M M. Hesitant fuzzy entropy and cross-entropy and their use in multiattribute decision-making[J]. Int J of Intelligent Systems, 2012, 27(9):799-822.

[27] 朱丽, 朱传喜, 张小芝. 基于粗糙集的犹豫模糊多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2014, 29(7): 1335-1339.
(Zhu L, Zhu C X, Zhang X Z. Method for hesitant fuzzy multi-attribute decision making based on rough sets[J]. Control and Decision, 2014, 29(7): 1335-1339.)

[28] Xia M M, Xu Z S, Chen N. Induced aggregation under confidence levels[J]. Int J of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2011, 19(2): 201-227.

[29] Xu Z S, Xia M M. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2011, 181(11): 2128-2138.

[30] Wang Y M, Luo Y. Integration of correlations with standard deviations for determining attribute weights in multiple attribute decision making[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2010, 51(1): 1-12.

(责任编辑：曹洪武)