

# 基于视觉反馈的非完整机器人不确定链式系统的指数稳定

梁振英, 杜泽华, 杜亚男

(山东理工大学 理学院, 山东 淄博 255000)

**摘要:** 研究带有未知参数的非完整移动机器人的镇定问题. 基于已有不确定非完整链式模型, 运用辅助变量法和控制输入法分别设计控制器, 使系统状态指数收敛. 所提出的两种控制器不仅克服了对系统初始状态的限制, 而且具有高度的统一性. 仿真结果验证了两种控制方法的有效性.

**关键词:** 链式系统; 移动机器人; 非完整系统; 稳定性

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Exponential stabilization of uncertain chained systems of nonholonomic robots based on visual feedback

LIANG Zhen-ying, DU Ze-hua, DU Ya-nan

(School of Science, Shandong University of Technology, Zibo 255000, China. Correspondent: LIANG Zhen-ying, E-mail: lzhenying@126.com)

**Abstract:** This paper investigates the exponential stabilization problem for a kind of nonholonomic robots with uncalibrated visual parameters based on the uncertain nonholonomic chained model. Two kinds of controllers are designed for exponential stabilization of the nonholonomic system by using the auxiliary variable method and the input control method. This two kinds of controllers not only overcome the limit of the initial status of the system but also have high unification. Simulation results show the effectiveness of the proposed methods.

**Keywords:** chained system; mobile robot; nonholonomic system; stabilization

### 0 引言

非完整系统被广泛理解为具有不可积约束的拉格朗日系统, 轮式移动机器人(WMR)就是具有这种非完整约束的系统<sup>[1]</sup>. 虽然非完整系统不能由光滑纯状态反馈镇定<sup>[2]</sup>, 但大部分非完整系统可以通过状态输入变换成为链式系统, 进而出现两类镇定链式系统的方法: 非光滑纯状态反馈控制和时变光滑反馈控制. 部分非光滑纯状态反馈控制可以保证状态指数收敛, 但要求系统的初始状态满足一定的条件<sup>[3]</sup>. 有的时变光滑状态反馈控制无需系统的初始状态满足一定的条件, 但不能保证系统状态的指数收敛<sup>[4]</sup>. 针对这一问题, 李世华等<sup>[5]</sup>通过辅助变量法成功地给出一种时变光滑反馈指数镇定控制律. 马保离等<sup>[6]</sup>另辟蹊径, 通过确定新的控制输入方法给出另一种时变光滑反馈指数镇定控制律. 以上两种控制方法均能保证系统状态的指数收敛, 同时很好地解决了系统的初始状

态需满足一定条件的问题.

基于环境的不确定性, 视觉伺服得到了极大的应用. 视觉伺服通常分为固定于机械臂上<sup>[7]</sup>和固定于天花板上<sup>[8]</sup>两类. 许多文献运用视觉伺服解决了一系列跟踪和镇定问题<sup>[7-9]</sup>, 并取得良好的效果. 文献[10]讨论了具有特定视觉参数的WMR指数镇定问题. 本文讨论的是更一般情况下WMR的指数镇定问题.

本文借助文献[5-6]的控制思想, 针对(1,1)型机器人的指数稳定问题, 给出两种控制器并进行稳定性分析. 最后通过仿真实验验证两种控制方案的有效性和高度统一性.

### 1 不确定链式模型

图1为(1,1)型机器人和针孔相机系统. 假设摄像机平面与机器人所在平面平行<sup>[10]</sup>, 如图建立坐标系. 机器人坐标系 $X_1-X_2$ 与惯性坐标系的夹角为 $\theta$ ,  $L$ 代表机器人宽度的一半, 假设坐标系 $x-y$ 面与坐标系

收稿日期: 2014-12-31; 修回日期: 2015-03-31.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61374040, 61473179); 山东自然科学基金项目(ZR2013FM012, ZR2014FM007).

作者简介: 梁振英(1964-), 女, 副教授, 从事非完整机器人鲁棒控制、视觉反馈控制等研究; 杜泽华(1991-), 男, 硕士生, 从事非线性控制、机器人视觉反馈控制的研究.

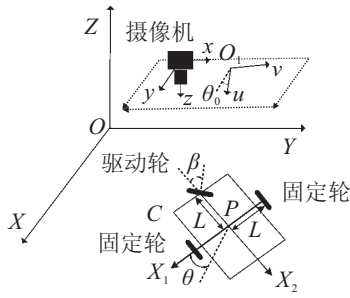


图 1 具有单目相机的轮式移动机器人

$u-v$  面平行, 摄像机光轴与  $X-Y$  平面的交点  $C$  坐标为  $(c_x, c_y)$ , 摄像机光轴与  $u-v$  交点坐标为  $(O_{c_1}, O_{c_2})$ . 机器人质心在  $X-Y$  平面上的坐标为  $(x, y)$ , 在图像坐标系下的坐标为  $(x_m, y_m)$ . 单目摄像机模型<sup>[8]</sup>为

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \times \left[ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} O_{c_1} \\ O_{c_2} \end{bmatrix}.$$

其中:  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  为两个正常数, 其数值取决于相机参数沿  $u$  轴和  $v$  轴像素放大的倍数;  $\theta_0$  为沿逆时针方向  $u$  轴和  $X$  轴的夹角;  $\beta$  为中心驱动轮的轮平面与  $x_2$  轴间的夹角.

(1,1) 型机器人的运动学模型<sup>[11]</sup>为

$$\begin{cases} \dot{x} = -Lv \sin \theta \sin \beta, \\ \dot{y} = Lv \cos \theta \sin \beta, \\ \dot{\theta} = v \cos \beta, \\ \dot{\beta} = \omega, \end{cases}$$

其中  $v$  和  $\omega$  分别为机器人前进方向的线速度和其转动的角速度. 综合上述两模型并运用恰当的状态输入变换<sup>[9-10]</sup>, 可以得到 (1,1) 型 WMR 的不确定链式模型

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = u_0, \\ \dot{x}_1 = x_2 u_0 + (x_1 + x_3) \left( (\alpha_1 + \alpha_2) \sin \theta_0 + (\alpha_2 - \alpha_1) \sin(2x_0 - \theta_0) \right) u_0 / 2, \\ \dot{x}_2 = x_3 u_0 + (x_1 + x_3) \left( (\alpha_1 + \alpha_2) \cos \theta_0 + (\alpha_2 - \alpha_1) \cos(2x_0 - \theta_0) - 2 \right) u_0 / 2, \\ \dot{x}_3 = u_1 - (x_1 + x_3) \left( (\alpha_1 + \alpha_2) \sin \theta_0 + (\alpha_2 - \alpha_1) \sin(2x_0 - \theta_0) \right) u_0 / 2. \end{cases} \quad (1)$$

为讨论不确定链式系统 (1) 的指数镇定问题, 给出如下假设和引理.

**假设 1**  $\theta_0$  已知,  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  未知.

**假设 2** 对于正的未知视觉参数  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$ , 存在已知的正常数  $\underline{\alpha}_1$ ,  $\bar{\alpha}_1$ ,  $\underline{\alpha}_2$  和  $\bar{\alpha}_2$  使得

$$\begin{aligned} 0 < \underline{\alpha}_1 &\leq \alpha_1 \leq \bar{\alpha}_1, & 0 < \underline{\alpha}_2 &\leq \alpha_2 \leq \bar{\alpha}_2, \\ \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 &< 2 \underline{\alpha}_1 \underline{\alpha}_2. \end{aligned} \quad (2)$$

通常, 摄像机标量因素的上下界可以预先估计.

**引理 1**<sup>[12]</sup> 假设  $A \in R^{3 \times 3}$ , 矩阵  $A$  的特征多项式为  $|\lambda I - A| = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$ , 当且仅当

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \Delta = a_1 a_2 - a_3 > 0.$$

$A$  为 Hurwitz 矩阵.

**引理 2**<sup>[13]</sup> 考虑线性时变系统

$$\dot{x} = [A_0 + B_0(t)]x, \quad (3)$$

其中状态向量  $x \in R^n$ . 若  $A_0 \in R^{n \times n}$  是 Hurwitz 矩阵, 且  $B_0(t) \in R^{n \times n}$  中每一个元素  $b_{ij}(t)$  ( $i, j = 1, 2, \dots$ ) 均满足  $t$  趋于无穷时, 指数趋于零, 则系统 (3) 是指数稳定的.

注意到, 在假设 1 中, 如果  $\theta_0 \neq 0$  已知, 则通过变换  $\varphi = \theta - \theta_0$  可以将其转换成  $\theta_0 = 0$  的情形 ( $\theta_0 = 0$  表示  $u$  轴和  $X$  轴方向相同). 因此, 在假设 1 和假设 2 的情况下, 只需讨论  $\theta_0 = 0$ ,  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  未知时式 (1) 的稳定性, 即讨论如下不确定链式模型的镇定问题.

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = u_0, \\ \dot{x}_1 = x_2 u_0 + (x_1 + x_3) (\alpha_{21} \sin x_0 \cos x_0) u_0, \\ \dot{x}_2 = x_3 u_0 + (x_1 + x_3) (\alpha_2 - 1 - \alpha_{21} \sin^2 x_0) u_0, \\ \dot{x}_3 = u_1 - (x_1 + x_3) (\alpha_{21} \sin x_0 \cos x_0) u_0, \end{cases} \quad (4)$$

其中  $\alpha_{21} = \alpha_2 - \alpha_1$ .

## 2 控制器设计

运用辅助变量和控制输入两种方法分别设计控制器, 讨论不确定链式系统 (4) 的稳定性.

**方法 1** 辅助变量法.

对不确定链式模型 (4), 取辅助变量  $x_a(t)$  使得  $x_0(t)$  构成如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_a = x_0, \\ \dot{x}_0 = u_0. \end{cases} \quad (5)$$

设计控制律  $u_0 = -k_a x_a - k_0 x_0$ , 其中  $k_a > 0$ ,  $k_0 > 0$ . 选择  $k_a$ ,  $k_0$  使得  $k_0^2 - 4k_a > 0$ , 则系统 (5) 有两个负特征根  $-w < 0$ ,  $-\bar{w} < 0$ . 不妨假设  $w > \bar{w}$ , 有

$$\begin{cases} x_a(t) = l_a e^{-wt} + l_0 e^{-\bar{w}t}, \\ x_0(t) = -w l_a e^{-wt} - \bar{w} l_0 e^{-\bar{w}t}, \end{cases}$$

其中  $l_a$ ,  $l_0$  为由系统状态初值确定的常数, 有

$$\begin{aligned} l_a &= \frac{-\bar{w} x_a(0) - x_0(0)}{w - \bar{w}} = \frac{-\bar{w} x_a(0)}{w - \bar{w}}, \\ l_0 &= \frac{w x_a(0) + x_0(0)}{w - \bar{w}} = \frac{w x_a(0)}{w - \bar{w}}. \end{aligned}$$

定义  $z = e^{-\bar{w}t}$ , 有

$$u_0 = z f = z [f_0 + f_1(t)], \quad (6)$$

其中  $f = f(t) = f_0 + f_1(t)$  且

$$\begin{aligned} f_0 &= (k_0 \bar{w} - k_a) l_0, \\ f_1 &= (k_0 w - k_a) l_a e^{-(w-\bar{w})t}. \end{aligned}$$

注意到  $k_a = w\bar{w}, k_0 = w + \bar{w}$ , 有

$$k_0^2 - 4k_a = (w - \bar{w})^2 > 0, f_0 = \bar{w}^2 l_0,$$

$$f_1 = w^2 l_a e^{-(w-\bar{w})t} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

因为  $l_0$  与  $x_a(0)$  有关, 选择  $x_a$  的初值  $x_a(0) < 0$ , 则  $l_0 < 0$ . 定义  $h = -\bar{w}l_0$ , 则  $f_0$  有界且  $f_0 = -\bar{w} - (\bar{w}l_0) = -\bar{w}h < 0$ .

对系统(4)选择控制输入(6)和如下状态缩放变换以及控制输入  $u_1$ :

$$y_1 = x_1/z^2, y_2 = x_2/z, y_3 = x_3, \quad (7)$$

$$u_1 = \bar{w}(k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3), \quad (8)$$

其中  $k_i (i = 1, 2, 3)$  为正常增益. 有如下系统:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = & 2\bar{w}y_1 - \bar{w}hy_2 - \bar{w}h^2\alpha_{21}y_3 + fz\alpha_{21}(\sin x_0 \cos x_0)y_1 + \\ & f_1y_2 - \left[ \bar{w}h\alpha_{21} \left( \frac{\sin x_0 \cos x_0}{z} - h \right) + \right. \\ & \left. f_1\alpha_{21} \frac{\sin x_0 \cos x_0}{z} \right] y_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 = & \bar{w}y_2 - \bar{w}h\alpha_2 y_3 + fz^2(\alpha_2 - 1 - \alpha_{21}\sin^2 x_0)y_1 + \\ & (f_1\alpha_2 - f\alpha_{21}\sin^2 x_0)y_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_3 = & \bar{w}(k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3) - fz^3\alpha_{21}(\sin x_0 \cos x_0)y_1 + \\ & fz\alpha_{21}(\sin x_0 \cos x_0)y_3. \end{aligned} \quad (9)$$

定义  $Y = [y_1, y_2, y_3]^T$ , 式(9)可以改写为

$$\dot{Y} = [A_0 + B_0(t)]Y. \quad (10)$$

其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2\bar{w} & -\bar{w}h & -\bar{w}h^2\alpha_{21} \\ 0 & \bar{w} & -\bar{w}h\alpha_2 \\ k_1\bar{w} & k_2\bar{w} & k_3\bar{w} \end{bmatrix},$$

$$B_0(t) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix},$$

$$b_{11} = fz\alpha_{21} \sin x_0 \cos x_0, b_{12} = f_1,$$

$$b_{13} = -\bar{w}h\alpha_{21} \left( \frac{\sin x_0 \cos x_0}{z} - h \right) + f_1\alpha_{21} \frac{\sin x_0 \cos x_0}{z},$$

$$b_{21} = fz^2(\alpha_2 - 1 - \alpha_{21}\sin^2 x_0), b_{22} = 0,$$

$$b_{23} = f_1\alpha_2 - f\alpha_{21}\sin^2 x_0,$$

$$b_{31} = -fz^3\alpha_{21} \sin x_0 \cos x_0, b_{32} = 0,$$

$$b_{33} = fz\alpha_{21} \sin x_0 \cos x_0.$$

为设计式(8)中的  $k_i (i = 1, 2, 3)$  指数镇定系统(9), 有如下引理.

**引理3** 基于假设1和假设2, 考虑系统矩阵  $A_0$ .

如果选择系统(9)中的参数  $k_i (i = 1, 2, 3)$  使得

$$m > 0, \frac{2m+2}{m+2} > \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2}{\alpha_1\alpha_2},$$

$$k_1 < \min \left( -\frac{4(m+2)}{h^2\alpha_1}, -\frac{2(m+2)[(m+3)\alpha_2 - 3\bar{\alpha}_2(m+1)]}{h^2[\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2(m+2) - 2\alpha_1\alpha_2(m+1)]} \right),$$

$$H = -hk_1 + hk_1 \frac{\alpha_1}{\bar{\alpha}_2} \frac{m+1}{m+2} + \frac{3(m+1)}{h\alpha_2},$$

$$G = -hk_1 + hk_1 \frac{\bar{\alpha}_1}{2\alpha_2} + \frac{m+3}{h\bar{\alpha}_2},$$

$$H < k_2 < G, k_3 = -(m+3), \quad (11)$$

则  $A_0$  是 Hurwitz 矩阵.

**证明** 首先证明式(11)有意义. 因为  $\frac{k_3+2}{k_3+1} > 1, \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2}{\alpha_1\alpha_2} < 2$ , 有  $\frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2}{\alpha_1\alpha_2} < 2 < 2\frac{k_3+2}{k_3+1}$ . 又  $k_3 = -(m+3)$ , 可以看出式(11)中有

$$h^2[\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2(m+2) - 2\alpha_1\alpha_2(m+1)] > 0,$$

显然式(11)有意义.

下面证明  $A_0$  是 Hurwitz 矩阵. 其特征多项式为

$$|\lambda I - A_0| = \begin{vmatrix} \lambda - 2\bar{w} & \bar{w}h & \bar{w}h^2\alpha_{21} \\ 0 & \lambda - \bar{w} & \bar{w}h\alpha_2 \\ -\bar{w}k_1 & -\bar{w}k_2 & \lambda - \bar{w}k_3 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^3 - \lambda^2(k_3+3)\bar{w} + \lambda(3k_3+2+h^2k_1\alpha_{21}+hk_2\alpha_2)\bar{w}^2 + (-2k_3-2hk_2\alpha_2-h^2k_1\alpha_{21}-h^2k_1\alpha_2)\bar{w}^3.$$

令

$$a_1 = -(k_3+3)\bar{w},$$

$$a_2 = (3k_3+2+h^2k_1\alpha_{21}+hk_2\alpha_2)\bar{w}^2,$$

$$a_3 = (-2k_3-2hk_2\alpha_2-h^2k_1\alpha_{21}-h^2k_1\alpha_2)\bar{w}^3,$$

$$\begin{aligned} \Delta = a_1a_2 - a_3 = & -[(h^2k_1+hk_2)\alpha_2(k_3+1) - \\ & (k_3+2)h^2k_1\alpha_1 + 3(k_3+1)(k_3+2)]\bar{w}^3 \equiv \\ & -\Delta^*\bar{w}^3. \end{aligned}$$

选择  $k_1, k_2$  和  $k_3$  满足式(11), 从而

$$a_1 = -(k_3+3) > 0,$$

$$a_2 > \left[ h^2k_1\alpha_1 \left( 1 + \frac{1}{k_3+1} \right) - 3(k_3+2) - h^2k_1\alpha_1 + 2 + 3k_3 \right] \bar{w}^2 =$$

$$\left[ h^2k_1(\alpha_1 - \alpha_1) + \frac{h^2k_1\alpha_1}{k_3+1} - 4 \right] \bar{w}^2 > 0,$$

$$a_3 > \left[ h^2k_1\alpha_1 - 2 \left( \frac{h^2k_1\bar{\alpha}_1}{2\alpha_2} - \frac{k_3}{\bar{\alpha}_2} \right) \alpha_2 - 2k_3 \right] \bar{w}^3 >$$

$$\left[ h^2k_1(\alpha_1 - \bar{\alpha}_1) + 2k_3 \left( \frac{\alpha_2}{\bar{\alpha}_2} - 1 \right) \right] \bar{w}^3 > 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta^* = & (h^2k_1+hk_2)\alpha_2(k_3+1) - (k_3+2)h^2k_1\alpha_1 + \\ & 3(k_3+1)(k_3+2) < 0, \end{aligned}$$

$$\Delta = -\Delta^*\bar{w}^3 > 0,$$

所以,由引理 1 可知  $A_0$  是 Hurwitz 矩阵.  $\square$

**定理 1** 对于不确定链式系统 (4), 基于假设 1 和假设 2, 取辅助变量  $x_a(t)$ , 使得  $x_0(t)$  构成如下系统:

$$\dot{x}_a = x_0, \quad \dot{x}_0 = u_0.$$

选择  $k_a > 0$ ,  $k_0 > 0$  使得  $k_0^2 - 4k_a > 0$ , 且  $x_a(0)$  的初始值  $x_a(0) < 0$ . 设计控制律

$$\begin{cases} u_0 = -k_a x_a - k_0 x_0, \\ u_1 = \bar{w}(k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3). \end{cases} \quad (12)$$

当  $k_i (i = 1, 2, 3)$  满足式 (11) 时, 系统 (4) 是指数镇定的.

**证明** 对系统 (4), 利用状态缩放变换 (7) 和控制器 (12), 得到系统 (9). 由  $x_0(t) = -w l_a e^{-wt} - \bar{w} l_0 e^{-\bar{w}t}$  可知, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $x_0$  指数趋于零,  $\sin x_0$  可近似为  $x_0$ ,  $\cos x_0$  可近似为  $1 - x_0^2/2$ . 考虑到

$$\begin{aligned} \frac{\sin x_0 \cos x_0}{z} - h &\approx \frac{x_0(1 - x_0^2/2)}{z} + \bar{w} l_0 = \\ \bar{w} l_0 + \frac{x_0(1 - x_0^2/2)}{z} &= \\ -w l_a e^{-(w-\bar{w})t} + (w l_a e^{-(w-\bar{w})t} + \bar{w} l_0) x_0^2/2. \end{aligned}$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 上式和  $z$ 、 $x_0$ 、 $f_1$ 、 $\sin x_0$  指数趋于零, 又因为  $(\sin x_0)/z$ 、 $\cos x_0$ 、 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  和  $\alpha_{21}$  是有界的, 所以当  $t \rightarrow \infty$  时, 式 (10) 中的每个元素  $b_{ij} \in B_0(t) (i, j = 1, 2, 3, 4)$  指数趋近于零. 由引理 2、假设 1 和假设 2, 采用控制器 (11) 和 (12), 系统 (4) 是指数镇定的.  $\square$

**注 1** 定理 1 表明控制器 (12) 使得系统 (4) 状态指数收敛, 且克服了系统初值状态非零的要求. 下面通过控制输入法设计时变光滑反馈控制律, 讨论系统状态的指数稳定问题.

**方法 2** 控制输入法.

对于系统 (4), 作如下控制:

$$u_0 = -k_0 x_0 + z. \quad (13)$$

其中:  $z = z_0 e^{-wt} (z_0 \neq 0)$ ,  $k_0 > w > 0$ . 定义  $\bar{k}_0 = k_0 - w$ . 由式 (4) 可知,  $\dot{x}_0 = u_0$ , 因为  $k_0 > 0$  且  $z$  指数收敛于零, 所以  $x_0(t)$  指数收敛于零.

定义  $y_0 = x_0/z$ , 有

$$\dot{y}_0 = -(k_0 - w)y_0 + 1 = -\bar{k}_0 y_0 + 1. \quad (14)$$

因为  $\bar{k}_0 > 0$ , 所以  $y_0$  指数收敛于  $1/\bar{k}_0$ , 令  $1/\bar{k}_0 = g$ . 由  $u_0 = -k_0 x_0 + z = -k_0 z y_0 + z$  可知,  $u_0/z = 1 - k_0 y_0$  指数收敛于  $1 - k_0 g$ .

令  $\eta = 1 - k_0 g$ ,  $u_0/z - \eta$  指数收敛于零, 且  $\eta = -wg$ . 对系统 (4) 选择控制输入 (13) 和如下状态缩放变换以及控制输入  $u_1$ :

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1}{z^2}, \quad y_2 = \frac{x_2}{z}, \quad y_3 = x_3, \\ u_1 &= w(k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3). \end{aligned} \quad (15)$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \\ 2w y_1 - w g y_2 - g^2 w \alpha_{21} y_3 + \\ &[(u_0/z - \eta) z \alpha_{21} \sin x_0 \cos x_0 + \\ &\eta z \alpha_{21} \sin x_0 \cos x_0] y_1 + (u_0/z - \eta) y_2 + \\ &[(u_0/z - \eta)(\sin x_0 \cos x_0/z - g) \alpha_{21} + \\ &(u_0/z - \eta) g \alpha_{21} + \eta(\sin x_0 \cos x_0/z - g) \alpha_{21}] y_3, \\ \dot{y}_2 &= \\ w y_2 - g w \alpha_{21} y_3 + \\ &[(u_0/z - \eta) z^2 (\alpha_2 - 1 - \alpha_{21} \sin^2 x_0) + \\ &z^2 \eta (\alpha_2 - 1 - \alpha_{21} \sin^2 x_0)] y_1 + \\ &[(u_0/z - \eta) (\alpha_2 - \alpha_{21} \sin^2 x_0) - \eta \alpha_{21} \sin^2 x_0] y_3, \\ \dot{y}_3 &= \\ u_1 - [(u_0/z - \eta) z^3 \alpha_{21} \sin x_0 \cos x_0 + \\ &z^3 \eta \alpha_{21} \sin x_0 \cos x_0] y_1 - \\ &[(u_0/z - \eta) z \alpha_{21} \sin x_0 \cos x_0 + \\ &z \eta \alpha_{21} \sin x_0 \cos x_0] y_3. \end{aligned} \quad (16)$$

将式 (15) 代入 (16), 并定义  $Y = [y_1, y_2, y_3]^T$ , 式 (16) 可以改写为如下矩阵形式:

$$\dot{Y} = [A_0 + B_0(t)]Y. \quad (17)$$

其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2w & -wg & -wg^2 \alpha_{21} \\ 0 & w & -wg \alpha_2 \\ k_1 w & k_2 w & k_3 w \end{bmatrix},$$

$$B_0(t) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= (u_0/z - \eta) z \alpha_{21} \sin x_0 \cos x_0 + \\ &\eta z \alpha_{21} \sin x_0 \cos x_0, \\ b_{12} &= u_0/z - \eta, \\ b_{13} &= (u_0/z - \eta)(\sin x_0 \cos x_0/z - g) \alpha_{21} + \\ &(u_0/z - \eta) g \alpha_{21} + \eta(\sin x_0 \cos x_0/z - g) \alpha_{21}, \\ b_{21} &= (u_0/z - \eta) z^2 (\alpha_2 - 1 - \alpha_{21} \sin^2 x_0) + \\ &z^2 \eta (\alpha_2 - 1 - \alpha_{21} \sin^2 x_0), \\ b_{22} &= 0, \\ b_{23} &= (u_0/z - \eta) (\alpha_2 - \alpha_{21} \sin^2 x_0) - \eta \alpha_{21} \sin^2 x_0, \\ b_{31} &= (u_0/z - \eta) z^3 \alpha_{21} \sin x_0 \cos x_0 + \\ &z^3 \eta \alpha_{21} \sin x_0 \cos x_0, \\ b_{32} &= 0, \\ b_{33} &= (u_0/z - \eta) z \alpha_{21} \sin x_0 \cos x_0 + \end{aligned}$$

$$z\eta\alpha_{21} \sin x_0 \cos x_0.$$

**引理4** 基于假设1和假设2, 如果选择系统(16)

中的参数  $k_i (i = 1, 2, 3)$  满足

$$m > 0, \frac{2m+2}{m+2} > \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2}{\alpha_1\alpha_2},$$

$$k_1 < \min \left( -\frac{4(m+2)}{g^2\alpha_1}, \right. \\ \left. -\frac{2(m+2)[(m+3)\alpha_2 - 3\bar{\alpha}_2(m+1)]}{g^2[\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2(m+2) - 2\alpha_1\alpha_2(m+1)]} \right),$$

$$H = -gk_1 + gk_1 \frac{\alpha_1}{\bar{\alpha}_2} \frac{m+1}{m+2} + \frac{3(m+1)}{g\alpha_2},$$

$$G = -gk_1 + gk_1 \frac{\bar{\alpha}_1}{2\alpha_2} + \frac{m+3}{g\bar{\alpha}_2},$$

$$H < k_2 < G, k_3 = -(m+3), \quad (18)$$

则  $A_0$  是 Hurwitz 矩阵.

**注2** 方法2中的  $A_0$  矩阵和特征多项式与方法1相似, 所以引理4的证明与引理3的证明基本相似(过程略).

**定理2** 对于不确定链式系统(4), 引入新的控制输入

$$u_0 = -k_0x_0 + z,$$

$$u_1 = w(k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3).$$

其中:  $z = z_0e^{-wt} (z_0 \neq 0)$ ,  $k_0 > w > 0$ . 当  $k_i (i = 1, 2, 3)$  满足式(18)时, 系统(4)是指数镇定的.

**证明** 对于系统(4), 利用状态缩放变换、控制器(13)和(15), 得到系统(17). 由  $x_0 = e^{-k_0t}(z_0(1/\bar{k}_0)e^{\bar{k}_0t} + \bar{c})$  可知, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $x_0(t)$  指数趋于零,  $\sin x_0$  可近似为  $x_0$ ,  $\cos x_0$  可近似为  $1 - x_0^2/2$ . 考虑到

$$\frac{\sin x_0 \cos x_0}{z} - g \approx \frac{x_0(1 - x_0^2/2)}{z} - g =$$

$$\frac{zy_0(1 - x_0^2/2)}{z} - g = (y_0 - g) - \frac{x_0^2y_0}{2},$$

显然, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 上式和  $(u_0/z - \eta)$ 、 $z$ 、 $\sin x_0$  均指数趋于零. 又因为  $\cos x_0$ 、 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  和  $\alpha_{21}$  有界, 所以当  $t \rightarrow \infty$  时, 式(17)中的每个元素  $b_{ij} \in B_0(t) (i, j = 1, 2, 3, 4)$  指数趋近于零. 因此, 由假设1、假设2、引理2、控制器(13)、(15)和(18), 系统(4)指数镇定.  $\square$

**注3** 将系统(10)和(17)中的  $A_0$  矩阵与文献[9]的  $A_0$  矩阵相比较, 可以看出3个矩阵的高度相似性, 但是文献[9]中系统初值  $x_0(0)$  必须满足  $x_0(0) \neq 0$ . 采用上述两种方法设计的控制器克服了系统初值状态非零的要求, 因此, 利用上述方法设计的控制器优于文献[9]. 另外, 方法1和方法2虽然运用了不同的控制器, 但通过对比系统的  $A_0$  矩阵和参数  $k_i$  的取值可见, 两种方法具有高度的统一性.

### 3 仿真分析

对于系统(4), 分别运用辅助变量和控制输入两

种方法, 在初值  $x_0(0) \neq 0$  和  $x_0(0) = 0$  两种情况下进行仿真.

1) 在  $x_0(0) \neq 0$  的情况下进行仿真, 令系统状态初值

$$[x_0(0), x_1(0), x_2(0), x_3(0)] = [1, -2.36, 1.89, 1.256],$$

选择参数与增益常数  $\bar{w} = 1$ ,  $w = 2$ ,  $h = 2$ ,  $k_0 = 3$ ,  $k_1 = -3$ ,  $k_2 = 1.9$ ,  $k_3 = -4$ ,  $\bar{\alpha}_1 = 8$ ,  $\alpha_1 = 7.6$ ,  $\alpha_1 = 7$ ,  $\bar{\alpha}_2 = 6$ ,  $\alpha_2 = 5.6$ ,  $\alpha_2 = 5.5$ ,  $x_a = 1$ , 得到状态  $x_i (i = 0, 1, 2, 3)$  和控制输入  $u_i (i = 0, 1)$  轨迹如图2所示. 结果表明, 当时间  $t$  大于某一时刻时,  $x_i (i = 1, 2, 3)$  趋于零的速度比  $x_0$  的速度快. 从而, 所有的状态轨迹指数收敛于零, 表现出良好的收敛性.

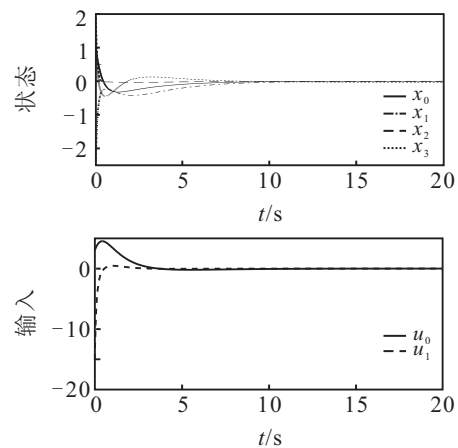


图2 当  $x_0(0) \neq 0$  时变化轨迹(方法1)

对于  $x_0(0) = 0$ , 不改变其他参数的条件下再次进行仿真, 结果如图3所示. 由图3可见, 所有状态轨迹指数收敛于零, 也表现出良好的收敛性.

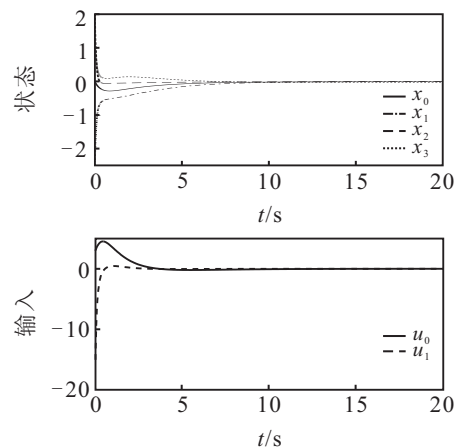
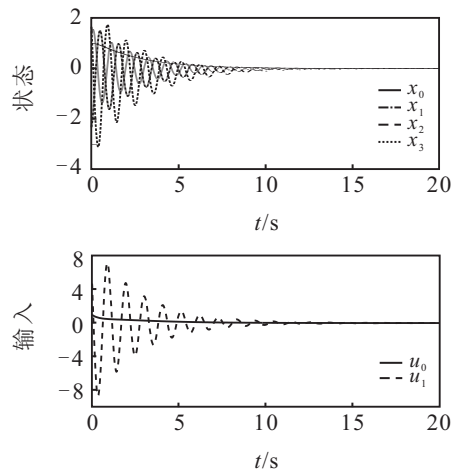
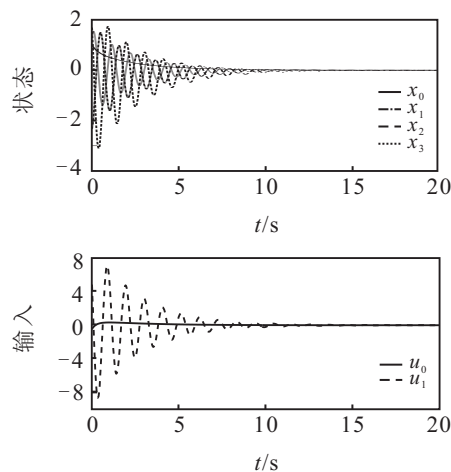


图3 当  $x_0(0) = 0$  时变化轨迹(方法1)

2) 在同样的初值与参数条件下, 当  $x_0(0) \neq 0$  时, 选择  $z_0 = 1$ , 其状态  $x_i (i = 0, 1, 2, 3)$  和控制输入  $u_i (i = 0, 1)$  轨迹如图4所示,  $x_0(0) = 0$  时结果如图5所示, 同样表现出良好的收敛性.

Matlab 仿真实验验证了所提出控制器设计的有效性, 且两种方法具有高度统一性.

图4 当 $x_0(0) \neq 0$ 时变化轨迹(方法2)图5 当 $x_0(0) = 0$ 时变化轨迹(方法2)

## 4 结论

本文讨论了在 $\theta_0$ 已知,  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 未知的条件下, 非完整不确定链式系统的镇定问题. 基于(1,1)型非完整不确定链式系统, 在假设1和假设2成立的条件下, 分别运用辅助变量法和控制输入法, 推导出两种新的时变控制器, 从而保证系统的所有状态指数收敛到原点. 此外, 所提出的两种控制方案不受系统初始值的限制. 理论分析与仿真结果表明, 两种方法具有较高的统一性. 参数 $\theta$ 和 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 均未知的情况还有待于进一步讨论.

## 参考文献(References)

- [1] Campion G, Bastin G, D'Andréa-Novel B. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots[J]. IEEE Trans on Robotics and Automation, 1996, 12(1): 47-62.
- [2] Brockett R, Millman R, Sussmann H. Asymptotic stability and feedback stabilization[C]. Differential Geometric Control Theory. Boston, 1983: 181-191.

- [3] Luo Jihao, Tsiotras P. Exponential convergent control laws for nonholonomic systems in power form[J]. Systems and Control Letters, 1998, 35(2): 87-95.
- [4] Pomet J. Explicit design of time-varying stabilization control laws for a class of controllable systems without drift[J]. Systems and Control Letters, 1992, 18(2): 467-473.
- [5] 李世华, 田玉平. 减执行器水面舰船系统的光滑时变指数全局镇定[J]. 东南大学学报, 2001, 31(1): 29-34.  
(Li S H, Tian Y P. Global smooth exponential stabilization of an underactuated autonomous surface vessel[J]. J of Southeast University, 2001, 31(1): 29-34.)
- [6] 马保离, 霍伟. 非完整链式系统的时变光滑指数镇定[J]. 自动化学报, 2003, 29(2): 301-305.  
(Ma B L, Huo W. Smooth timer varying exponential stabilization of nonholonomic chained systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(2): 301-305.)
- [7] 杨世强, 傅卫平, 王红涛. 机器人手眼立体视觉标定研究[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(33): 196-199.  
(Yang S Q, Fu W P, Wang H T. Research on calibration for hand-eye stereo vision[J]. Computer Engineering and Applications, 2007, 43(33): 196-199.)
- [8] Dixon W, Dawson D, Zergeroglu E. Adaptive tracking control of a wheeled mobile robot via an uncalibrated camera system[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2001, 31(3): 341-352.
- [9] Liang Zhenying, Wang Chaoli. Robust exponential stabilization of uncertain nonholonomic chained systems based on visual feedback[J]. J of System Science Complex, 2012, 25(3): 441-450.
- [10] Wang Chaoli, Liang Zhenying, Du Jiaming, et al. Robust stabilization of nonholonomic moving robots with uncalibrated visual parameters[C]. Proc of American Control Conf. Hyatt Regency Riverfront, 2009: 1347-1352.
- [11] Leroquais W, d'Andréa-Novel B. Transformation of the kinematic models of restricted mobility wheeled mobile robots with a single platform into chain forms[C]. Proc of the 34th Conf on Decision and Control. New Orleans: LA, 1995: 3811-3816.
- [12] Dorf R, Bishop R. Modern control system[M]. 4th ed. New Jersey: Prentice Hall, 1986: 295-299.
- [13] Slotine, Li Weiping. Applied nonlinear control[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1991: 115-116.

(责任编辑: 郑晓蕾)