文章编号: 1001-0920 (2016) 03-0571-06 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2014.1966

区间直觉模糊信息下的双向投影决策模型

邵良杉, 赵琳琳
(辽宁工程技术大学 系统工程研究所，辽宁 葫芦岛 125000)

摘 要: 研究权重完全未知、评价信息为区间直觉模糊数的多准则决策问题. 考虑犹豫度影响, 给出备选方案与正理想方案、负理想方案形成的向量表达方式, 提出一种针对区间直觉模糊信息的向量投影测度方法; 构建基于方案投影总偏差最小的非线性规划准则权重确定模型; 给出基于方案投影的相对贴近度测算公式, 并以此对方案进行排序. 最后通过算例对比分析表明了所提出方法的有效性和可行性.

关键词: 多准则决策；区间直觉模糊集；双向投影；相对贴近度
中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Bidirectional projection method with interval-valued intuitionistic fuzzy information

SHAO Liang-shan, *ZHAO Lin-lin*
(System Engineering Institute，Liaoning Technical University，Huludao 125000，China．Correspondent：ZHAO Lin-lin，E-mail：linlinzhao1204@126.com)

Abstract: Considering the importance of the hesitation degree, a multiple criteria fuzzy decision making method based on interval-valued intuitionistic fuzzy number is proposed for the situations where the information about criteria weights is completely unknown. The vectors of an alternative, and an ideal(critical) alternative are defined. A bidirectional projection measure method is proposed, in which the criteria values are in the form of the interval-valued intuitionistic fuzzy set. An optimization model is established to obtain the criteria weights. A relative closeness degree formula based on the alternatives is presented in order to rank the alternatives. Finally, a numerical example is given to verify the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Keywords: multiple criteria analysis；interval-valued intuitionistic fuzzy set；bidirectional projection；relative closeness degree

0 引 言

直觉模糊集作为模糊集的一种拓展[1-2], 指出一个元素属于一个集合的隶属度、非隶属度和犹豫度, 强有力地描述了客观事物“非此非彼”的不确定性. 区间直觉模糊集 (IVIFS)[3]的包络是一个直觉模糊集 (IFS), 对于现实中含直觉模糊信息的多准则决策应用研究具有较大的推动作用. 当决策者评价某一元素属于某一集合时, 存在一定的不确定性和犹豫性时, IFS 是一个非常有用的方法. 如对某项目评价时, 针对某一准则下的方案, 决策者给出隶属度存在区间为 [0.4, 0.5], 非隶属度存在区间为 $[0.3, 0.4]$, 为了反映和刻画决策者这种复杂的状态, 可用区间直觉模糊数 (IVIFN)[4] $\langle[0.4, 0.5]\ [0.3, 0.4]\rangle$ 表示, 即用隶属度和非隶属度来描述实数域上的 IFS, 这样既能充分利用决策者的决策信息, 又能体现其犹豫程度. 若采用模糊数信息来描述, 则会损失较多的信息.

直觉模糊数 (IFN) 是一种由隶属度、非隶属度和犹豫度来描述实数域上的 IFS, 是模糊分析学中重要的基础概念. 文献 [5-7] 提出的 IFN 可以表示这类不确定情况, 但实际运算相对复杂, 且运算受限于三角模糊数和梯形模糊数. 文献 [8-9] 对静态 IFN 作了理论研究, 并将其应用到多准则决策中. 文献 [5] 对动态 IFN 进行了加法和数乘研究. 文献 [10] 给出了 IFN 上理想和下理想概念, 基于结构元理论给出了 IFN 的运算法则以及距离和序列收敛性, 并讨论了相应的性质. 文献 [11] 给出了 IFN 的结构元表示的多准

收稿日期: 2014-12-27；**修回日期:** 2015-03-22.
基金项目: 国家自然科学基金项目(71371091)；辽宁省社会科学规划基金项目(L14BTJ004).
作者简介: 邵良杉(1961−), 男, 教授, 博士生导师, 从事矿业系统工程等研究；赵琳琳(1988−), 女, 博士生, 从事系统优化与决策的研究.

则排序方法. 文献 [12] 基于关联度定义了 IVIFS 的分解定理. 文献 [13] 基于相关系数, 对 IVIFN 进行了理论研究, 通过实例比较表明新方法更为合理.

对于评价信息是直觉模糊信息的多准则决策问题, 已在社会、经济及管理过程中受到重视, 评价准则权重的确定对于科学合理的评价具有重要作用. 文献 [14] 基于熵原理研究赋权方法; 文献 [15] 提出线性规划法求解权重的多准则决策方法; 文献 [16] 从相似性角度给出了 IFN 理想决策矩阵的优化方法; 文献 [17] 提出了非线性求解权重方法, 并将其应用于多准则决策中; 文献 [18-20] 利用投影法对方案进行排序. 以上方法均取得了较好的效果, 但仍存在一定的不足, 如线性规划求解方法受先验权重的限制, 距离测度的方法中忽略了犹豫度信息, 以及投影法中缺失备选方案与负理想方案关系等.

综上所述, 基于权重未知的 IVIFN 多准则决策研究还不完善, 需进一步探寻. 为此, 本文在准则权重未知的区间直觉模糊信息情景下, 将投影法引入不确定多准则决策中, 充分考虑正负理想方案与备选方案的关系, 提出双向投影测度方法, 建立准则权重的优化模型, 进而得到优化方案, 并用实例验证了该模型的有效性.

1 区间直觉模糊集相关理论[21]

定义 1 设非空论域 X 上的 IVIFS 为

$$A=\{\langle x,[\underline{\mu}_A(x),\bar{\mu}_A(x)],[\underline{\upsilon}_A(x),\bar{\upsilon}_A(x)]\rangle|x\in X\}.$$

其中: $[\underline{\mu}_A(x),\bar{\mu}_A(x)]\subseteq[0,1]$, $[\underline{\upsilon}_A(x),\bar{\upsilon}_A(x)]\subseteq[0,1]$ 分别表示元素 x 对集合 A 的隶属度区间和非隶属度区间, 且 $\forall x\in X,\bar{\mu}_A(x)+\bar{\upsilon}_A(x)\leqslant 1$. 则犹豫度区间为

$$[\underline{\pi}_A(x),\bar{\pi}_A(x)]=$$
$$[1-\underline{\mu}_A(x)-\bar{\mu}_A(x),1-\underline{\upsilon}_A(x)-\bar{\upsilon}_A(x)].$$

定义 2 设 $X=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$ 上的两个 IVIFS 为 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$, $B=\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$. 其中

$$A_i=\langle[\underline{\mu}_A(x_i),\bar{\mu}_A(x_i)],[\underline{\upsilon}_A(x_i),\bar{\upsilon}_A(x_i)]\rangle,$$
$$B_i=\langle[\underline{\mu}_B(x_i),\bar{\mu}_B(x_i)],[\underline{\upsilon}_B(x_i),\bar{\upsilon}_B(x_i)]\rangle.$$

则 A 与 B 的相关系数, 即夹角余弦定义如下式所示:

$$K_{\rm IVIFS}(A,B)=\frac{C_{\rm IVIFS}(A,B)}{\sqrt{E_{\rm IVIFS}(A)}\sqrt{E_{\rm IVIFS}(B)}}.\tag{1}$$

其中

$$C_{\rm IVIFS}(A,B)=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\underline{\mu}_A(x_i)\underline{\mu}_B(x_i)+\bar{\mu}_A(x)\bar{\mu}_B(x_i)+$$
$$\underline{\upsilon}_A(x_i)\underline{\upsilon}_B(x_i)+\bar{\upsilon}_A(x_i)\bar{\upsilon}_B(x_i)+$$
$$\underline{\pi}_A(x_i)\underline{\pi}_B(x_i)+\bar{\pi}_A(x_i)\bar{\pi}_B(x_i)],\tag{2}$$

$$E_{\rm IVIFS}(A)=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}([\underline{\mu}_A(x_i)]^2+[\bar{\mu}_A(x_i)]^2+[\underline{\upsilon}_A(x_i)]^2+$$
$$[\bar{\upsilon}_A(x_i)]^2+[\underline{\pi}_A(x_i)]^2+[\bar{\pi}_A(x_i)]^2),\tag{3}$$

$$E_{\rm IVIFS}(B)=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}([\underline{\mu}_B(x_i)]^2+[\bar{\mu}_B(x_i)]^2+$$
$$[\underline{\upsilon}_B(x_i)]^2+[\bar{\upsilon}_B(x_i)]^2+[\underline{\pi}_B(x_i)]^2+[\bar{\pi}_B(x_i)]^2).\tag{4}$$

定理 1 对于 $\forall A,B\in$ IVIFS, $K_{\rm IVIFS}(A,B)$ 具有如下性质:

1) $K_{\rm IVIFS}(A,B)=K_{\rm IVIFS}(B,A)$;

2) $0\leqslant K_{\rm IVIFS}(A,B)\leqslant 1$;

3) $A=B\Leftrightarrow K_{\rm IVIFS}(A,B)=1$.

2 区间直觉模糊信息的双向投影方法

设某一研究领域的备选方案集合为 $X=\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$, 准则集为 $G=\{G_1,G_2,\cdots,G_m\}$, 含有区间直觉模糊信息的决策矩阵为 $U=(u_{ij})_{n\times m}=(\langle[\underline{\mu}_{ij},\bar{\mu}_{ij}],[\underline{\upsilon}_{ij},\bar{\upsilon}_{ij}]\rangle)_{n\times m}$, 其中 u_{ij} 为决策者对方案 X_i 在准则 G_j 下的效果评价值.

定义 3[19] $X_p=(\langle[\underline{\mu}_{pj},\bar{\mu}_{pj}],[\underline{\upsilon}_{pj},\bar{\upsilon}_{pj}]\rangle)$ 和 $X_q=(\langle[\underline{\mu}_{qj},\bar{\mu}_{qj}],[\underline{\upsilon}_{qj},\bar{\upsilon}_{qj}]\rangle)$ 是 X 上的两个方案, 则 X_p 和 X_q 形成的向量定义如下式所示:

$$X_pX_q=(\langle[\min\underline{\mu}_j,\max\bar{\mu}_j],[\min\underline{\upsilon}_j,\max\bar{\upsilon}_j],$$
$$[\min\underline{\pi}_j,\max\bar{\pi}_j]\rangle).\tag{5}$$

其中

$$\min\underline{\mu}_j=\min(|\underline{\mu}_{qj}-\underline{\mu}_{pj}|,|\bar{\mu}_{qj}-\bar{\mu}_{pj}|),$$
$$\max\bar{\mu}_j=\max(|\underline{\mu}_{qj}-\underline{\mu}_{pj}|,|\bar{\mu}_{qj}-\bar{\mu}_{pj}|),$$
$$\min\underline{\upsilon}_j=\min(|\underline{\upsilon}_{pj}-\underline{\upsilon}_{qj}|,|\bar{\upsilon}_{pj}-\bar{\upsilon}_{qj}|),$$
$$\max\bar{\upsilon}_j=\max(|\underline{\upsilon}_{pj}-\underline{\upsilon}_{qj}|,|\bar{\upsilon}_{pj}-\bar{\upsilon}_{qj}|),$$
$$\min\underline{\pi}_j=\min(|\underline{\pi}_{qj}-\underline{\pi}_{pj}|,|\bar{\pi}_{qj}-\bar{\pi}_{pj}|),$$
$$\max\bar{\pi}_j=\max(|\underline{\pi}_{qj}-\underline{\pi}_{pj}|,|\bar{\pi}_{qj}-\bar{\pi}_{pj}|).$$

定义 4[21] $X^+=(\langle[\underline{\mu}_j^+,\bar{\mu}_j^+],[\underline{\upsilon}_j^+,\bar{\upsilon}_j^+],[\underline{\pi}_j^+,\bar{\pi}_j^+]\rangle)$ 和 $X^-=(\langle[\underline{\mu}_j^-,\bar{\mu}_j^-],[\underline{\upsilon}_j^-,\bar{\upsilon}_j^-],[\underline{\pi}_j^-,\bar{\pi}_j^-]\rangle)$ 分别为 X 上含直觉模糊信息的正理想方案和负理想方案. 其中 X_j^+ 和 X_j^- 分别定义如下:

$$X_j^+=\langle[\underline{\mu}_j^+,\bar{\mu}_j^+],[\underline{\upsilon}_j^+,\bar{\upsilon}_j^+],[\underline{\pi}_j^+,\bar{\pi}_j^+]\rangle=$$
$$\langle[\max_{1\leqslant i\leqslant n}\underline{\mu}_{ij},\max_{1\leqslant i\leqslant n}\bar{\mu}_{ij}],[\min_{1\leqslant i\leqslant n}\underline{\upsilon}_{ij},\min_{1\leqslant i\leqslant n}\bar{\upsilon}_{ij}],$$
$$[1-\max_{1\leqslant i\leqslant n}\bar{\mu}_{ij}-\min_{1\leqslant i\leqslant n}\bar{\upsilon}_{ij},1-\max_{1\leqslant i\leqslant n}\underline{\mu}_{ij}-\min_{1\leqslant i\leqslant n}\underline{\upsilon}_{ij}]\rangle,\tag{6}$$

$$X_j^-=\langle[\underline{\mu}_j^-,\bar{\mu}_j^-],[\underline{\upsilon}_j^-,\bar{\upsilon}_j^-],[\underline{\pi}_j^-,\bar{\pi}_j^-]\rangle=$$

$$\langle[\min_{1\leqslant i\leqslant n}\underline{\mu}_{ij},\min_{1\leqslant i\leqslant n}\bar{\mu}_{ij}],[\max_{1\leqslant i\leqslant n}\underline{\upsilon}_{ij},\max_{1\leqslant i\leqslant n}\bar{\upsilon}_{ij}],$$
$$[1-\min_{1\leqslant i\leqslant n}\bar{\mu}_{ij}-\max_{1\leqslant i\leqslant n}\bar{\upsilon}_{ij},1-\min_{1\leqslant i\leqslant n}\underline{\mu}_{ij}-\max_{1\leqslant i\leqslant n}\bar{\upsilon}_{ij}]\rangle. \tag{7}$$

定义 5 [19]　$X_p=(\langle[\underline{\mu}_{pj},\bar{\mu}_{pj}],[\underline{\upsilon}_{pj},\bar{\upsilon}_{pj}]\rangle)$ 和 $X_q=(\langle[\underline{\mu}_{qj},\bar{\mu}_{qj}],[\underline{\upsilon}_{qj},\bar{\upsilon}_{qj}]\rangle)$ 是 X 上的两个不同方案, 则 X_p 的长度可定义为

$$|X_p|=\sqrt{E_{\mathrm{IVIFS}}(X_p)}. \tag{8}$$

X_p 在 X_q 上的投影可定义为

$$\mathrm{Prj}_{X_q}(X_p)=|X_p|K_{\mathrm{IVIFS}}(X_p,X_q)=\frac{C_{\mathrm{IVIFS}}(X_p,X_q)}{\sqrt{E_{\mathrm{IVIFS}}(X_q)}}. \tag{9}$$

由式 (9) 可知, $\mathrm{Prj}_{X_q}(X_p)$ 越大, 表明 X_p 越靠近 X_q, 因此 X_p 越优, 进而可对 X_p 排序并选择最优方案.

定义 6　设备选方案、正理想方案和负理想方案分别为 X_i、X^+ 和 X^-, 则称式 (10) 和 (11) 分别为负理想方案与备选方案形成的向量在正理想方案与负理想方案所形成的向量上的投影, 和正理想方案与负理想方案所形成的向量在备选方案与正理想方案形成的向量上的投影. 即

$$\mathrm{Prj}_{X^-X^+}(X^-X_i)=|X^-X_i|K_{\mathrm{IVIFS}}(X^-X_i,X^-X^+)=\frac{C_{\mathrm{IVIFS}}(X^-X_i,X^-X^+)}{\sqrt{E_{\mathrm{IVIFS}}(X^-X^+)}}, \tag{10}$$

$$\mathrm{Prj}_{X_iX^+}(X^-X^+)=|X^-X^+|K_{\mathrm{IVIFS}}(X^-X^+,X_iX^+)=\frac{C_{\mathrm{IVIFS}}(X^-X^+,X_iX^+)}{\sqrt{E_{\mathrm{IVIFS}}(X_iX^+)}}. \tag{11}$$

定理 2　$\mathrm{Prj}_{X^-X^+}(X^-X_i)$ 越大, 方案 X_i 越靠近正理想方案 X^+; $\mathrm{Prj}_{X^-X^+}(X^-X_p)$ 越小, 方案 X_i 越远离正理想方案 X^+. $\mathrm{Prj}_{X_iX^+}(X^-X^+)$ 越大, 方案 X_p 越靠近负理想方案 X^-; $\mathrm{Prj}_{X_iX^+}(X^-X^+)$ 越小, 方案 X_i 越远离负理想方案 X^-.

证明　根据投影的定义, $\mathrm{Prj}_{X^-X^+}(X^-X_i)$ 越大, (X^-X_i) 越靠近 (X^-X^+), 从而方案 X_i 越靠近正理想方案 X^+; 反之亦然. 同理可证 $\mathrm{Prj}_{X_iX^+}(X^-X^+)$. □

3　基于区间直觉模糊信息双向投影的多准则决策模型

针对某一研究领域的多准则决策问题, 设 $X=\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 为备选方案集, $G=\{G_1,G_2,\cdots,G_m\}$ 为准则集, $\omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m\}$ 为负理想方案与备选方案形成的向量在正理想方案与负理想方案所形成向量上的投影的权重, $\rho=\{\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_m\}$ 为正理想方案与负理想方案所形成的向量在备选方案与正理想方案形成向量上的投影的权重. 其中: $\omega_j\in[0,1],\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j=1$; $\rho_j\in[0,1],\sum\limits_{j=1}^{m}\rho_j=1$. $U=(u_{ij})_{n\times m}$ 是含直觉模糊信息的决策矩阵, 其中 u_{ij} 表示决策者在准则 G_j 下对方案 X_i 的评估值. 因此, 在准则权重完全未知情况下, 多准则决策问题的双向投影模型的求解可按如下步骤进行.

1) 依据 $U=(u_{ij})_{n\times m}$ 确定正理想方案 X^+ 和负理想方案 X^-.

2) 依据式 (5) ∼ (7) 分别计算如下方案形成的向量:

$$X^-X_i,X^-X^+,X^-X^+,X_iX^+.$$

3) 依据式 (1)、(8) 和 (9) 分别计算如下向量的夹角和投影:

$$K_{\mathrm{IVIFS}}(X^-X_i,X^-X^+),\ \mathrm{Prj}_{X_iX^+}(X^-X^+),$$
$$K_{\mathrm{IVIFS}}(X^-X^+,X_iX^+),\ \mathrm{Prj}_{X^-X^+}(X^-X_i).$$

4) 建立多准则优化模型.

根据定理 2, 可以考虑各准则权重, 在准则 G_j 下, 备选方案 X_i 的评价值与 X^+ 的偏差为 $(1-\mathrm{Prj}_{X^-X^+}(X^-X_i))$. 为去除符号因素, 偏差和取平方和的形式, 则 X_i 与 X^+ 在所有准则下的加权偏差和为

$$\sum_{j=1}^{m}[\omega_j(|1-\mathrm{Prj}_{X^-X^+}(X^-X_i)|)]^2,$$

进而所有方案的加权总偏差和为

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\omega_j(|1-\mathrm{Prj}_{X^-X^+}(X^-X_i)|)]^2.$$

由于最终确定的权重向量应使所有方案的加权总偏差和最小, 由此可以构造如下目标函数:

$$\min G(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\omega_j(1-\mathrm{Prj}_{X^-X^+}(X^-X_i))]^2;$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j=1,\\0\leqslant\omega_j\leqslant1.\end{cases} \tag{12}$$

利用拉格朗日乘数法可将式 (12) 等价变换为

$$L(\omega,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\omega_j(1-\mathrm{Prj}_{X^-X^+}(X^-X_i))]^2+2\lambda\Big(\sum_{j=1}^{m}\omega_j-1\Big), \tag{13}$$

其中 λ 为拉格朗日乘子. 于是可利用式 (12) 分别对 ω_j、λ 求偏导, 即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\omega_j}L(\omega,\lambda)=0\Leftrightarrow\\2\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_j(1-\mathrm{Prj}_{X^-X^+}(X^-X_i))^2+2\lambda=0,\\\dfrac{\partial}{\partial\lambda}L(\omega,\lambda)=0\Leftrightarrow\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j-1=0.\end{cases} \tag{14}$$

由式(14)可得

$$\omega_j = \frac{\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}(1-\mathrm{Prj}_{X^-X^+}(X^-X_i))^2\right)^{-1}\right)^{-1}}{\sum_{i=1}^{n}(1-\mathrm{Prj}_{X^-X^+}(X^-X_i))^2}. \quad (15)$$

同理, 可求解出 ρ_j 为

$$\rho_j = \frac{\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}(1-\mathrm{Prj}_{X_iX^+}(X^-X^+))^2\right)^{-1}\right)^{-1}}{\sum_{i=1}^{n}(1-\mathrm{Prj}_{X_iX^+}(X^-X^+))^2}. \quad (16)$$

5) 将基于区间直觉模糊数投影矩阵与各准则权重集结, 得到 X_i 与 X^+ 的加权投影, 即

$$\mathrm{Prj}^+ = (\mathrm{Prj}_1^+, \mathrm{Prj}_2^+, \cdots, \mathrm{Prj}_n^+) = \omega(\mathrm{Prj}_{X^-X^+}(X^-X_i)). \quad (17)$$

同理, 可得 X_i 与 X^- 的加权投影, 即

$$\mathrm{Prj}^- = (\mathrm{Prj}_1^-, \mathrm{Prj}_2^-, \cdots, \mathrm{Prj}_n^-) = \omega(\mathrm{Prj}_{X_iX^+}(X^-X^+)). \quad (18)$$

6) Prj^+ 越大, 备选方案 X_i 越接近正理想方案 X^+, 备选方案 X_i 越优. 由此可以定义贴近度公式为

$$C(X_i) = \frac{\mathrm{Prj}_{X^-X^+}(X^-X_i)}{\mathrm{Prj}_{X^-X^+}(X^-X_i) + \mathrm{Prj}_{X_iX^+}(X^-X^+)}, \quad (19)$$

从而对备选方案 X_i 进行排序.

4 算 例

引用文献[16]中的示例, 拟从风险环境(G_1)、成长分析(G_2)、社会政策影响分析(G_3)和环境影响分析(G_4)这4个方面, 对汽车公司(X_1)、食品公司(X_2)、IT公司(X_3)、汽车零配件公司(X_4)和传媒公司(X_5)进行投资决策. 令备选方案为 $X = \{X_1, X_2, \cdots, X_5\}$, 方案评价准则为 $G = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$, 决策信息如表1所示.

表 1 评价信息

X	G			
	G_1	G_2	G_3	G_4
X_1	$\langle[0.4,0.5],[0.3,0.4]\rangle$	$\langle[0.4,0.6],[0.2,0.4]\rangle$	$\langle[0.3,0.4],[0.4,0.5]\rangle$	$\langle[0.5,0.6],[0.1,0.3]\rangle$
X_2	$\langle[0.5,0.6],[0.2,0.3]\rangle$	$\langle[0.6,0.7],[0.2,0.3]\rangle$	$\langle[0.5,0.6],[0.3,0.4]\rangle$	$\langle[0.4,0.7],[0.1,0.2]\rangle$
X_3	$\langle[0.3,0.5],[0.3,0.4]\rangle$	$\langle[0.1,0.3],[0.5,0.6]\rangle$	$\langle[0.2,0.5],[0.4,0.5]\rangle$	$\langle[0.2,0.3],[0.4,0.6]\rangle$
X_4	$\langle[0.2,0.5],[0.3,0.4]\rangle$	$\langle[0.4,0.7],[0.1,0.2]\rangle$	$\langle[0.4,0.5],[0.3,0.5]\rangle$	$\langle[0.5,0.8],[0.1,0.2]\rangle$
X_5	$\langle[0.3,0.4],[0.1,0.3]\rangle$	$\langle[0.7,0.8],[0.1,0.2]\rangle$	$\langle[0.5,0.6],[0.2,0.4]\rangle$	$\langle[0.6,0.7],[0.1,0.2]\rangle$

采用本文方法求解上述问题的具体步骤如下.

1) 在各准则下, 决策者对各备选方案评价的IVIFN决策矩阵如表1所示.

2) 正理想方案和负理想方案分别为

$$X^+ = (\langle[0.5,0.6],[0.1,0.3]\rangle, \langle[0.7,0.8],[0.1,0.2]\rangle, \langle[0.5,0.6],[0.2,0.4]\rangle, \langle[0.6,0.8],[0.1,0.2]\rangle),$$

$$X^- = (\langle[0.2,0.4],[0.3,0.4]\rangle, \langle[0.1,0.3],[0.5,0.6]\rangle, \langle[0.2,0.4],[0.4,0.5]\rangle, \langle[0.2,0.3],[0.4,0.6]\rangle).$$

3) 计算向量夹角 $K^+ = K_{\mathrm{IVIFS}}(X^-X_i, X^-X^+)$, $K^- = K_{\mathrm{IVIFS}}(X^-X_i, X^-X^+)$ 以及投影 $\mathrm{Prj}^+ = \mathrm{Prj}_{X^-X^+}(X^-X_i))$, $\mathrm{Prj}^- = \mathrm{Prj}_{X_iX^+}(X^-X^+)$, 有

$$K^+ = \begin{bmatrix} 0.510 & 0.285 & 0.540 & 0.300 \\ 0.440 & 0.385 & 0.440 & 0.315 \\ 0.520 & 0.050 & 0.530 & 0.150 \\ 0.530 & 0.365 & 0.465 & 0.345 \\ 0.455 & 0.470 & 0.395 & 0.335 \end{bmatrix},$$

$$K^- = \begin{bmatrix} 0.435 & 0.230 & 0.405 & 0.205 \\ 0.505 & 0.135 & 0.505 & 0.190 \\ 0.425 & 0.470 & 0.415 & 0.355 \\ 0.415 & 0.160 & 0.480 & 0.160 \\ 0.490 & 0.050 & 0.550 & 0.170 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{Prj}^+ = \begin{bmatrix} 0.8114 & 0.4157 & 0.8592 & 0.5035 \\ 0.7000 & 0.5615 & 0.7000 & 0.5286 \\ 0.8273 & 0.0729 & 0.8432 & 0.2517 \\ 0.8432 & 0.5324 & 0.7398 & 0.5790 \\ 0.7239 & 0.6855 & 0.6284 & 0.5622 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{Prj}^- = \begin{bmatrix} 0.6003 & 0.3659 & 0.6212 & 0.2657 \\ 0.5593 & 0.1661 & 0.5593 & 0.2193 \\ 0.6166 & 0.6855 & 0.6221 & 0.5958 \\ 0.6221 & 0.1912 & 0.5908 & 0.1677 \\ 0.5942 & 0.0500 & 0.5500 & 0.1782 \end{bmatrix}.$$

4) 构建如式 (12) 所示的最优化模型, 并利用式 (15) 和 (16) 求得

$$\omega = (0.143\,1, 0.352\,3, 0.152\,4, 0.352\,0).$$

同理, 求得

$$\rho = (0.123\,9, 0.331\,5, 0.127\,9, 0.416\,5).$$

5) 利用式 (17) 和 (18) 计算加权投影, 有

$$\mathrm{Prj}^+ = (0.570\,8, 0.590\,9, 0.361\,3, 0.624\,9, 0.638\,9),$$
$$\mathrm{Prj}^- = (0.385\,9, 0.287\,3, 0.631\,5, 0.285\,9, 0.234\,8).$$

6) 利用式 (19) 可得各备选方案的 $C(X_i)$, 即

$$C(X_1) = 0.596\,6,$$
$$C(X_2) = 0.672\,7,$$
$$C(X_3) = 0.363\,9,$$
$$C(X_4) = 0.686\,0,$$
$$C(X_5) = 0.731\,2.$$

由此可知

$$C(X_5) \succ C(X_4) \succ C(X_2) \succ C(X_1) \succ C(X_3),$$

即方案排序结果为

$$X_5 \succ X_4 \succ X_2 \succ X_1 \succ X_3.$$

算例结果表明: 1) 该模型评价结果与文献 [22] 结果基本一致, 仅较优策略中 X_4 与 X_2 顺序有变, 而文献 [22] 在利用灰色相关分析法 (gray relational analysis method) 得到属性权重时, 没有考虑犹豫度对评价结果的影响; 2) 该模型的贴近度公式参考了文献 [23] 的贴近度公式, 但同时考虑了犹豫度信息, 且正 (负) 理想方案是各准则均达到各备选方案中的最值. 若采用 TOPSIS[23]方法, 则方案排序结果为 $X_4 \succ X_5 \succ X_1 \succ X_2 \succ X_3$; 3) 双向投影决策模型识别性较好, 可在准则权重完全不确定的情况下较便捷地获得权重, 进而有效地对方案进行评价.

5 结 论

本文研究了权重信息完全不确定的区间直觉模糊数多准则决策问题. 构建了备选方案和正理想方案、负理想方案的向量表达式; 建立了区间直觉模糊向量投影公式; 提出两个不同方向的投影, 分别构建了各备选方案与负理想方案在正理想方案与负理想方案上的投影的最大化非线性目标规划模型, 各正理想方案与负理想方案在正理想方案与备选方案上的投影的最大化非线性目标规划模型, 并利用拉格朗日乘数法求解模型, 获得了相应准则的权重. 通过信息集结分别得到各备选方案与负理想方案在正理想方案与负理想方案的加权投影, 各正理想方案与负理想方案在备选方案与正理想方案的加权投影, 进而根据构建的相对贴近度得到方案优先序. 该模型从决策者评价信息本身出发确定准则权重, 信息缺失较少, 更能贴近决策者的意愿. 但该决策模型适用于有风险偏好的决策者.

参考文献(References)

[1] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[2] Atanassov K, Gargov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(3): 343-349.

[3] 王坚强. 信息不完全确定的多准则区间直觉模糊决策方法[J]. 控制与决策, 2006, 21(11): 1253-1256.
(Wang J Q. Multi-criteria interval intuitionistic fuzzy decision-making approach with incomplete certain information[J]. Control and Decision, 2006, 21(11): 1253-1256.)

[4] 徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2007, 22(8): 882-888.
(Xu Z S. Methods for aggregating interval-valued intuitionistic fuzzy information and their application to decision making[J]. Control and Decision, 2007, 22(8): 882-888.)

[5] Burillo P, Bustince H, Mohedano V. Some definition of intuitionistic fuzzy number[C]. Fuzzy Based Expert Systems. Bulgarian, 1994: 28-30.

[6] Ban A. Trapezoidal approximations of intuitionistic fuzzy numbers expressed by value ambiguity, width and weighted expected value[C]. The 12th Int Conf on IFSs. Sofa, 2008, 14: 38-47.

[7] Mahapatra G S, Roy T K. Reliability evaluation using triangular intuitionistic fuzzy numbers ari[J]. Int J of Computational and Mathematical Sciences, 2009, 3(5): 225-232.

[8] Xu Z S. Yager R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Int J of General Systems, 2006, 35(4): 417-433.

[9] 徐泽水. 直觉模糊信息集成理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 1-208.
(Xu Z S. Intuitionistic fuzzy information aggregation: Theory and applications[M]. Beijing: Science Press, 2008: 1-208.)

[10] 郭嗣琮, 吕金辉. 直觉模糊数的研究[J]. 模糊系统与数学, 2013, 27(5): 11-20.
(Guo S Z, Lü J H. The research of intuitionistic fuzzy numbers[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2013, 27(5): 11-20.)

[11] 郭嗣琮, 吕金辉. 排序决策的直觉模糊数方法[J]. 辽宁工程技术大学学报: 自然科学版, 2012, 31(2): 236-239.
(Guo S Z, Lü J H. Intuitionistic fuzzy numbers approach of sequence decision[J]. J of Liaoning Technical University: Natural Science, 2012, 31(2): 236-239.)

[12] Bustince H, Burillo P. Correlation of interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 74(2): 237-244.

[13] Park D G, Kwun Y C, Park J H, et al. Correlation coefficient of interval-valued intuitionistic fuzzy sets and its application to multiple attribute group decision making problems[J]. Mathematical and Computer Modeling, 2009, 50(9/10): 1279-1293.

[14] Wang S L. A novel multi-attribute allocation method based on entropy principle[J]. J of Software Engineering, 2012, 6 (1): 16-20.

[15] Wang Z, Li K W, Wang W. An approach to multiattribute decision making with interval-valued intuitionistic fuzzy assessments and incomplete weights[J]. Information Sciences, 2009, 179(17): 3026-3040.

[16] 卫贵武. 权重信息不完全的区间直觉模糊数多属性决策方法[J]. 管理学报, 2008, 5(2): 208-211.
(Wei G W. A method of interval-valued intuitionistic fuzzy multiple attributes decision making with incomplete attribute weight information[J]. Chinese J of Management, 2008, 5(2): 208-211.)

[17] 袁宇, 关涛, 闫相斌, 等. 基于区间直觉模糊数相关系数的多准则决策模型[J]. 管理科学学报, 2014, 17(4): 11-18.
(Yuan Y, Guan T, Yan X B, et al. Multi-criteria decision making model based on interval-valued intuitionistic fuzzy number correlation coefficient[J]. J of Management Sciences in China, 2014, 17(4): 11-18.)

[18] 华小义, 谭景信. 基于"垂面"距离的TOPSIS法-正交投影法[J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(1): 114-119.
(Hua X Y, Tan J X. Revised TOPSIS method based on vertical projection distance-vertical projection method[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2004, 24(1): 114-119.)

[19] Xu Z S, Hu H. Projection models for intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making[J]. Int J of Information Technology & Decision Making, 2010, 9(2): 267-280.

[20] 周宏安, 刘三阳. 基于离差最大化模型的模糊多属性决策投影法[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(5): 741-744.
(Zhou H A, Liu S Y. Projection method of fuzzy multi-attribute decision-making based on the maximal deviation model[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(5): 741-744.)

[21] Park D G, Kwun Y C, Park J H, et al. Correlation coefficient of interval-valued intuitionistic fuzzy sets and its application to multiple attribute group decision making problems[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009, 50(9/10): 1279-1293.

[22] Wei G W. Gray relational analysis method for intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(9): 11671-11677.

(责任编辑：李君玲)