文章编号: 1001-0920 (2016) 04-0656-05　　DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.0029

基于广义解的双合作博弈收益分配模型

冯庆华[1,2], 陈菊红[1], 刘　通[2]

(1. 西安理工大学 经济与管理学院，西安 710054；2. 西安财经学院 信息学院，西安 710100)

摘　要: 双合作博弈主要研究如何将联盟收益全部分配给双合作联盟的每个参与者. 考虑到不将全部的合作收益用于分配, 而是预留一部分合作收益用于投资扩大再生产或再分配的情况, 对双合作博弈模型进行扩展, 定义广义分配、广义核心和广义韦伯集等解的概念, 并证明广义核心总是包含在广义韦伯集中. 当双合作博弈满足超模性时, 广义核心总是等于广义韦伯集. 由于广义韦伯集是一个非空集合, 从而进一步证明了广义核心存在且非空.

关键词: 双合作博弈；双超模博弈；广义核心；广义韦伯集

中图分类号: O225　　**文献标志码:** A

Model of profit allocation based on generalized solution in bicooperative game

FENG Qing-hua[1,2], *CHEN Ju-hong*[1], *LIU Tong*[2]

(1. School of Economics and Management，Xi’an University of Technology，Xi’an 710054，China；2. School of Information，Xi’an University of Finance and Economics，Xi’an 710100，China．Correspondent：FENG Qing-hua, E-mail：fqhua96183@126.com)

Abstract: The bicooperative game mainly studies how the bicoalition profit completely distributes to each of the participants of the bicoalition. Considering that the total profit is left undistributed to invest and enlarge reproduction or redistribution, the bicooperation game is promoted based on the solution defination of generalized imputation, generalized core and generalized weber set. It is proved that the generalized core is always included in the generalized Weber set. The generalized core of the bisupermodular game is always equal to the generalized weber set. Because the general weber set is a nonempty set, it is proved that the generalized core exists and is not empty.

Keywords: bicooperative game；bisupermodular game；generalized core；generalized weber set

0　引　　言

合作博弈理论的核心问题是研究如何将合作联盟的总收益公平合理地分配给每个参与者[1]. 合作联盟中的解是一个映射函数, 是由多个实数组成的支付向量集, 每个支付向量集表示合作联盟中每个参与者的一种分配结果. Gillies[2]提出的核心是研究最广泛的一种解的概念, 包含在核心中的分配结果不被其他分配结果所优超, 此时该合作联盟也是最稳定的, 因为没有任何一个参与者愿意背离采取该分配方案的合作联盟. 在通常情况下, 合作联盟的核心解有时会不存在, Shapley[3]提出了凸博弈的核心总是存在且非空. 另一种研究最广泛的解是韦伯集, 是 Weber 提出的一种解的概念, 它总是存在且非空的. Weber[4]证明了任何合作博弈的核心都是韦伯集的子集. Bilbao[5]首先提出了双合作博弈模型. Bilbao 等[6]进一步定义了双合作博弈的核心和韦伯集的概念, 并证明了当满足超模性时双合作博弈的核心总是存在且非空的, 且核心和韦伯集相等. Branzei 等[7]将模糊理论引入到合作博弈中, 建立了模糊合作博弈模型. 冯庆华等[8]将模糊理论引入到双合作博弈中, 提出了模糊双合作博弈模型.

在合作博弈和双合作博弈的解的研究中, 均考虑将合作联盟收益全部分配给参与者, 但是为了确保合作联盟的持续性, 应考虑并不将所有的合作收益进行分配, 而是留出来一部分用来进行奖励或者投资再生产. 根据这种思想, 为合作收益值和每个参与者的分

收稿日期: 2015-01-08；**修回日期:** 2015-06-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71272117)；陕西省高校重点学科专项资金建设项目；陕西省教育厅科学研究计划项目(2013JK0234)；西安财经学院校级科研项目(13XCK12).

作者简介: 冯庆华(1977−), 女, 讲师, 博士, 从事博弈论、供应链管理的研究；陈菊红(1964−), 女, 教授, 博士生导师, 从事物流与供应链管理等研究.

配值引入了分配系数, 从而产生了广义解的概念. 刘小冬等[9]扩展了合作博弈中转归、核心的概念, 定义了广义分配和广义核心. 在此基础上, 本文将双合作博弈模型进行推广, 提出了双合作博弈下的广义分配、广义核心和广义韦伯集的概念, 并证明了广义核心总是存在且非空. 当满足超模性时, 广义核心总是与广义韦伯集相等.

1　双合作博弈的广义解

双合作博弈是合作博弈的扩展, 在合作博弈中, 假设合作联盟为 S, $S \subseteq N$, $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ 表示所有参与者的集合. S 将所有的参与者划分为两个集合 S 和 $N \setminus S$, $N \setminus S$ 表示 N 中不包含 S 的参与者组成的集合. $v(S)$ 表示合作联盟 S 的收益函数, 联盟 $N \setminus S$ 对 $v(S)$ 没有贡献, 联盟合作博弈的解主要研究如何将 $v(S)$ 合理地分配给每一个参与者. 双合作博弈的双合作联盟为 (S, T), $S, T \subseteq N$, $S \bigcap T = \varnothing$. (S, T) 将所有的参与者划分为3个集合 S、T 和 $N \setminus S \setminus T$, $N \setminus S \setminus T$ 表示 N 中不包含 S 和 T 的参与者组成的集合. $b(S, T)$ 表示双合作联盟 (S, T) 的收益函数, 并且联盟 $N \setminus S \setminus T$ 对 $b(S, T)$ 有贡献. 双合作博弈的解主要研究如何将 $b(S, T)$ 合理地分配给每一个参与者. 例如, 某集团企业需要股东投票决定是否要实施某个项目, 包含在合作博弈的合作联盟 S 中的参与者都表示支持, $N \setminus S$ 中的参与者都表示反对, 当项目表决通过并成功实施后, 获得的联盟收益 $v(S)$ 会分配给联盟 S 中的参与者. 对于双合作博弈的双合作联盟 (S, T) 而言, 集合 S 中的参与者都表示支持, 集合 T 中的参与者都表示反对, 集合 $N \setminus S \setminus T$ 中的参与者都表示中立, 当项目投票表决通过并成功实施后, 获得的总收益要分配给集合 S 和 $N \setminus S \setminus T$ 中的参与者, 由于 $N \setminus T$ 中的参与者都没有反对, 对项目的成功实施也有贡献. 对于集合 S 中的参与者而言, 既获得支持的收益, 也有中立的收益, 集合 $N \setminus S \setminus T$ 中的参与者获得中立的收益.

定义 1　双合作博弈是一个向量对 (N, b), 其中 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ 为参与者的集合, $b : 3^N \to R$ 是一个映射函数, 表示双合作联盟的收益函数. $b(\varnothing, \varnothing) = 0$, $3^N = \{(S, T) : S, T \subseteq N,\ S \bigcap T = \varnothing\}$.

Grabisch 等[10]提出了 3^N 上的偏序关系. 设两个双合作联盟 (A, B) 和 (C, D), 其包含关系为 $(A, B) \sqsubseteq (C, D) \Leftrightarrow A \subseteq C,\ B \supseteq D$. 将 $\sqsubset$ 定义为严格包含, 则 $(A, B) \sqsubset (C, D)$ 表示 $A \subset C,\ B \supset D$. 双合作博弈的偏序集 $(3^N, \sqsubseteq)$ 满足如下性质:

1) $(\varnothing, N)$ 是偏序集的第一个元素, 且满足 $(\varnothing, N) \sqsubseteq (A, B)$, 其中 $(A, B) \in 3^N$.

2) $(N, \varnothing)$ 是偏序集的最后一个元素, 且满足 $(A, B) \sqsubseteq (N, \varnothing)$, 其中 $(A, B) \in 3^N$.

3) 3^N 中 (A, B) 和 (C, D) 的并为 $(A, B) \bigvee (C, D) = (A \bigcup C, B \bigcap D)$, 交为 $(A, B) \bigwedge (C, D) = (A \bigcap C, B \bigcup D)$.

定义 2　设 $\overline{N} = \{-n, \cdots, -1, 1, \cdots, n\}$, $\Lambda : 3^N \to 2^{\overline{N}}$ 满足 $\Lambda(S, T) = S \bigcup \{-i_j : i_j \in (N \setminus T)\}$. 在偏序集 $(3^N, \sqsubseteq)$ 中, $\Theta(3^N)$ 表示所有从 $(\varnothing, N)$ 到 $(N, \varnothing)$ 的最大链的集合, 最大链 $\theta \in \Theta(3^N)$ 表示为

$$\begin{aligned}&(\varnothing, N) \sqsubset (S_1, T_1) \cdots \sqsubset (S_k, T_k) \cdots \sqsubset \\ &(S_{2n-1}, T_{2n-1}) \sqsubset (N, \varnothing).\end{aligned} \tag{1}$$

可以看出, 每个最大链有 $2n + 1$ 个双联盟, 在 $\overline{N}$ 上有对应的序 $\theta = (i_1, i_2, \cdots, i_{2n})$ 满足 $\Lambda(S_k, T_k) = \theta(i_k)$, $k = 1, 2, \cdots, 2n$, $i_k \in \overline{N}$. $\theta(i_k) = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 表示在 i_k 之前的参与者集合, 则在 $2^{\overline{N}}$ 上可得到相应的最大链为

$$\begin{aligned}&\varnothing \subset \{i_1\} \cdots \subset \{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \cdots \subset \\ &\{i_1, i_2, \cdots, i_{2n-1}\} \subset \overline{N}.\end{aligned} \tag{2}$$

序 θ 也可表示为

$$\theta = (-i_1, i_1, -i_2, i_2, \cdots, -i_j, i_j, \cdots, -i_n, i_n),$$

其中 $1 \leqslant j \leqslant n$, $i_j \in N$. $\theta(i_j)$ 表示在 i_j 之前的参与者集合, 且 $\theta(i_j) \setminus i_j = \theta(-i_j)$, $\theta(-i_j) \setminus -i_j = \theta(i_{j-1})$, 则 $\Lambda^{-1}(\theta(-i_1) \setminus -i_1) = (\varnothing, N)$, $\Lambda^{-1}(\theta(i_n)) = (N, \varnothing)$.

设 r 和 c_{i_j} 为两个实数, $0 < r \leqslant 1$, $0 < c_{i_j} \leqslant 1$, $r = \max\limits_{i_j \in N} c_{i_j}$, 双合作博弈的广义分配为

$$\begin{aligned}&I(N, b, r, c) = \\ &\Big\{x \in R^n \Big| \sum_{i_j \in N} x_{i_j} = r[b(N, \varnothing) - b(\varnothing, N)], \\ &x_{i_j} \geqslant c_{i_j}[b[\Lambda^{-1}(\theta(i_j))] - b(\varnothing, N)]\Big\}.\end{aligned} \tag{3}$$

定义 3　设 r 和 c_{i_j} 为两个实数, $0 < r \leqslant 1$, $0 < c_i \leqslant 1$, $r = \max\limits_{i_j \in N} c_{i_j}$, 双合作博弈的广义核心为

$$\begin{aligned}&C(N, b, r, c) = \\ &\Big\{x \in R^n \Big| \sum_{i_j \in N} x_{i_j} = r[b(N, \varnothing) - b(\varnothing, N)], \\ &\text{存在}\ y, z \in R^n,\ \text{使得}\ x = y + z, \\ &y(S) + z(N \setminus T) \geqslant \max_{i_j \in N \setminus T} c_{i_j}[b(S, T) - b(\varnothing, N)]\Big\}.\end{aligned} \tag{4}$$

定义 4　双超模合作博弈满足超模性, 即对于所有的 $(S_1, T_1), (S_2, T_2) \in 3^N$, 满足

$$\begin{aligned}&b((S_1, T_1) \bigvee (S_2, T_2)) + b((S_1, T_1) \bigwedge (S_2, T_2)) \geqslant \\ &b(S_1, T_1) + b(S_2, T_2).\end{aligned} \tag{5}$$

Bilbao 等[6]提出了双合作博弈的韦伯集定义, 韦伯集存在且非空. 在此基础上, 本文将此定义扩展为

广义韦伯集,广义韦伯集也是存在且非空的.

定义5 设 $\theta \in \Theta(3^N)$, r 和 c_{i_j} 为两个实数, 且 $0 < r \leqslant 1$, $0 < c_{i_j} \leqslant 1$, $r = \max\limits_{i_j \in N} c_{i_j}$, 最大链 θ 上的两个边际向量 $M^\theta(b)$ 和 $m^\theta(b) \in R^n$ 分别表示为

$$M^\theta_{i_j}(b) = r[b[\Lambda^{-1}(\theta(i_j))] - b[\Lambda^{-1}(\theta(i_j) \setminus i_j)]], \tag{6}$$

$$m^\theta_{-i_j}(b) = r[b[\Lambda^{-1}(\theta(-i_j))] - b[\Lambda^{-1}(\theta(-i_j) \setminus -i_j)]]. \tag{7}$$

广义韦伯集 $W(N, b, r, c)$ 是由边际向量 $a^\theta(b) = M^\theta_{i_j}(b) + m^\theta_{-i_j}(b)$ 组成的凸包. 若取 $c_{i_j} = 1 (1 \geqslant i_j \geqslant n)$, 则 $r = 1$ 时的广义分配就是通常意义下的分配, 广义核心就是通常意义下的核心, 广义韦伯集也就变成了通常意义下的韦伯集.

定理1 在双合作博弈中, $\theta \in \Theta(3^N)$, 有

$$\sum_{i_j \in S} M^\theta_{i_j}(b) + \sum_{i \in N \setminus T} m^\theta_{-i_j}(b) \geqslant \max_{i_j \in N \setminus T} c_{i_j} [b(S, T) - b(\varnothing, N)].$$

证明 设 (S, T) 是 θ 中的一个元素, $\Lambda(S, T) = \{i_1, i_2, \cdots, i_{n+s-t}\}$, $s = |S|$, $t = |T|$, $s + t \leqslant n$. 由于 $\theta(i_k) = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$, $1 \leqslant k \leqslant n + s - t$, 可以得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_j \in S} M^\theta_{i_j}(b) + \sum_{i_j \in N \setminus T} m^\theta_{-i_j}(b) = \\
&\sum_{i_j \in N \setminus T} r[b(\Lambda^{-1}[\theta(i_j)]) - b(\Lambda^{-1}[\theta(i_j) \setminus i_j])] = \\
&r \sum_{k=1}^{n+s-t} [b(\Lambda^{-1}[\theta(i_k)]) - b(\Lambda^{-1}[\theta(i_{k-1})])] \geqslant \\
&\max_{i_j \in N \setminus T} c_{i_j} [b(S, T) - b(\varnothing, N)].
\end{aligned}$$

当 $(S, T) = (N, \varnothing)$ 时, $\sum\limits_{i_j \in N} [M^\theta_{i_j}(b) + m^\theta_{-i_j}(b)] = r[b(N, \varnothing) - b(\varnothing, N)]$, 根据广义核心的定义可得广义韦伯集中的所有边际向量 $a^\theta(b)$ 是有效的. □

定理2 在双合作博弈的广义解中, $C(N, b, r, c) \subseteq W(N, b, r, c)$.

证明 采用反证法. 假设存在 $x \in C(N, b, r, c)$ 使得 $x \notin W(N, b, r, c)$. 由于 $C(N, b, r, c)$ 和 $W(N, b, r, c)$ 是封闭的凸包, 根据分离定理, 存在 $u \in R^n$, 使得

$$wu > xu,\ w \in W(N, b, r, c).$$

对于所有的边际向量 $w = a^\theta(b)$, 上述不等式均成立. 令 u 的所有分量满足如下关系:

$$u_{i_1} \geqslant u_{i_2} \geqslant \cdots \geqslant u_{i_{n-1}} \geqslant u_{i_n},$$

$$\begin{aligned}
&a^\theta(b)u = \sum_{j=1}^n a^\theta_{i_j}(b) u_{i_j} = \\
&\sum_{j=1}^n r[M^\theta_{i_j}(b) + m^\theta_{-i_j}(b)] u_{i_j} = \\
&\sum_{j=1}^n r u_{i_j} [b(\Lambda^{-1}(\theta(i_j))) - b(\Lambda^{-1}(\theta(i_j) \setminus i_j))] + \\
&\sum_{j=1}^n r u_{i_j} [b(\Lambda^{-1}(\theta(-i_j))) - b(\Lambda^{-1}(\theta(-i_j) \setminus -i_j))] = \\
&r u_{i_n} b(N, \varnothing) - r u_{i_1} b(\varnothing, N) + \\
&r \sum_{j=1}^{n-1} (u_{i_j} - u_{i_{j+1}}) b(\Lambda^{-1}(\theta(i_j))) \leqslant \\
&r u_{i_n} \Big[\frac{\sum\limits_{t=1}^n y_{i_t} + \sum\limits_{t=1}^n z_{i_t}}{r} + b(\varnothing, N)\Big] - r u_{i_1} b(\varnothing, N) + \\
&r \sum_{j=1}^{n-1} (u_{i_j} - u_{i_{j+1}}) \Big[\frac{\sum\limits_{t=1}^j y_{i_t} + \sum\limits_{t=1}^j z_{i_t}}{\max\limits_{i_j \in \theta(i_j)} c_{i_j}} + b(\varnothing, N)\Big] \leqslant \\
&u_{i_n} \Big[\sum_{t=1}^n y_{i_t} + \sum_{t=1}^n z_{i_k} + r b(\varnothing, N)\Big] - r u_{i_1} b(\varnothing, N) + \\
&\sum_{j=1}^{n-1} (u_{i_j} - u_{i_{j+1}}) \Big[\sum_{t=1}^j y_{i_t} + \sum_{t=1}^j z_{i_t} + r b(\varnothing, N)\Big] \leqslant \\
&u_{i_1}(y_{i_1} + z_{i_1}) + u_{i_2}(y_{i_2} + z_{i_2}) + \cdots + \\
&u_{i_n}\Big(\sum_{t=1}^n y_{i_t} + \sum_{t=1}^n z_{i_t}\Big) \leqslant \sum_{j=1}^n u_{i_j} x_{i_j} \leqslant ux.
\end{aligned}$$

证明结果与 $wu > xu$ 相矛盾, 因此 $C(N, b, r, c) \subseteq W(N, b, r, c)$ 成立, 表明了广义核心是包含在广义韦伯集中的, 但核心有可能为空. □

定理3 双超模合作博弈中, 令 $i_j \in N$, (S_1, T_1), $(S_2, T_2) \in 3^{N \setminus i_j}$, $(S_1, T_1) \sqsubseteq (S_2, T_2)$, 有

$$\begin{aligned}
&b(S_2 \bigcup i_j, T_2) - b(S_2, T_2) \geqslant \\
&b(S_1 \bigcup i_j, T_1) - b(S_1, T_1),
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&b(S_2, T_2) - b(S_2, T_2 \bigcup i_j) \geqslant \\
&b(S_1, T_1) - b(S_1, T_1 \bigcup i_j).
\end{aligned} \tag{9}$$

证明 由于 $(S_1, T_1) \sqsubseteq (S_2, T_2)$. 设 $S_1' = S_1 \bigcup i_j$, 对 (S_1', T_1) 和 (S_2, T_2) 应用超模性的性质可得

$$\begin{aligned}
&b(S_1' \bigcup S_2, T_1 \bigcap T_2) + b(S_1' \bigcap S_2, T_1 \bigcup T_2) \geqslant \\
&b(S_1 \bigcup i_j, T_1) + b(S_2, T_2).
\end{aligned}$$

因此得到

$$\begin{aligned}
&b(S_2 \bigcup i_j, T_2) + b(S_1, T_1) \geqslant \\
&b(S_1 \bigcup i_j, T_1) + b(S_2, T_2).
\end{aligned}$$

同理, 令 $T_2' = T_2 \bigcup i_j$, 对 (S_1, T_1) 和 (S_2, T_2') 应用超模性的性质可得

$$b(S_1, T_1 \bigcup i_j) + b(S_2, T_2) \geqslant$$
$$b(S_1, T_1) + b(S_2, T_2 \bigcup i_j). \qquad \square$$

定理 3 表明了参与者参与的双合作联盟越大, 对双合作联盟作出的贡献越大, 获得的边际收益越多.

定理 4　双超模合作博弈中, $C(N, b, r, c) = W(N, b, r, c)$.

证明　若证明广义核心与广义韦伯集相等, 则证明 $W(N, b, r, c) \subseteq C(N, b, r, c)$ 成立即可.

设 $\theta \in \Theta(3^N)$, 根据定理 1 可得广义韦伯集中边际向量解是有效的, 对于每个 $(S, T) \in \theta$, 边际向量 $a^{\theta}_{i_j}(b) = M^{\theta}_{i_j} + m^{\theta}_{-i_j}$ 满足

$$\sum_{i_j \in S} M^{\theta}_{i_j}(b) + \sum_{i_j \in N \setminus T} m^{\theta}_{-i_j}(b) \geqslant$$
$$\max_{i_j \in N \setminus T} c_{i_j}[b(S, T) - b(\varnothing, N)].$$

下面证明对于所有的不在 θ 中的 (S, T), 满足

$$\sum_{i_j \in S} M^{\theta}_{i_j}(b) + \sum_{i_j \in N \setminus T} m^{\theta}_{-i_j}(b) \geqslant$$
$$\max_{i_j \in N \setminus T} c_{i_j}[b(S, T) - b(\varnothing, N)].$$

对于不包含在 θ 中的 (S, T), 令 $\Lambda(S, T) = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$, 其中 $k = n + s - t$. 则 $\Lambda^{-1}[\theta(i_1)] \sqsubset \Lambda^{-1}[\theta(i_2)] \sqsubset \cdots \sqsubset \Lambda^{-1}[\theta(i_k)]$. 设 $A_0 = \varnothing$, $A_l = \{i_1, i_2, \cdots, i_l\}$, 其中 $1 \leqslant l \leqslant k$, 有 $A_l = \Lambda(S, T) \bigcap \Lambda(\Lambda^{-1}[\theta(i_l)])$, 即 $\Lambda^{-1}(A_l) = (S, T) \bigwedge \Lambda^{-1}[\theta(i_l)]$. 由于双超模合作博弈具有超模性, 对于所有的 $1 \leqslant l \leqslant k$, 下式成立:

$$b(\Lambda^{-1}[\theta(i_k)]) - b(\Lambda^{-1}[\theta(i_k) \setminus i_k]) \geqslant$$
$$b(\Lambda^{-1}(A_l)) - b(\Lambda^{-1}(A_{l-1})).$$

进而有

$$r \sum_{i_j \in S} M^{\theta}_{i_j}(b) + r \sum_{i_j \in N \setminus T} m^{\theta}_{-i_j}(b) =$$
$$r \sum_{i_j \in N \setminus T} [b(\Lambda^{-1}[\theta(i_j)]) - b(\Lambda^{-1}[\theta(i_j) \setminus i_j])] =$$
$$r \sum_{k=1}^{n+s-t} [b(\Lambda^{-1}[\theta(i_k)]) - b(\Lambda^{-1}[\theta(i_{k-1})])] \geqslant$$
$$r \sum_{k=1}^{n+s-t} [b(\Lambda^{-1}[A_l]) - b(\Lambda^{-1}[A_{l-1}])] \geqslant$$
$$\max_{i_j \in N \setminus T} c_{i_j}[b(S, T) - b(\varnothing, N)].$$

当 $(S, T) = (N, \varnothing)$ 时, 有

$$\sum_{i_j \in N} [M^{\theta}_{i_j}(b) + m^{\theta}_{-i_j}(b)] = r[b(N, \varnothing) - b(\varnothing, N)],$$

根据广义核心的定义可知不在 θ 中的 (S, T) 也是有效的, 从而 $W(N, b, r, c) \subseteq C(N, b, r, c)$ 得证. 同时根据定理 2 可得出, $W(N, b, r, c) = C(N, b, r, c)$. 由于广义韦伯集是一个非空集合, 表明了双超模合作博弈的广义核心总是存在且非空的. $\square$

2　应用算例

随着产品竞争的加剧和服务意识的增强, 制造企业联盟中的部分企业向服务型制造模式转变, 因此有些制造商提供产品, 有些制造商提供产品和基于产品之上的服务[11]. 设 $N = \{1, 2, 3\}$ 表示制造商的集合, (S, T) 表示制造商组成的双合作联盟, 将制造商分为 3 个集合, 集合 S 中的制造商既提供产品又提供服务, $N \setminus S \setminus T$ 中的制造商只提供产品, 集合 T 中的制造商既不提供产品也不提供服务. 产品服务系统交付使用后, 集合 S 中的制造商获得产品和服务的双重收益, 集合 $N \setminus S \setminus T$ 的参与者获得产品的收益. 在 3^N 上存在一个最大链 θ 为

$$(\varnothing, N) \sqsubset (\varnothing, \{2, 3\}) \sqsubset (\varnothing, \{3\}) \sqsubset (\varnothing, \varnothing) \sqsubset$$
$$(\{1\}, \varnothing) \sqsubset (\{1, 2\}, \varnothing) \sqsubset (N, \varnothing).$$

对于每个双合作联盟, 根据 $\theta(i_j) = \Lambda(S_j, T_j) = S_j \bigcup \{-i_j : i_j \in N \setminus T_j\}$, 在 2^N 上相应的最大链为

$$\varnothing \subset \{-1\} \subset \{-1, -2\} \subset \{-1, -2, -3\} \subset$$
$$\{-1, -2, -3, 1\} \subset \{-1, -2, -3, 1, 2\} \subset \overline{N}.$$

设 $b(\varnothing, N) = 0$, $b(\varnothing, \{2, 3\}) = 30$, $b(\varnothing, \{3\}) = 50$, $b(\varnothing, \varnothing) = 80$, $b(\{1\}, \varnothing) = 120$, $b(\{1, 2\}, \varnothing) = 170$, $b(N, \varnothing) = 200$. 可证明, 双合作联盟函数 $b(S, T)$ 是满足超模性的.

假设制造商 i 的产品收益为 z_i, 服务收益为 y_i. 将所得的总收益全部分配给制造商时, 分配结果如表 1 所示. 将所得的总收益不全部分配给制造商时, 根据每个制造商在提供产品服务过程中的贡献率和顾客反馈情况进行权衡, 最后确定的分配系数分别为 $c_1 = 0.9$, $c_2 = 0.8$, $c_3 = 0.7$, 其中 c_i 表示制造商 i 的分配系数, $r = 0.9$. 根据广义韦伯集的定义可得各制造商在双合作博弈广义解下的分配结果, 如表 2 所示, 其中广义联盟收益 $= \max_{i_j \in N \setminus T} c_{i_j} \times$联盟收益. 进一步得出制造商 1 的收益 $x_1 = 0.9 \times (30 + 40) = 63$, 制造商 2 的收益 $x_2 = 0.9 \times (20 + 50) = 63$, 制造商 3 的收益 $x_3 = 0.9 \times (30 + 30) = 54$. 有 $(1 - r)[b(N, \varnothing) - b(\varnothing, N)] = 0.1 \times 200 = 20$ 的总收益没有进行分配. 可验证表 2 的收益分配结果满足广义核心的定义.

表 1　经典双合作博弈下的收益分配表

联盟	联盟收益	z_1	y_1	z_2	y_2	z_3	y_3
$(\varnothing, N)$	0	0	0	0	0	0	0
$(\varnothing, \{2, 3\})$	30	30	0	0	0	0	0
$(\varnothing, \{3\})$	50	30	0	20	0	0	0
$(\varnothing, \varnothing)$	80	30	0	20	0	30	0
$(\{1\}, \varnothing)$	120	30	40	20	0	30	0
$(\{1, 2\}, \varnothing)$	170	30	40	20	50	30	0
$(N, \varnothing)$	200	30	40	20	50	30	30

表 **2** 双合作博弈广义解下的收益分配表

联盟	广义联盟收益	z_1	y_1	z_2	y_2	z_3	y_3
$(\varnothing, N)$	0	0	0	0	0	0	0
$(\varnothing, \{2,3\})$	27	27	0	0	0	0	0
$(\varnothing, \{3\})$	45	27	0	18	0	0	0
$(\varnothing, \varnothing)$	72	27	0	18	0	27	0
$(\{1\}, \varnothing)$	108	27	36	18	0	27	0
$(\{1,2\}, \varnothing)$	153	27	36	18	45	27	0
$(N, \varnothing)$	180	27	36	18	45	27	27

有些不满足超模性的双合作博弈的核心解有可能为空值, 但是其广义核心解存在且不为空. 例如, 设 $b(\varnothing,N)=0, b(\varnothing,\{1\})=40, b(\varnothing,\{2\})=40, b(\varnothing,\{3\})=50, b(\{1,2\},\varnothing)=100, b(\{2,3\},\varnothing)=90, b(\{1,3\},\varnothing)=80, b(N,\varnothing)=130$, 根据双合作博弈的核心的定义可得如下不等式:

$$z_2+z_3 \geqslant 40, \tag{10}$$

$$z_1+z_3 \geqslant 40, \tag{11}$$

$$z_1+z_2 \geqslant 50, \tag{12}$$

$$y_1+y_2+z_1+z_2 \geqslant 100, \tag{13}$$

$$y_2+y_3+z_2+z_3 \geqslant 90, \tag{14}$$

$$y_1+y_3+z_1+z_3 \geqslant 80, \tag{15}$$

$$y_1+y_2+y_3+z_1+z_2+z_3 = 130. \tag{16}$$

由式(13)～(15)可得, $y_1+y_2+y_3+z_1+z_2+z_3 \geqslant 135$ 与 $y_1+y_2+y_3+z_1+z_2+z_3=130$ 相矛盾, 所以其核心为空值. 但若令 $c_1=0.9, c_2=0.8, c_3=0.7$, 则可以证明 $x_1=z_1+y_1=25+20=45, x_2=z_2+y_2=20+25=45, x_3=z_3+y_3=12+15=27$ 是包含在广义核心中的. 广义核心解如表 3 所示, 表明了该双合作博弈的广义核心是非空的.

表 **3** 双合作博弈广义解下的收益分配表

联盟	广义联盟收益	z_1	y_1	z_2	y_2	z_3	y_3
$(\varnothing, N)$	0	0	0	0	0	0	0
$(\varnothing, \{1\})$	32	0	0	20	0	12	0
$(\varnothing, \{2\})$	36	25	0	20	0	12	0
$(\varnothing, \{3\})$	45	25	0	20	0	12	0
$(\{1,2\}, \varnothing)$	90	25	20	20	25	12	0
$(\{2,3\}, \varnothing)$	72	25	20	20	25	12	15
$(\{1,3\}, \varnothing)$	72	25	20	20	25	12	15

3 结 论

双合作博弈的解主要研究将联盟收益全部分配给双合作联盟 (S,T) 中集合 S 和 $N \setminus S \setminus T$ 的参与者, 为了满足进行再投资扩大再生产或者进行再分配的需要, 现实中存在着不把所有收益都分配, 而是预留一部分的情况. 本文在双合作博弈模型的基础上, 定义了广义分配、广义核心和广义韦伯集的概念, 进一步证明了广义核心是广义韦伯集的子集, 并证明了双超模博弈的广义核心等于广义韦伯集, 表明了广义核心存在且非空.

参考文献(References)

[1] Owen G. Values of games with a priori unions[M]. Berlin: Springer-Heidelberg, 1977: 76-88.

[2] Gillies D B. Some theorems on n-person games[M]. Princeton: Princeton University Press, 1953: 307-317.

[3] Shapley L S. Cores of convex games[J]. Int J of Game Theory, 1971, 1(1): 11-26.

[4] Weber R J. The shapley value: Essays in honer of lloyd shapley[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1988: 101-120.

[5] Bilbao J M. Cooperative games on combinatorial structures[M]. Bosten: Kluwer Academic Publishers, 2000: 23-26.

[6] Bilbao J M, Fernandez J R, Jimenez N, et al. The core and the Weber set for bicooperative games[J]. Int J of Game Theory, 2007, 36(2): 209-222.

[7] Rodica Branzei, Dinko Dimitrov, Stef Tijs. Models in cooperative game theory[M]. Berlin: Speringer, 2008: 53-96.

[8] 冯庆华, 陈菊红, 刘通. 基于模糊双合作博弈的收益分配模型[J]. 控制与决策, 2013, 28(5): 701-705.
(Feng Q H, Chen J H, Liu T. Model of profit allocation based on the fuzzy bicooperative game[J]. Control and Decision, 2013, 28(5): 701-705.)

[9] 刘小冬, 刘九强, 胡健. 具有受限支付的合作博弈研究[J]. 应用数学学报, 2012, 35(5): 845-854.
(Liu X D, Liu J Q, Hu J. On cooperative games with restricted payoffs[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2012, 35(5): 845-854.)

[10] Grabisch M, Labreuche C H. Bicapacitities: Definition Möbius transform and interaction[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 151(2): 211-236.

[11] Mont O K. Clarifying the concept of product-service system[J]. J of Cleaner Production, 2002, 10(3): 237-245.

(责任编辑：郑晓蕾)