

文章编号: 1001-0920(2016)04-0685-08

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.0018

# 非线性离散奇异摄动系统的组合优化控制方法的合理性分析

张艳, 殷明慧, 蔡晨晓, 邹云

(南京理工大学自动化学院, 南京 210094)

**摘要:** 分析一类非线性离散奇异摄动系统的降阶组合优化控制器的合理性, 即降阶组合控制器与原始高阶优化控制器之间的关系. 基于快、慢子系统的解耦, 分别对快、慢子系统设计子优化控制器, 并进一步提出作用于原高阶系统的组合优化控制器. 对原高阶系统设计传统高阶优化控制器, 提出组合优化控制器近似等于传统高阶优化控制器的充分条件. 最后通过仿真验证了所得结论的正确性.

**关键词:** 非线性离散奇异摄动系统; 组合优化控制; 快慢分解

中图分类号: TP13

文献标志码: A

## Analysis of composite optimal control method for a class of nonlinear discrete-time singularly perturbed systems

ZHANG Yan, YIN Ming-hui, CAI Chen-xiao, ZOU Yun

(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. Correspondent: YIN Ming-hui, E-mail: ymhui@vip.163.com)

**Abstract:** The optimal control problem of a class of nonlinear discrete-time singularly perturbed systems is studied. A composite optimal controller is designed based on the decomposition of the slow and fast subsystems, and an original high-order optimal controller is developed. Then, the relationship between the composite controller and the original controller is analyzed. It is proved that the composite control input is  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  close to the original control input under some conditions. The result is verified by two simulation examples.

**Keywords:** nonlinear discrete-time singularly perturbed systems; composite optimal control; decomposition

### 0 引言

在现实世界中, 很多物理系统具有多时间尺度特征, 如航天器、流体力学模型、风力发电系统、柔性机械系统等, 通常此类系统可以建模成为奇异摄动系统<sup>[1-2]</sup>. 通过对奇异摄动系统的快、慢子系统解耦, 独立地设计子控制器, 组合两个子控制, 可以得到降阶的组合控制器, 这种设计方法称为奇异摄动方法<sup>[1]</sup>. 奇异摄动方法可以巧妙地避免方程的刚性特征, 并且降低计算复杂度<sup>[2-3]</sup>.

奇异摄动方法可以降低方程阶次, 但在组合控制器的设计过程中, 解耦的快、慢子系统是原高阶方程的一种近似估计, 子控制器的设计是对近似子系统的综合问题, 在此基础上, 组合控制器的组合方法并不唯一, 那么将组合控制器作用于原高阶系统, 所得的闭环系统是否能够达到设计者要求的理想指标? 组合

控制器与传统高阶控制器的控制效果孰优孰劣? 以上两点是值得探究的问题, 本文的目标即为分析组合控制器的合理性.

文献[3]针对线性奇异摄动系统的优化问题, 提出了快、慢子系统解耦方法和组合控制器的设计方法, 并进一步分析了组合控制器与传统高阶控制器的关系, 以及通过使用两种不同控制器, 所得两种闭环系统的近似程度. 文献[4]考虑线性奇异摄动系统, 利用 $\varepsilon$ 多项式展开的方法设计降阶组合控制器, 并分析了组合控制器与传统高阶优化控制器的误差. 文献[5-6]研究了连续非线性奇异摄动系统的组合优化控制问题, 并分析了组合控制器与传统高阶优化控制器的控制效果误差. 然而, 关于非线性离散奇异摄动系统的组合控制器与传统高阶控制器的关系, 目前较少有文献涉及. 文献[7]提出了一类非线性离散奇异

收稿日期: 2015-01-05; 修回日期: 2015-05-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61203129, 61174038); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(30920130121010, 30920140112005).

作者简介: 张艳(1987-), 女, 博士生, 从事奇异摄动系统的研究; 邹云(1962-), 男, 教授, 博士生导师, 从事奇异摄动系统、多维系统等研究.

摄动系统的快、慢子系统解耦方法,并证明了快、慢子系统的状态近似等于原系统非解耦状态.在此基础上,本文分析了一类非线性离散奇异摄动系统的组合控制器与传统高阶控制器之间的关系.

本文针对一类非线性离散奇异摄动系统的优化控制问题,将原高阶系统解耦,获得快、慢子系统,并设计了降阶组合优化控制器和传统高阶优化控制器.进一步地,给出了组合控制输入近似等于传统高阶控制输入的充分条件,并通过仿真验证了结论的正确性.

## 1 系统描述和解耦

本文使用的数学符号如下:  $\partial f/\partial x$  表示函数  $f$  对  $x$  变量的偏导运算;  $\mathbf{T}$  表示矩阵转置; 对于向量  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ; 对于矩阵  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $\|A\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}^2}$ ;  $|\cdot|$  表示标量的绝对值;  $\sigma(\cdot)$  表示矩阵的谱;  $\sup(\cdot)$  为上确界;  $\mathcal{O}(\cdot)$  为大  $O$  符号(也称朗道符号),表示同阶无穷小.

考虑如下非线性离散奇异摄动系统<sup>[7]</sup>:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \\ f_1(x(k), \varepsilon y(k)) + g_1(x(k), \varepsilon y(k))u(k), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} y(k+1) &= \\ f_2(x(k), \varepsilon y(k)) + g_2(x(k), \varepsilon y(k))u(k), \end{aligned} \quad (2)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

其中:  $(x, y)^T \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  为状态向量,  $u(k) \in \mathbf{R}^p$  为  $k$  时刻的控制输入, 函数  $f_1$ 、 $f_2$ 、 $g_1$ 、 $g_2$  均二次可微,  $0 < \varepsilon \ll 1$  为奇异摄动参数.

此类数学模型包含了 Lienard 方程和 Lanrange's 方程. Lienard 方程可以表示含有非线性元件的 RLC 电路等, Lanrange's 方程可以表示很多机械电子系统<sup>[7]</sup>. 在非线性系统中, 快、慢动态解耦未必全局成立, 因此仅考虑含有原点的紧集  $D_x \times D_y$  中的解耦和控制.

令奇异摄动参数  $\varepsilon = 0$ , 可获得慢子系统为

$$\begin{aligned} x_s(k+1) &= \\ f_1(x_s(k), 0) + g_1(x_s(k), 0)u_s(k) &\triangleq \\ f_{1s}(x_s(k)) + g_{1s}(x_s(k))u_s(k), \end{aligned} \quad (3)$$

$$x_s(0) = x_0,$$

$$y_s(k+1) =$$

$$\begin{aligned} f_2(x_s(k), 0) + g_2(x_s(k), 0)u_s(k) &\triangleq \\ f_{2s}(x_s(k)) + g_{2s}(x_s(k))u_s(k). \end{aligned} \quad (4)$$

$x_s$  的初始条件与原始系统中  $x$  初始条件相同, 但  $y_s$  的

初始条件与  $y$  初始条件不同, 这是由于边界层现象存在. 为获得边界层系统, 引入如下变换:

$$\begin{aligned} x(k) &= \varepsilon^{k+1}x_f(k), \\ y(k) &= \varepsilon^k y_f(k), \\ u(k) &= \varepsilon^{k+1}u_f(k). \end{aligned} \quad (5)$$

将式(5)代入(1)和(2), 在原点  $(0, 0)$  处进行 Taylor 展开, 并且令  $\varepsilon \rightarrow 0$  可以得到

$$\begin{aligned} 0 &= \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} \Big|_{(0,0)} x_f(k) + \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon y} \Big|_{(0,0)} y_f(k) + g_1(0,0)u_f(k), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} y_f(k+1) &= \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_{(0,0)} x_f(k) + \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon y} \Big|_{(0,0)} y_f(k) + g_2(0,0)u_f(k). \end{aligned} \quad (7)$$

**假设 1**  $g_1(0,0) \neq 0, g_2(0,0) \neq 0$ .

**注 1** 对于系统(1)和(2),  $(0,0)$  是平衡点, 在没有外部干扰的情况下, 平衡点处的控制输入为 0, 那么  $0 = f_i(0,0) + g_i(0,0), i = 1, 2$ , 因此通常  $g_i(0,0) \neq 0$  成立.

**假设 2**<sup>[7]</sup> Jacobian 矩阵  $\partial f_1/\partial x$  非奇异.

可以推导得到如下快子系统:

$$x_f(k) = A_{1f}y_f(k) + B_{1f}u_f(k), \quad (8)$$

$$y_f(k+1) = A_{2f}y_f(k) + B_{2f}u_f(k). \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{1f} &= -\left\{ \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon y} \right\}_{(0,0)}, \\ A_{2f} &= \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon y} \right\}_{(0,0)}, \\ B_{1f} &= -\left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^{-1}_{(0,0)} g_1(0,0), \\ B_{2f} &= g_2(0,0) - \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial x} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^{-1} \right\}_{(0,0)} g_1(0,0). \end{aligned}$$

**注 2** 关于该解耦方法的合理性, 即

$$x(k) = x_s(k) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$y(k) = y_s(k) + y_f(k) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

的证明, 见文献[7].

**注 3** 在慢子系统(3)、(4)和快子系统(8)、(9)中可以看出, 式(3)和(9)为动态差分方程, 式(4)和(8)为代数方程. 因此, 在设计控制器时, 仅需考虑式(3)和(9). 若  $x_s$  和  $y_f$  趋于平衡点, 则  $x_f$  和  $y_s$  也趋于平衡点.

## 2 降阶组合优化控制器设计

本节介绍组合优化控制器的设计方法. 在不产生混淆的情况下, 用下角标  $k$  表示时刻, 下角标  $s$  表示慢子系统, 下角标  $f$  表示快子系统. 首先考虑慢子系

统(3),定义代价函数如下:

$$J_s = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \{x_{sk}^T Q_s x_{sk} + u_{sk}^T R_s u_{sk}\}. \quad (10)$$

其中:  $Q_s \geq 0, R_s > 0$ .

将式(3)改写为以下形式:

$$x_{s(k+1)} = A_s(x_{sk})x_{sk} + B_s(x_{sk})u_{sk}. \quad (11)$$

根据文献[8-9]的结论,可获得如下优化控制输入:

$$\begin{aligned} u_{sk} = & - \{R_s + B_s(x_{sk})^T P_{s(k+1)} B_s(x_{sk})\}^{-1} \times \\ & B_s(x_{sk})^T P_{s(k+1)} A_s(x_{sk}) x_{sk} \triangleq \\ & - K_s(x_{sk}) x_{sk}, \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $P_{s(k+1)}$  为以下离散状态依赖的 Riccati 方程(D-SDRE)的解:

$$\begin{aligned} P_{sk} = & A_s(x_{sk})^T \{P_{s(k+1)} - P_{s(k+1)} B_s(x_{sk})^T \times \\ & (R_s + B_s(x_{sk})^T P_{s(k+1)} B_s(x_{sk}))^{-1} \times \\ & B_s(x_{sk})^T P_{s(k+1)}\} A_s(x_{sk}) + Q_s. \end{aligned} \quad (13)$$

利用同样的方法,对快子系统(9)定义如下代价函数:

$$J_f = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \{y_{fk}^T Q_f y_{fk} + u_{fk}^T R_f u_{fk}\}. \quad (14)$$

其中:  $Q_f \geq 0, R_f > 0$ . 对应的快子系统的优化控制输入为

$$\begin{aligned} u_{fk} = & - \{R_f + B_f(y_{fk})^T P_{f(k+1)} B_f(y_{fk})\}^{-1} \times \\ & B_f(y_{fk})^T P_{f(k+1)} A_f(y_{fk}) y_{fk} \triangleq \\ & - K_f(y_{fk}) y_{fk}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $P_{f(k+1)}$  为以下 D-SDRE 的解:

$$\begin{aligned} P_{fk} = & A_f(y_{fk})^T \{P_{f(k+1)} - P_{f(k+1)} B_f(y_{fk})^T \times \\ & (R_f + B_f(y_{fk})^T P_{f(k+1)} B_f(y_{fk}))^{-1} \times \\ & B_f(y_{fk})^T P_{f(k+1)}\} A_f(y_{fk}) + Q_f. \end{aligned} \quad (16)$$

设计组合优化控制器为

$$\begin{aligned} u_{ck} = u_{sk} + \varepsilon^{k+1} u_{fk} = & - [K_s(x_k) \quad \varepsilon^{k+1} K_f(y_k)] \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

### 3 传统高阶优化控制器设计

本节对系统(1)和(2)设计传统高阶优化控制器.

标记状态变量为  $X_k \triangleq \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$ , 并将原系统(1)和(2)改写为

$$X_{k+1} = A(x_k, \varepsilon y_k) X_k + B(x_k, \varepsilon y_k) u_k,$$

$$X_0^T = [x_0^T \quad y_0^T]^T. \quad (18)$$

考虑如下代价函数:

$$J_o = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \{X_k^T Q X_k + u_{ok}^T R u_{ok}\}. \quad (19)$$

其中:  $Q = \text{diag}\{Q_s, Q_f\} \geq 0, R = R_s + R_f > 0$ .

利用同样的方法可得传统高阶优化控制输入

$$\begin{aligned} u_{ok} = & - \{R + B(X_k)^T P_{k+1} B(X_k)\}^{-1} \times \\ & B(X_k)^T P_{k+1} A(X_k) X_k \triangleq \\ & - [K_1(x_k, y_k) \quad K_2(x_k, y_k)] \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (20)$$

其中  $P_{k+1}$  为以下 D-SDRE 的解:

$$\begin{aligned} P_k = & A(X_k)^T \{P_{k+1} - P_{k+1} B(X_k)^T \times \\ & (R + B(X_k)^T P_{k+1} B(X_k))^{-1} B(X_k)^T \times \\ & P_{k+1}\} A(X_k) + Q. \end{aligned} \quad (21)$$

**注4** 以上 D-SDRE 中矩阵  $A$  和  $B$  与状态相关, 状态随着时间而变化, 矩阵  $A$  和  $B$  也随着时间而变化, 因此很难求出 D-SDRE 的解析解. 由文献[9-10]可以设置  $P_0 = 0$ , 求解 D-SDRE 的数值解.

### 4 组合优化控制器与传统高阶优化控制器的关系

本节给出组合优化控制器近似等于传统高阶优化控制器的充分条件. 为完成主要结论的证明, 首先介绍两个引理和假设3.

**引理1** (Gronwall-Bellman 不等式)<sup>[11-12]</sup> 若

$$z(0) \leq g(0), \quad h(k) \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

且

$$z(j) \leq g(j) + \sum_0^{j-1} h(j) z(j),$$

则有以下不等式成立:

$$\begin{aligned} z(k) \leq & g(0) \Gamma(k-1) + \Gamma(k-1) \sum_1^k \frac{g(j) - g(j-1)}{\Gamma(j-1)}, \end{aligned}$$

其中  $\Gamma(k) = \prod_{j=0}^{k-1} (1 + h(j))$ .

**引理2** 已知矩阵  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ , 向量  $x \in \mathbf{R}^n$ , 以下结论成立:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|.$$

**证明** 用  $a_{ij}$  表示  $A$  矩阵的第  $i$  行  $j$  列元素, 有

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2},$$

$$\|A\|\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

只需证明  $(\|A\|\|x\|)^2 \geq (\|Ax\|)^2$  即可, 即

$$\begin{aligned} & (\|A\|\|x\|)^2 - (\|Ax\|)^2 = \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 = \\ & \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 \right\} = \\ & \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{j=1}^n \left( a_{ij} x_j \right)^2 - \right. \\ & \left. \sum_{j=1}^n \sum_{k \neq j} a_{ij} a_{ik} x_j x_k \right\} = \\ & \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{k \neq j} a_{ij}^2 x_k^2 - \sum_{j=1}^n \sum_{k \neq j} a_{ij} a_{ik} x_j x_k \right\} = \\ & \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{k > j} \left( a_{ij} x_j - a_{ik} x_k \right)^2 \right\} \geq 0. \end{aligned} \quad (22)$$

综上可知引理 2 成立.  $\square$

**假设 3** 任意  $(x, y)^T \in D_x \times D_y$  满足以下条件:

- 1)  $\sup_{k \geq 0} \|x_k\| \leq a_1 < \infty$ ;
- 2)  $\sup_{k \geq 0} \|y_k\| \leq a_2 < \infty$ ;
- 3)  $\sigma \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} (x_k, \varepsilon y_k) \right) < \alpha_1$ .

其中:  $a_1 > 0, a_2 > 0, 0 < \alpha_1 < 1$ .

**定理 1** 若假设 1~假设 3 成立, 且存在一个正实数  $L$  使得

$$\|K_s(x_k) - K_1(x_k)\| < L\varepsilon \quad (23)$$

成立, 则可以获得以下结论:

$$u_c(x_k, y_k) - u_o(x_k, y_k) = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (24)$$

$$x_{ck} - x_{ok} = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (25)$$

$$y_{ck} - y_{ok} = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (26)$$

其中:  $x_{ck}$  和  $y_{ck}$  为  $k$  时刻组合控制器  $u_c$  作用下闭环系统的状态,  $x_{ok}$  和  $y_{ok}$  为  $k$  时刻传统高阶控制器  $u_o$  作用下闭环系统的状态.

**证明** 首先证明式 (24). 为了简化概念, 标记

$$A(X) = [A_1 \ A_2],$$

$$S = \{R + B(X_k)^T P_{k+1} B(X_k)\}^{-1} B(X_k)^T P_{k+1}.$$

由式 (20) 可得

$$\begin{bmatrix} K_1^T(x_k, y_k) \\ K_2^T(x_k, y_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T S^T \\ A_2^T S^T \end{bmatrix}.$$

根据  $A(X)$  的定义和式 (18) 可得到

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{f_{11}(x, \varepsilon y)}{x_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{f_{1n}(x, \varepsilon y)}{x_n} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \frac{f_{21}(x, \varepsilon y)}{y_1} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \frac{f_{2m}(x, \varepsilon y)}{y_m} \end{bmatrix},$$

因为

$$\frac{f_{2i}(x, \varepsilon y)}{y_i} = \frac{f_{2i}(x, \varepsilon y)}{\varepsilon y_i} \varepsilon,$$

且  $f_{2i}(x, \varepsilon y)$  关于  $\varepsilon y$  连续, 所以存在正数  $l_1$ , 使得

$$\left| \frac{f_{2i}(x, \varepsilon y)}{\varepsilon y_i} \right| < l_1,$$

进一步可知

$$\left| \frac{f_{2i}(x, \varepsilon y)}{y_i} \right| < l_1 \varepsilon,$$

这意味着  $\|A_2\| < \sqrt{m} l_1 \varepsilon$ . 又因为  $P$  有界, 存在正数  $l_2$  使得  $\|S\| < l_2$ , 可以得到

$$\|K_2\| = \|SA_2\| < \sqrt{m} l_1 l_2 \varepsilon.$$

那么, 由引理 2 可以得到

$$\|u_{ck} - u_{ok}\| =$$

$$\left\| [K_s(x) - K_1(x, y) \ \varepsilon^{k+1} K_f(y) - K_2(x, y)] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| \leq$$

$$\|K_s(x) - K_1(x, y)\| \|x\| +$$

$$\|\varepsilon^{k+1} K_f(y) - K_2(x, y)\| \|y\|.$$

由假设 3 可知

$$\|x\| < a_1, \|y\| < a_2, \quad (27)$$

因为  $K_f(y)$  有界, 且当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\varepsilon^k K_f(y) \rightarrow 0$ , 所以必存在正数  $l_3$  使得  $\varepsilon^k K_f(y) < l_3$ . 联合式 (23) 可以得到

$$\|u_{ck} - u_{ok}\| < (La_1 + (\sqrt{m} l_1 l_2 + l_3) a_2) \varepsilon, \quad (28)$$

式 (24) 得证.

下面证明式 (25). 首先定义  $z_k = x_{ok} - x_{ck}$ , 可以推导  $z_{k+1}$  为

$$z_{k+1} =$$

$$f_1(x_{ok}, \varepsilon y_{ok}) + g_1(x_{ok}, \varepsilon y_{ok}) u_{ok} -$$

$$\begin{aligned}
 & f_1(x_{ck}, \varepsilon y_{ck}) - g_1(x_{ck}, \varepsilon y_{ck})u_{ck} = \\
 & f_1(x_{ok}, \varepsilon y_{ok}) - f_1(x_{ck}, \varepsilon y_{ok}) + \\
 & f_1(x_{ck}, \varepsilon y_{ok}) - f_1(x_{ck}, \varepsilon y_{ck}) + \\
 & g_1(x_{ok}, \varepsilon y_{ok})u_{ok} - g_1(x_{ck}, \varepsilon y_{ok})u_{ok} + \\
 & g_1(x_{ck}, \varepsilon y_{ok})u_{ok} - g_1(x_{ck}, \varepsilon y_{ok})u_{ck} + \\
 & g_1(x_{ck}, \varepsilon y_{ok})u_{ck} - g_1(x_{ck}, \varepsilon y_{ck})u_{ck}. \tag{29}
 \end{aligned}$$

根据 Taylor 定理, 式 (29) 满足

$$\begin{aligned}
 z_{k+1} = & (F_{1k} + R_{1k})z_k + (F_{2k} + R_{2k})\varepsilon(y_{ok} - y_{ck}) + \\
 & (F_{3k} + R_{3k})z_k + g_1(x_{ck}, \varepsilon y_{ok})(u_{ok} - u_{ck}) + \\
 & (F_{4k} + R_{4k})\varepsilon(y_{ok} - y_{ck}) = \\
 & (F_{1k} + R_{1k} + F_{3k} + R_{3k})z_k + \\
 & (F_{2k} + R_{2k} + F_{4k} + R_{4k})\varepsilon(y_{ok} - y_{ck}) + \\
 & g_1(x_{ck}, \varepsilon y_{ok})(u_{ok} - u_{ck}). \tag{30}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 F_{1k} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_{ok}}(x_{ck}, \varepsilon y_{ok}), \\
 F_{2k} &= \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon y_{ok}}(x_{ck}, \varepsilon y_{ck}), \\
 F_{3k} &= u_{ok}^T \frac{\partial g_1}{\partial x_{ok}}(x_{ck}, \varepsilon y_{ok}), \\
 F_{4k} &= u_{ck}^T \frac{\partial g_1}{\partial \varepsilon y_{ok}}(x_{ck}, \varepsilon y_{ck}), \\
 R_{1k} &= \int_0^1 \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_{ok}}[x_{ck} + \theta(x_{ok} - x_{ck}), \varepsilon y_{ok}] - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial f_1}{\partial x_{ok}}(x_{ck}, \varepsilon y_{ok}) \right\} d\theta, \\
 R_{2k} &= \int_0^1 \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon y_{ok}}[x_{ck}, \varepsilon \theta(y_{ok} - y_{ck}) + \varepsilon y_{ck}] - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon y_{ok}}(x_{ck}, \varepsilon y_{ck}) \right\} d\theta, \\
 R_{3k} &= u_{ok}^T \int_0^1 \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial x_{ok}}[x_{ck} + \theta(x_{ok} - x_{ck}), \varepsilon y_{ok}] - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial g_1}{\partial x_{ok}}(x_{ck}, \varepsilon y_{ok}) \right\} d\theta, \\
 R_{4k} &= u_{ck}^T \int_0^1 \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial \varepsilon y_{ok}}[x_{ck}, \varepsilon \theta(y_{ok} - y_{ck}) + \varepsilon y_{ck}] - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial g_1}{\partial \varepsilon y_{ok}}(x_{ck}, \varepsilon y_{ck}) \right\} d\theta.
 \end{aligned}$$

因为  $z_0 = 0$ , 式 (30) 的解为

$$\begin{aligned}
 z_k = & \sum_{j=0}^{k-1} \Phi_{k,j+1} [R_{1j} + F_{3j} + R_{3j}] z_j + \\
 & \sum_{j=0}^{k-1} \Phi_{k,j+1} g_1(x_{cj}, \varepsilon y_{0j})(u_{oj} - u_{cj}) +
 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \Phi_{k,j+1} [F_{2j} + R_{2j} + F_{4j} + R_{4j}] \varepsilon(y_{oj} - y_{cj}), \tag{31}$$

其中  $\Phi_{k,j}$  为  $F_{1k}$  的传递函数. 因为函数  $f_1(x, \varepsilon y)$  关于  $x$  和  $\varepsilon y$  连续, 且  $x$  和  $y$  有界, 存在  $b_1 > 0$  使得  $\|F_{1k}\| \leq b_1$ . 根据文献 [6, 9-10], 假设 3 的第 3) 条意味着存在  $\gamma > 1, 0 < \rho < 1$ , 使得

$$\|\Phi_{k,j}\| \leq \gamma \rho^{k-j}, \quad \forall k \geq j.$$

由式 (31) 可以推导得到

$$\begin{aligned}
 \|z_k\| \leq & \sum_{j=0}^{k-1} \|\Phi_{k,j+1}\| \|R_{1j} + F_{3j} + R_{3j}\| \|z_j\| + \\
 & \sum_{j=0}^{k-1} \|\Phi_{k,j+1}\| \|g_1(x_{cj}, \varepsilon y_{0j})\| \|u_{oj} - u_{cj}\| + \\
 & \sum_{j=0}^{k-1} \|\Phi_{k,j+1}\| \|F_{2j} + R_{2j} + F_{4j} + R_{4j}\| \varepsilon \|y_{oj} - y_{cj}\| \leq \\
 & \sum_{j=0}^{k-1} \gamma \rho^{k-j-1} \|R_{1j} + F_{3j} + R_{3j}\| \|z_j\| + \\
 & \sum_{j=0}^{k-1} \gamma \rho^{k-j-1} \|g_1(x_{cj}, \varepsilon y_{0j})\| \|u_{oj} - u_{cj}\| + \\
 & \sum_{j=0}^{k-1} \gamma \rho^{k-j-1} \|F_{2j} + R_{2j} + F_{4j} + R_{4j}\| \varepsilon \|y_{oj} - y_{cj}\|. \tag{32}
 \end{aligned}$$

因为  $g_1(x, \varepsilon y)$  关于  $x$  和  $\varepsilon y$  连续, 且  $x$  和  $y$  有界, 所以存在  $b_2 > 0$ , 使得

$$\|F_{3k}\| \leq b_2, \quad 0 \leq k \leq N_1.$$

因为

$$(x_k, y_k)^T \in D_x \times D_y, \quad \forall k \in \mathbf{N},$$

且  $R_1$  可微, 存在  $b_3 > 0$ , 使得

$$\|R_1(x_{ok}, y_{ok}, x_{ck})\| < b_3,$$

类似地, 存在  $b_4 > 0$ , 使得

$$\|R_3(x_{ok}, y_{ok}, x_{ck})\| < b_4.$$

标记  $c_1 = b_2 + b_3 + b_4$ , 有

$$\|R_{1j} + F_{3j} + R_{3j}\| \leq c_1. \tag{33}$$

同理, 存在  $c_2 > 0$ , 使得

$$\|F_{2j} + R_{2j} + F_{4j} + R_{4j}\| \leq c_2. \tag{34}$$

因为  $g_1(x, \varepsilon y)$  在  $D_x \times D_y$  上连续, 所以存在  $c_3 > 0$ , 使得

$$\|g_1(x_{cj}, \varepsilon y_{0j})\| \leq c_3. \tag{35}$$

将式 (33)~(35) 代入 (32), 可以得到

$$\begin{aligned} \|z_k\| \leq & \sum_{j=0}^{k-1} \gamma \rho^{k-j-1} c_1 \|z_j\| + \sum_{j=0}^{k-1} \gamma \rho^{k-j-1} c_3 \|u_{oj} - u_{cj}\| + \\ & \sum_{j=0}^{k-1} \gamma \rho^{k-j-1} c_2 \varepsilon \|y_{oj} - y_{cj}\| = \\ & \sum_{j=0}^{k-1} \gamma \rho^{k-j-1} c_1 \|z_j\| + \sum_{j=0}^{k-1} \gamma \rho^{k-j-1} \times \\ & (c_3 \|u_{oj} - u_{cj}\| + c_2 \varepsilon \|y_{oj} - y_{cj}\|). \end{aligned}$$

进而推导得到

$$\begin{aligned} \left\| \frac{z_k}{\rho^k} \right\| \leq & \sum_{j=0}^{k-1} \gamma \rho^{-1} c_1 \left\| \frac{z_j}{\rho^j} \right\| + \sum_{j=0}^{k-1} \gamma \rho^{-j-1} \times \\ & (c_3 \|u_{oj} - u_{cj}\| + c_2 \varepsilon \|y_{oj} - y_{cj}\|). \end{aligned}$$

利用引理 1 可得

$$\begin{aligned} \left\| \frac{z_k}{\rho^k} \right\| \leq & \gamma \left(1 + \frac{c_1}{\rho}\right)^k \sum_{j=1}^k \left(1 + \frac{c_1}{\rho}\right)^{-j} \rho^{-j} (c_3 \|u_{o(j-1)} - \\ & u_{c(j-1)}\| + c_2 \varepsilon \|y_{o(j-1)} - y_{c(j-1)}\|). \end{aligned} \quad (36)$$

令  $\eta = \rho + c_1$ , 将式 (36) 改写为

$$\|z_k\| \leq \gamma \eta^k \sum_{j=1}^k \eta^{-j} (c_3 \|u_{oj} - u_{cj}\| + c_2 \varepsilon \|y_{oj} - y_{cj}\|).$$

其中:  $x$  为系统的慢状态,  $y$  为系统的快状态. 相对而言, 慢状态变化缓慢, 在较短的时间尺度内, 可以认为慢状态几乎不变<sup>[1]</sup>, 所以  $\partial g_1 / \partial x_k \approx 0$ , 而输入必然有界, 故

$$F_{3k} = u_{ok}^T \frac{\partial g_1}{\partial x_{ok}}(x_{ck}, \varepsilon y_{ok}) \approx 0,$$

$b_2$  可以充分小. 由文献 [11] 可知,  $b_3$  和  $b_4$  也可以充分小. 通过选择  $b_2$ ,  $b_3$  和  $b_4$ , 可以使得

$$c_1 = b_2 + b_3 + b_4 < 1 - \rho,$$

即  $\eta = \rho + c_1 < 1$ . 联合式 (27) 和 (28), 可以得到

$$\begin{aligned} \|z_k\| \leq & \gamma \eta^k \sum_{j=1}^k \eta^{-j} (c_3 \zeta + 2c_2 a_2) \varepsilon \leq \\ & \gamma \frac{1 - \eta^k}{1 - \eta} (c_3 \zeta + 2c_2 a_2) \varepsilon, \end{aligned}$$

其中  $\zeta = La_1 + (\sqrt{m}l_1 l_2 + l_3) a_2$ .  $\square$

定理 1 的结论表明, 组合优化控制器与传统高阶优化控制器的误差为  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , 两种控制器分别作用下的两种闭环系统的状态之间的误差也是  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , 该结论是文献 [3] 线性奇异摄动系统相关结论的扩充.

## 5 仿真实验

例 1 考虑如下非线性离散奇异摄动系统:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \varepsilon x_1(k) y_1(k) + 2\varepsilon y_1(k) \\ x_2(k) + 2\varepsilon y_2(k) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} x_1(k) + 1 & \varepsilon y_1(k) \\ \varepsilon y_2(k) & x_2(k) + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \varepsilon x_1(k) y_1(k) \\ 2\varepsilon y_2(k) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \sin(x_1(k)) + 1 & \sin(x_2(k)) + 2 \\ \sin(\varepsilon y_1(k)) + 1 & \sin(\varepsilon y_2(k)) + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (38)$$

状态初始值为

$$[x_1(0) \ x_2(0)] = [1 \ 2],$$

$$[y_1(0) \ y_2(0)] = [-2 \ -1],$$

$\varepsilon = 0.1$  表示奇异摄动参数.

利用前文给出的快、慢子系统解耦方法, 可以获得以下慢、快子系统:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{1s}(k+1) \\ x_{2s}(k+1) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 0 \\ x_{2s}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{1s}(k) + 1 & 0 \\ 0 & x_{2s}(k) + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1s}(k) \\ u_{2s}(k) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y_{1f}(k+1) \\ y_{2f}(k+1) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1f}(k) \\ y_{2f}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1f}(k) \\ u_{2f}(k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

代价函数的权重矩阵如下:

$$\begin{aligned} Q_s = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \\ Q_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

利用式 (12)~(17) 和 (19)~(21) 可以获得组合优化控制输入  $u_c$  和传统高阶优化控制输入  $u_o$ . 注意到该算例中, 采用了二阶输入向量. 图 1 为两种控制器的比较结果. 已知  $\varepsilon = 0.1$ , 由图 1 可见,  $u_c$  与  $u_o$  的最大误差没有超过 0.5, 这与定理 1 的结论一致.

图 2 和图 3 为 4 个状态变量在组合优化控制器和传统高阶控制器作用下的响应比较. 可以看出, 两种控制器作用下的状态响应曲线非常相近, 数值仿真结果验证了本文结论的正确性.

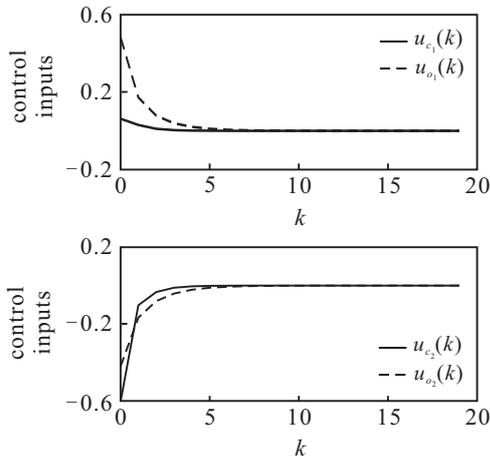


图1 组合控制输入与传统高阶控制输入

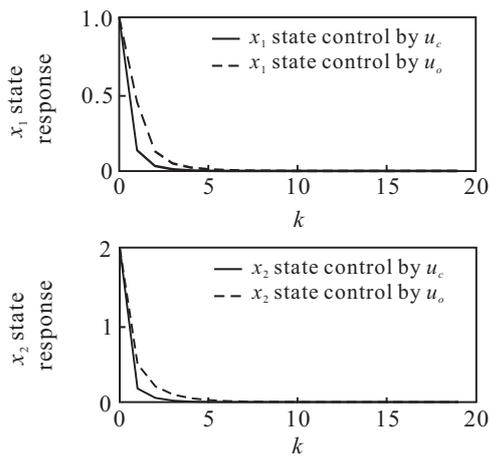


图2 x1 和 x2 状态在两种控制器下的响应

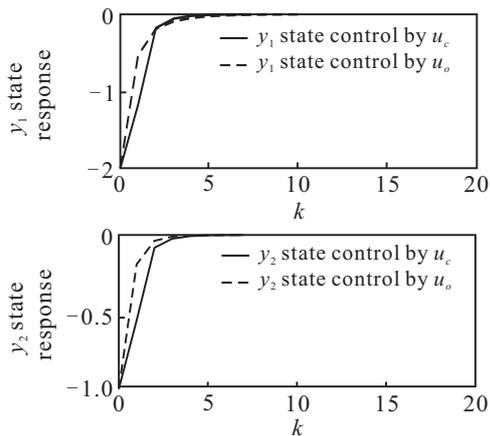


图3 y1 和 y2 状态在两种控制器下的响应

例2 考虑范德坡非线性电路<sup>[13-15]</sup>, 该电路由一个线性电感、一个线性电容和一个非线性电阻组成, 如图4所示. 令  $y = i_L$ , 有如下二阶非线性微分方程<sup>[14-15]</sup>:

$$\ddot{y} - a(1 - y^2)\dot{y} + y = 0, \quad (39)$$

其中  $a = \sqrt{c/L}$ .

当  $a \gg 1$  时, 令  $\varepsilon = 1/a^2 = 0.05$ , 将式(39)时间尺度  $t$  变换为  $t/a$ , 可以得到

$$\varepsilon \ddot{y} - (1 - y^2)\dot{y} + y = 0. \quad (40)$$

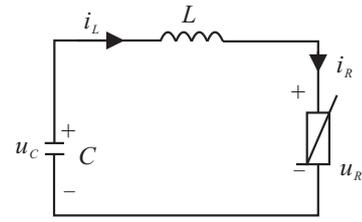


图4 范德坡电路<sup>[14]</sup>

进一步, 利用向前差分公式将式(40)改写为差分方程, 并引入变换

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) + \varepsilon y(k-1), \\ x_2(k) &= y(k), \end{aligned}$$

可以得到

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \\ &(1 - \varepsilon x_2^2(k))(x_1(k) - \varepsilon x_2(k) - \varepsilon^2 x_2(k)) + \\ &2\varepsilon x_1(k) - \varepsilon^2 x_2(k) - \varepsilon x_2(k), \end{aligned} \quad (41)$$

$$x_2(k+1) = x_1(k) - \varepsilon x_2(k). \quad (42)$$

对差分方程(41)和(42)加入控制输入项<sup>[16]</sup>, 有

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \\ &(1 - \varepsilon x_2^2(k))(x_1(k) - \varepsilon x_2(k) - \varepsilon^2 x_2(k)) + \\ &2\varepsilon x_1(k) - \varepsilon^2 x_2(k) - \varepsilon x_2(k) + u(k), \end{aligned} \quad (43)$$

$$x_2(k+1) = x_1(k) - \varepsilon x_2(k) + u(k). \quad (44)$$

利用解耦方法可获得以下慢、快子系统:

$$\begin{cases} x_{1s}(k+1) = 3x_{1s}(k) + u_s(k), \\ x_{2s}(k+1) = x_{1s}(k) + u_s(k); \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{cases} 0 = 3x_{1f}(k) - 2x_{2f}(k) + u_f(k), \\ x_{2f}(k+1) = -\frac{1}{3}x_{2f}(k) + \frac{2}{3}u_f(k). \end{cases} \quad (46)$$

代价函数的权重矩阵选择如下:

$$R_s = R_f = Q_s = Q_f = 1,$$

$$R = 1, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

利用式(12)~(17)和(19)~(21)设计组合控制器

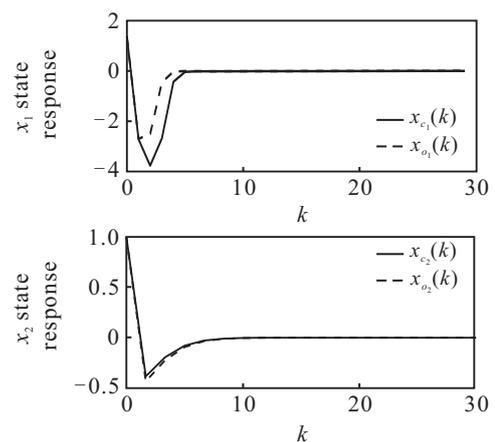


图5 状态在两种控制器下的响应

$u_c$  和传统高阶控制器  $u_o$ . 图 5 为两个状态变量在  $u_c$  和  $u_o$  作用下的响应比较. 可以看出, 两种控制器的控制效果相近, 符合本文结论. 同时, 组合控制器作用下的状态变量响应超调相对较小, 且设计复杂度和计算复杂度降低, 具有优势. 图 6 为两种控制输入的比较结果, 组合控制器  $u_c$  和传统高阶控制器  $u_o$  最大误差为 0.62, 符合定理 1 的结论.

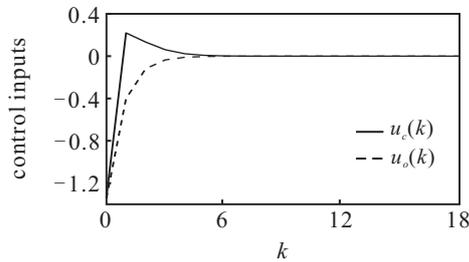


图 6 组合控制输入与传统高阶控制输入

综上所述, 仿真验证了本文结论的正确性.

## 6 结 论

本文针对一类非线性离散奇异摄动系统, 设计了组合优化控制器和传统高阶优化控制器, 并分析了组合优化控制器与传统高阶优化控制器之间的关系, 提出了两种控制器近似相等的充分条件. 该结论将文献 [3] 在线性奇异摄动系统的组合控制器中的结论扩充至非线性离散奇异摄动系统. 最后通过数值仿真验证了所得结论的正确性.

本文考虑了某一类非线性离散奇异摄动系统的组合控制器与传统高阶控制器的关系, 该结果具有较大的扩展空间, 比如, 带有不确定项的非线性奇异摄动系统的组合优化控制方法的合理性、带有时滞的奇异摄动系统的组合控制方法的合理性等仍有待研究.

## 参考文献(References)

- [1] 许可康. 控制系统中的奇异摄动[M]. 北京: 科学出版社, 1986: 1-9.  
(Xu K K. Singular perturbation in control systems[M]. Beijing: Science Press. 1986: 1-9.)
- [2] Naidu D S. Singular perturbations and time scales in control theory and applications: overview[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 2002, 9(2): 233-278.
- [3] Kokotovic P, Khalil H K, O'Reilly J. Singular perturbation methods in control, analysis and design[M]. London: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999: 1-190.
- [4] Naidu D S, Rao A K. Singular perturbation analysis of discrete control systems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1980: 120-142.
- [5] Fridman E. Exact slow-fast decomposition of the nonlinear singularly perturbed optimal control problem[J]. Systems and Control Letters, 2000, 40(2): 121-131.
- [6] Fridman E. State-feedback  $H_\infty$  control of nonlinear singularly perturbed systems[J]. Int J of Robust Nonlinear Control, 2001, 11(12): 1115-1125.
- [7] Bouyekh R, Hami A E, Moudni A E. Optimal control of a particular class of singularly perturbed nonlinear discrete-time systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(7): 1097-1101.
- [8] Dutka A S, Ordys A W, Grimble M J. Optimized discrete-time state dependent Riccati align regulator[C]. Proc of the 2005 American Control Conf. Glasgow: IEEE, 2005: 2293-2298.
- [9] Chang I, Bentsman J. Constrained discrete-time state-dependent Riccati equation technique: A model predictive control approach[C]. IEEE 52nd Annual Conf on Decision and Control. Urbana: IEEE, 2013: 5125-5130.
- [10] Desoer C A. Slowly varying discrete systems  $x_{i+1} = A_i x_i$ [J]. Electronics Letters, 1970, 6(11): 339-340.
- [11] Huang J, Lin C F. A stability property and its application to discrete-time nonlinear system control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39(11): 2307-2311.
- [12] Solo V, Kong X. Adaptive signal processing algorithm: Stability and performance[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1994: 54-56.
- [13] Bouyekh R, Moudni A E. Stabilization and regulation of class of nonlinear singularly perturbed discrete-time systems[J]. J of the Franklin Institute, 1998, 335(5): 963-982.
- [14] 邱关源. 电路[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 463-466.  
(Qiu G Y. Electric circuit[M]. Beijing: High Education Press, 2006: 463-466.)
- [15] Van der Pol B. The nonlinear theory of electric oscillations[J]. Proc of the Institute of Radio Engineers, 1934, 22(9): 1051-1086.
- [16] Janson N B, Balanov A G, Schll E. Delayed feedback as a means of control of noise-induced motion[J]. Physical Review Letters, 2004, 93(1): 010601.

(责任编辑: 郑晓蕾)