

基于高斯分布的多层无迹卡尔曼滤波算法

刘江¹, 王玉金², 段建雷², 叶松庆¹

(1. 中国科学院重庆绿色智能技术研究院 自动推理与认知研究中心, 重庆 400714;
2. 重庆邮电大学 计算机科学与技术学院, 重庆 400065)

摘要: 在传统无迹卡尔曼滤波(UKF)中对其估计精度和计算效率起关键作用的是采样算法, 即构造具有权重的样本点. 研究表明, 带权样本点匹配随机变量的阶矩越高滤波的精度越高, 如多项式无迹卡尔曼滤波(PUKF), 但通常此类算法的复杂度过高甚至难以求解. 为此, 基于高斯分布结合高阶矩匹配与无迹卡尔曼滤波线性扩张方法(LUKF), 提出一种兼顾效率和精度的高斯滤波离线算法. 实验结果表明, 所提出算法拥有比UKF更高的估计精度和比PUKF更好的计算效率.

关键词: 无迹卡尔曼滤波; 多层采样; 高斯分布; 高阶无迹卡尔曼滤波

中图分类号: TP274

文献标志码: A

Multi-layer unscented Kalman filtering algorithm based on Gaussian distribution

LIU Jiang¹, WANG Yu-jin², DUAN Jian-lei², YE Song-qing¹

(1. Chongqing Key Laboratory of Automated Reasoning and Cognition, Chongqing Institute of Green and Intelligent Technology, Chinese Academy of Sciences, Chongqing 400714, China; 2. College of Computer Science and Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China. Correspondent: WANG Yu-jin, E-mail: wangyujin@cigit.ac.cn)

Abstract: The sampling algorithm of unscented Kalman filter(UKF), which selects the sigma points and their weights, plays a vital role for the accuracy and computational efficiency. It is well known that, more moments of random variables are matched, more accuracy reaches, for example, the Polynomial-extension of UKF(PUKF). However, such methods often suffer from their highly computational complexity, even worse, it is hard to get a solution. An efficient and highly accurate off-line algorithm is proposed for the Gaussian filter based on the high-order moments matching and linear-extension of UKF(LUKF). Experimental results show that the proposed algorithm has more accuracy than UKF and more computational efficiency than PUKF.

Keywords: unscented Kalman filter; multi-layer sampling; Gaussian distribution; high order UKF

0 引言

目前, 在非线性滤波领域常采用两类滤波方法: 一类是线性化近似非线性函数, 再应用线性估计的方法, 其中最广泛应用的是扩展卡尔曼滤波(EKF)^[1-2]; 另一类不需要对非线性函数线性化, 而是选择一些采样点近似随机变量的概率密度分布, 其中UKF^[3-4]、粒子滤波(PF)^[5]和容积滤波(CKF)^[6]得到了广泛的关注和研究.

EKF首先对非线性函数泰勒展开, 采用忽略二阶

及以上高阶项的方法近似非线性函数. 虽然EKF具有原理简单、计算方便等优点, 但是在强非线性条件下, 存在以下不足^[3,7-8]: 1) 当对非线性函数泰勒展开时, 需要求雅克布矩阵, 因此只能适用于雅克布矩阵存在的情况; 2) 当展开式的二阶及以上高阶项产生较大影响时, 忽略二阶及以上的高阶项会产生较大的误差. 目前, 虽然对EKF有众多的改进方法, 如高阶截断EKF^[2]、迭代EKF^[9]等, 但这些缺陷仍然难以克服. 粒子滤波^[10-12]是基于蒙特卡洛方法的一类随

收稿日期: 2015-01-09; 修回日期: 2015-05-11.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61202131); 重庆市科委基金项目(cstc2012ggB40004, cstc2014jcsfglyjs0005, cstc2014zktjcxxyB0031); 中国科学院“西部之光”项目.

作者简介: 刘江(1979—), 男, 副研究员, 从事计算机软件与理论、可计算理论等研究; 王玉金(1988—), 女, 硕士生, 从事估计与控制的研究.

机采样的非线性滤波方法, 它也称作序列蒙特卡洛方法 (SMC), 利用粒子集逼近函数的概率密度分布, 该方法避免了 EKF 的不足, 但要得到高精度的估计, 需要较多的粒子数目且粒子数目随随机变量的维数呈几何级数地增长, 因此 PF 会产生较大的计算量。

UKF^[3-4] 是基于随机变量阶矩的一类确定性采样的非线性滤波方法, 通过选择一些确定性的带权样本点近似随机变量的概率密度分布. 这些带权样本点具有如下特点: 捕获了随机变量的均值、协方差甚至高阶矩等特征; 满足估计的无偏性. UKF 的采样点是与其分布密切相关的典型带权样本点, 样本点数量远小于 PF 滤波的粒子数量, 因此极大地降低了计算复杂度. 由以上分析可知, UKF 不需要计算雅克布矩阵且具有有限的样本点, 克服了 EKF 的缺点, 具有较低的复杂度, 但当噪声的统计特性未知时会导致 UKF 精度下降, 为此人们提出了各种自适应 UKF 算法^[13-15].

从现有的 UKF 和其各种变种算法可知, 采样策略是核心和基础. 采样策略包括确定样本点的个数、位置和权重^[16], 到目前为止有多种采样策略, 如最初选择 $2n + 1$ 个带权样本点的对称采样策略^[3], 这些带权样本点匹配 n 维随机变量的均值和协方差及所有奇次高阶矩. 由于对称采样不适合对实时性要求严格的系统, 为了降低计算复杂度, Julier 等^[17] 提出了单形采样策略, 其特征是选择 $n + 2$ 个采样点且分布不关于均值点对称. 对上面两种采样策略的分析可以发现它们具有一个共同的缺点: 随着随机变量维数的增加会产生非局部效应, 并且非局部效应会导致精度下降. 为了减小非局部效应带来的偏差, Julier^[18] 提出了比例修正采样策略, 其特征是对上述采样策略产生的样本点进行比例缩放. 以上几种采样策略对应的滤波对非线性函数统计量的精度可以达到二阶, 而实际应用中, 迫切需要精确度更高的采样策略.

为了提高估计精度, 国内外学者提出了高阶采样策略, Julier 等^[19] 提出了匹配随机变量前四阶矩的高阶采样策略, 但这种高阶采样策略无法得出解析解. 针对高阶采样策略无解的问题, 提出了一种解析方法^[20], 但是也仅限制在一些特殊情况. Date 等^[21] 提出了近似匹配前四阶矩的采样策略. Tenne 等^[22] 提出了匹配任意阶矩的高阶采样策略, 对应的是高阶无迹卡尔曼滤波 (HOUF), 但是由于计算难度较大, 没有被广泛应用. 最近, 多项式采样策略 (PUT) 和线性采样策略 (LUT) 被提出, 分别与这两种采样策略对应的 PUKF^[23] 和 LUKF (LUKF)^[24] 不仅估计精度优于 UKF 和 HOUF, 而且计算复杂度低于 HOUF. 虽然 PUKF 的估计精度远高于 UKF, 但是在每步迭代时需要花费很长的时间解多元高次方程组, 从而导致 PUKF 的计算

效率较低.

由以上分析可知, UT 变换的采样策略对 UKF 滤波的估计精度和计算效率起关键作用. 例如, 选择匹配先验随机变量阶矩越高的采样策略, 滤波的估计精度越高; 越少采样点的采样策略, 计算效率越高; 采样策略的计算复杂度越低, 计算效率越高.

本文根据采样点匹配随机变量越高的阶矩具有越高估计精度的准则, 针对 PUKF 计算效率低和 UKF 估计精度低的问题, 提出一种基于高斯分布的多层采样策略 (GMUT), 该采样策略确定的带权样本点在理论上可以匹配高斯分布的任意阶矩. 与这种采样策略对应的基于高斯分布的多层无迹卡尔曼滤波 (GMUKF) 可用于解决非线性滤波器在实际应用过程中的估计精度低和计算效率低的问题. 实验结果表明, 所提出算法拥有比 UKF 更高的估计精度和比 PUKF 更好的计算效率.

1 无迹卡尔曼滤波

考虑如下离散的非线性系统:

$$x_{k+1} = f(x_k) + v_k, \quad (1)$$

$$z_k = h(x_k) + w_k. \quad (2)$$

其中: $x_k \in R^{n_x}$ 、 $z_k \in R^{n_z}$ 分别为 k 时刻的系统状态向量和测量状态向量; $f(\cdot)$ 、 $h(\cdot)$ 分别为已知的系统函数和测量函数; v_k 为零均值且协方差矩阵为 R_k 的系统随机噪声向量, w_k 为零均值且协方差矩阵为 Q_k 的随机测量噪声, 且 v_k 、 w_k 线性无关.

1) 无迹卡尔曼滤波首先确定样本点和相应的权重 (如对称采样). 根据样本点满足均值、协方差和无偏特性组成的条件函数, 求出样本点和相应的权重为

$$X_{k,0} = \tilde{x}_k, \quad (3)$$

$$W_{k,0} = \frac{k}{n_x + k}, \quad (4)$$

$$X_{k,i} = \tilde{x}_k + (\sqrt{(n_x + k)P_k})_i, \quad (5)$$

$$X_{k,i+n_x} = \tilde{x}_k - (\sqrt{(n_x + k)P_k})_i, \quad (6)$$

$$W_{k,i} = W_{k,i+n_x} = \frac{1}{2(n_x + k)}. \quad (7)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, n_x$, n_x 为随机变量的维数, k 为比例参数, $(\sqrt{(n_x + k)P_k})_i$ 为 $(n_x + k)P_k$ 的平方根矩阵的第 i 行或列, \tilde{x}_k 为 k 时刻的估计均值, P_k 为 k 时刻的协方差, $X_{k,i}$ 为 k 时刻的第 i 个样本点, $W_{k,i}$ 为 k 时刻第 i 个样本点的权重.

2) 时间更新.

① 将上一步生成的样本点经过非线性系统方程转换得到状态样本点 $X_{k+1|k,i}$, 有

$$X_{k+1|k,i} = f(X_{k,i}). \quad (8)$$

② 对状态样本点 $X_{k+1|k,i}$ 进行加权处理得到状

态一步预测的均值 $\tilde{X}_{k+1|k}$ 、一步预测协方差矩阵 $P_{k+1|k,x}$ 分别为

$$\tilde{X}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_{k,i} X_{k+1|k,i}, \quad (9)$$

$$P_{k+1|k,x} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_{k,i} (X_{k+1|k,i} - \tilde{X}_{k+1|k})(X_{k+1|k,i} - \tilde{X}_{k+1|k})^T + R_k. \quad (10)$$

3) 量测更新.

① 状态样本点 $X_{k+1|k,i}$ 经过非线性量测方程转换得到量测样本点 $Z_{k+1,i}$, 有

$$Z_{k+1,i} = h(X_{k+1|k,i}). \quad (11)$$

② 对量测样本点 $Z_{k+1,i}$ 进行加权处理得到量测一步预测均值 \tilde{Z}_{k+1} 、一步预测协方差矩阵 $P_{k+1,z}$, 对样本点 $Z_{k+1,i}$ 和样本点 $X_{k+1|k,i}$ 加权处理得到一步预测互协方差矩阵 $P_{k+1,xz}$, 有

$$\tilde{Z}_{k+1} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_{k,i} Z_{k+1,i}, \quad (12)$$

$$P_{k+1,z} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_{k,i} (Z_{k+1,i} - \tilde{Z}_{k+1})(Z_{k+1,i} - \tilde{Z}_{k+1})^T + Q_k, \quad (13)$$

$$P_{k+1,xz} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_{k,i} (X_{k+1|k,i} - \tilde{X}_{k+1|k})(Z_{k+1,i} - \tilde{Z}_{k+1})^T. \quad (14)$$

③ 在已知状态一步预测值 $\tilde{X}_{k+1|k}$ 、量测一步预测值 \tilde{Z}_{k+1} 和测量值 Z_{k+1} 的条件下求出卡尔曼滤波的最优估计均值 \hat{x}_{k+1} 为

$$\hat{x}_{k+1} = \tilde{X}_{k+1|k} + K_{k+1}(Z_{k+1} - \tilde{Z}_{k+1}), \quad (15)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1,xz} P_{k+1,z}^{-1}, \quad (16)$$

$$P_{k+1} = P_{k+1|k,x} - K_{k+1} P_{k+1,z} K_{k+1}^T. \quad (17)$$

其中: P_{k+1} 为 $k+1$ 时刻的协方差矩阵, K_{k+1} 为卡尔曼滤波增益.

2 基于高斯分布的多层采样策略

现有采样策略确定样本点和相应权重的方法, 主要分为以下3类: 1) 首先确定样本点的权重, 然后根据权重确定样本点, 例如最小斜度单行采样^[17]、球面单行采样^[25]; 2) 首先确定样本点, 然后根据样本点确定样本点的权重, 例如线性采样策略^[24]; 3) 同时确定样本点和相应的权重, 例如对称采样^[3]和高阶HOUF^[22]. 文献[23]提出了多项式采样策略, 该采样策略是已知样本点的权重求样本点的方法, 与策略对应的PUKF估计精度远高于UKF滤波, 但是在确定样本点时需要解多元高次方程组, 从而导致PUKF的计算效率较低. 文献[24]提出了线性高阶采样策略,

该策略是已知样本点求样本点的权重, 与策略对应的LUKF不仅计算效率明显高于PUKF, 而且估计精度也远高于UKF, 但是通过解线性方程组求出样本点的权重, 可能会出现负的权重, 从而导致滤波算法不稳定.

2.1 标准正态分布的采样算法

在标准正态分布下, 首先选择样本序列并根据样本序列确定预选样本点; 然后根据标准正态分布的概率密度函数和样本序列确定样本点的权重; 最后确定样本点. 具体的算法如下.

Step 1 选择一个样本序列 $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_l$, 其中 l 为采样层数, 在本文中按照随机变量标准方差的整数倍确定样本序列. 根据样本序列按式(18)确定预选样本点 X_i^j , 有

$$X_i^j = \begin{cases} 0, & i = 0, j = 0; \\ r_j e_i, & i = 1, 2, \dots, n_x, 0 < j \leq l; \\ -r_j e_i, & i = n_x + 1, n_x + 2, \dots, 2n_x, 0 < j \leq l. \end{cases} \quad (18)$$

其中: $e_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$ ($i = 1, 2, \dots, n_x$) 为第 i 个元素是1的列向量, X_i^j 为第 j 层第 i 个样本点.

例如, 在二维标准正态分布, 分3层采样, 即 $l = 3$. 确定样本序列 $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$, 根据样本序列确定预选样本点 X_i^l , 这里仅列出第1象限的预选样本点: $X_0^0 = 0, X_1^1 = r_1 e_1, X_2^1 = r_1 e_2; X_1^2 = r_2 e_1, X_2^2 = r_2 e_2; X_1^3 = r_3 e_1, X_2^3 = r_3 e_2$. 第1象限的预选样本点和相应的权重如图1所示.

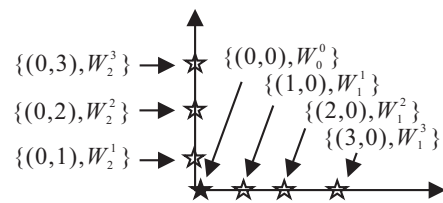


图1 第1象限的预选采样点以及相应的权重

Step 2 根据标准正态分布的概率密度函数和样本序列按下式确定样本点的权重 W_i^j , 有

$$W_i^j = \begin{cases} 1 + \int_{0 < L(x) \leq r_1} \frac{\phi(x)}{2n_x + 1} dx - \int_{0 < L(x) \leq r_l} \phi(x) dx, & i = 0, j = 0; \\ \int_{0 < L(x) \leq r_j} \frac{\phi(x)}{2n_x + 1} dx, & 1 \leq i \leq 2n_x, j = 1; \\ \int_{r_{j-1} < L(x) \leq r_j} \frac{\phi(x)}{2n_x} dx, & 1 \leq i \leq 2n_x, 1 < j \leq l. \end{cases} \quad (19)$$

其中: $\phi(x)$ 为标准正态分布的概率密度函数, $L(x) =$

$(x-\tilde{x})P_x^{-1}(x-\tilde{x})^T$ 为 x 满足的实值函数, \tilde{x} 和 P_x 分别为随机变量 x 的均值和协方差, W_i^j 为第 j 层的第 i 个样本点的权重.

样本点的权重不仅全是正数而且满足归一化. 归一化证明如下:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{2n_x} W_i^j + W_0^0 = \\ & 2n_x \left(\int_{0 < L(x) \leq r_1} \frac{\phi(x)}{2n_x + 1} dx + \right. \\ & \left. \sum_{j=2}^l \int_{r_{j-1} < L(x) \leq r_j} \frac{\phi(x)}{2n_x} dx \right) + \\ & \int_{0 < L(x) \leq r_1} \frac{\phi(x)}{2n_x + 1} dx + 1 - \int_{0 < L(x) \leq r_1} \phi(x) dx = \\ & 1 + \int_{0 < L(x) \leq r_1} \phi(x) dx - \int_{0 < L(x) \leq r_1} \phi(x) dx = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Step 3 根据前面选择的预先样本点 X_i^j 和得到的样本点权重 W_i^j , 确定样本点 ξ_i^j .

① 对每一个预选样本点到均值的距离加一个调节系数 c_j , 得到样本点 $\xi_i^j = c_j X_i^j$, 其中 $0 < j \leq l$. 图 2 为在二维标准正态分布下, 对预选样本点加入调节系数后得到的第 1 象限的样本点.

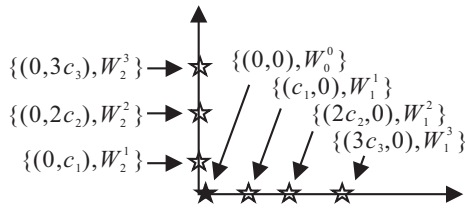


图 2 预选样本点加入调节系数后得到的样本点

② 通过带权样本点匹配随机变量的均值、二阶矩和边缘高阶矩, 得到关于调节系数 c_j 的多元高次方程组为

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{2n_x} W_i^j \xi_i^j + W_0^0 \xi_0^0, \\ P &= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{2n_x} W_i^j (\xi_i^j) (\xi_i^j)^T + W_0^0 (\xi_0^0) (\xi_0^0)^T, \\ m_\beta^\alpha(x) &= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{2n_x} W_i^j (\xi_{i,\beta}^j)^\alpha + W_0^0 (\xi_{0,\beta}^0)^\alpha. \end{aligned} \quad (21)$$

其中: $m_\beta^\alpha(x)$ 为随机变量 x 的第 β 个变量的 α 阶矩, $\xi_{i,\beta}^j$ 为第 j 层的第 i 个样本点的第 β 个元素.

③ 解关于调节系数 c_j 的多元高次方程组 (式 (21)), 得到调节系数, 从而确定样本点 ξ_i^j .

2.2 非标准正态分布的采样算法

首先将标准正态分布下生成的样本点转换到非标准正态分布下的样本点 $\chi_{k,i}^j$; 然后对样本点赋予权重 $w_{k,i}^j$, 并且由带权样本点 $\chi_{k,i}^j$ 匹配随机变量的均

值、二阶矩和高阶矩得到关于权重 $w_{k,i}^j$ 的多元线性方程组; 最后解上一步得到的关于权重的多元线性方程组, 求出权重 $w_{k,i}^j$, 即生成了非标准正态分布的带权样本点 $(\chi_{k,i}^j, w_{k,i}^j)$, 具体步骤如下.

Step 1: 将标准正态分布的样本点 ξ_i^j 加入非标准正态分布的均值 \tilde{x}_k 和协方差信息 P_k , 生成非标准正态分布的样本点 $\chi_{k,i}^j$, 有

$$\chi_{k,i}^j = \tilde{x}_k + \sqrt{P_k} \xi_i^j, \quad (22)$$

其中 $\chi_{k,i}^j$ 代表 k 时刻第 j 层的第 i 个样本点.

Step 2: 在由式 (22) 得到非标准正态分布的样本点后, 使样本点 $\chi_{k,i}^j$ 匹配随机变量的均值、二阶矩和边缘高阶矩, 得到关于权重 $w_{k,i}^j$ 的多元线性方程组为

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{2n_x} w_{k,i}^j + w_{k,0}^0 - 1, \\ \tilde{x}_k &= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{2n_x} w_{k,i}^j \chi_{k,i}^j + w_{k,0}^0 \chi_{k,0}^0, \\ P_k &= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{2n_x} w_{k,i}^j (\chi_{k,i}^j - \tilde{x}_k) (\chi_{k,i}^j - \tilde{x}_k)^T + \\ & w_{k,0}^0 (\chi_{k,0}^0 - \tilde{x}_k) (\chi_{k,0}^0 - \tilde{x}_k)^T, \\ m_\beta^\alpha(x_k) &= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{2n_x} w_{k,i}^j (\chi_{k,i,\beta}^j - \tilde{x}_{k,\beta})^\alpha + \\ & w_{k,0}^0 (\chi_{k,0,\beta}^0 - \tilde{x}_{k,\beta})^\alpha, \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $m_\beta^\alpha(x_k)$ 为随机变量 x_k 的第 β 个变量的 α 阶矩.

Step 3: 解 Step 2 得到的关于权重的多元线性方程组, 求出样本点的权重 $w_{k,i}^j$.

3 基于高斯分布的多层 UKF 算法

采用 UT 变换得到 UKF, 采用容积方法得到 CKF^[6], 本文基于 GMUT 变换将得到基于高斯分布的多层无迹卡尔曼滤波 (GMUKF), GMUKF 算法的具体步骤如下.

Step 1 初始化随机变量 k 时刻的均值 \tilde{x}_k 、协方差矩阵 P_k 和边缘高阶矩 $m_\beta^\alpha(x_k)$.

Step 2 生成服从标准正态分布的带权样本点 (即样本点 ξ_i^j) 和相应的权重 W_i^j .

Step 3 状态一步预测.

Step 3.1: 在已知随机变量 k 时刻的均值 \tilde{x}_k 、协方差矩阵 P_k 和边缘高阶矩 $m_\beta^\alpha(x_k)$ 的条件下, 生成非标准正态下的状态样本点 $\chi_{k,i}^j$ 和相应的权重 $w_{k,i}^j$.

Step 3.2: 状态样本点 $\chi_{k,i}^j$ 经过非线性系统方程转换得到状态样本点 $X_{k+1|k,i}^j$, 有

$$X_{k+1|k,i}^j = f(\chi_{k,i}^j). \quad (24)$$

Step 3.3: 对状态样本点 $X_{k+1|k,i}^j$ 加权处理得到状态一步预测均值 $\tilde{X}_{k+1|k}$ 、协方差矩阵 $P_{k+1|k}$ 和边

缘高阶矩 $m_\beta^\alpha(x_k)$ 分别为

$$\tilde{X}_{k+1|k} = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{2n_x} w_{k,i}^j X_{k+1|k,i}^j + w_{k,0}^0 X_{k+1|k,0}^0, \quad (25)$$

$$P_{k+1|k,x} = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{2n_x} w_{k,i}^j (X_{k+1|k,i}^j - \tilde{X}_{k+1|k}) (X_{k+1|k,i}^j - X_{k+1|k})^T + w_{k,0}^0 (X_{k+1|k,0}^0 - \tilde{X}_{k+1|k}) (X_{k+1|k,0}^0 - \tilde{X}_{k+1|k})^T + R_k, \quad (26)$$

$$m_\beta^\alpha(x_k) = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{2n_x} w_{k,i}^j (X_{k+1|k,i,\beta}^j - \tilde{X}_{k+1|k,\beta})^\alpha + w_{k,0}^0 (X_{k+1|k,0,\beta}^0 - \tilde{X}_{k+1|k,\beta})^\alpha. \quad (27)$$

Step 4 量测一步预测.

Step 4.1: 根据式 (25) ~ (27) 得到的状态一步预测均值、预测协方差矩阵和边缘高阶矩, 求出非标准状态下的量测样本点 $\chi_{k+1,i}^j$ 和相应的权重 $w_{k+1,i}^j$;

Step 4.2: 将 Step 4.1 得到的量测样本点 $\chi_{k+1,i}^j$ 经过量测方程转换得到量测样本点 $Z_{k+1,i}^j$, 有

$$Z_{k+1,i}^j = h(\chi_{k+1,i}^j); \quad (28)$$

Step 4.3: 对量测样本点 $Z_{k+1,i}^j$ 加权处理得到量测一步预测的均值 \tilde{Z}_{k+1} 和一步预测的协方差矩阵 $P_{k+1,z}$, 将样本点 $\chi_{k+1,i}^j$ 与样本点 $Z_{k+1,i}^j$ 加权处理得到一步预测的互协方差矩阵 $P_{k+1,xz}$, 分别为

$$\tilde{Z}_{k+1} = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{2n_x} w_{k+1,i}^j Z_{k+1,i}^j + w_{k+1,0}^0 Z_{k+1,0}^0, \quad (29)$$

$$P_{k+1,z} = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{2n_x} w_{k+1,i}^j (Z_{k+1,i}^j - \tilde{Z}_{k+1}) (Z_{k+1,i}^j - \tilde{Z}_{k+1})^T + w_{k+1,0}^0 (Z_{k+1,0}^0 - \tilde{Z}_{k+1}) (Z_{k+1,0}^0 - \tilde{Z}_{k+1})^T + Q_k, \quad (30)$$

$$P_{k+1,xz} = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{2n_x} w_{k+1,i}^j (\chi_{k+1,i}^j - \tilde{X}_{k+1|k}) (Z_{k+1,i}^j - \tilde{Z}_{k+1})^T + w_{k+1,0}^0 (\chi_{k+1,0}^0 - \tilde{X}_{k+1|k}) (Z_{k+1,0}^0 - \tilde{Z}_{k+1})^T. \quad (31)$$

Step 5 滤波更新. 已知状态一步预测值、量测一步预测值和实际测量值, 根据式 (32) ~ (35) 得到卡尔曼滤波的最优估计值 \tilde{x}_{k+1} 、协方差矩阵 P_{k+1} 和边缘高阶矩 $m_\beta^\alpha(x_{k+1})$.

Step 5.1: 计算 $k+1$ 时刻的卡尔曼滤波增益

$$K_{k+1} = P_{k+1,xz} P_{k+1,z}^{-1}; \quad (32)$$

Step 5.2: 计算 $k+1$ 时刻的最优估计状态

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{X}_{k+1|k} + K_{k+1} (Z_{k+1} - \tilde{Z}_{k+1}); \quad (33)$$

Step 5.3: 计算 $k+1$ 时刻的误差协方差矩阵和高

阶矩分别为

$$P_{k+1} = P_{k+1|k,x} - K_{k+1} P_{k+1,z} K_{k+1}^T, \quad (34)$$

$$m_\beta^\alpha(x_{k+1}) = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{2n_x} w_{k+1,i}^j ((\tilde{X}_{k+1|k} + K_{k+1} (Z_{k+1} - Z_{k+1,i}^j))^\alpha + w_{k+1,0}^0 ((\tilde{X}_{k+1|k} + K_{k+1} (Z_{k+1} - Z_{k+1,0}^0))^\alpha), \quad (35)$$

其中 Z_{k+1} 为测量值.

4 仿真实验

为验证 GMUKF 算法的估计精度和计算效率, 采用经济领域中常用的单变量非平稳静态增长 UNGM 模型^[26]和二维的纯方位追踪 BOTM 模型^[27]对算法进行验证, 并与传统的 UKF 算法和 PUKF 算法进行对比. 仿真过程中使用下式的均方误差 (MSE) 指标和归一化时间指标 T_n 比较滤波器的估计性能:

$$T_n = \frac{t_x}{t_{\text{UKF}}},$$

$$\text{MSE}(x_k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \tilde{x}_i)^2. \quad (36)$$

其中: x_i 为真实值, \tilde{x}_i 为最优估计值, n 为迭代的步数, 本文 t_x 取值为 t_{UKF} 、 t_{PUKF} 、 t_{GMUKF} , 分别代表 UKF、PUKF 和 GMUKF 的运行时间.

4.1 非平稳静态增长模型的实验结果

非平稳静态增长模型是强非线性的离散模型, 模型如下:

$$x_k = 0.5x_{k-1} + 25 \frac{x_{k-1}}{1 + x_{k-1}^2} + 8 \cos(1.2(k-1)) + u_k,$$

$$z_k = \frac{x_k^2}{20} + v_k. \quad (37)$$

其中: $k = 1, 2, \dots, 2000$; 初始均值 $x_0 = 0.2$; 误差协方差 $P_0 = 0.1$; 边缘四阶矩 $m_4^4 = 0.03$; 边缘六阶矩 $m_6^6 = 0.015$; u_k 和 v_k 是相互独立的高斯噪声, 且是均值都为零、协方差为单位矩阵的高斯噪声.

在 PUKF 每次迭代时, 需要花费很多时间求解关于样本点的多元高次方程组, 而 GMUKF 无需解多元高次方程组, 只需花费较少的时间解关于样本点权重的多元线性方程组, 极大地减少了计算时间. 如表 1 所示, 在迭代 $n = 2000$ 次时, GMUKF 的归一化时间指标比 PUKF 降低了 200 多倍. GMUKF 算法分多层选择带权样本点, 这些样本点捕获了随机变量的高阶矩, 从而提高了 GMUKF 算法的估计精度. 如图 3 和图 4 所示, GMUKF 的估计曲线在真实值附近的变动范围较狭窄, 即 GMUKF 的估计值能更好地逼近真实值. UKF 与真实值的变动幅度较大, 且均方误差远远大于 GMUKF, 因此 GMUKF 的估计精度优于 UKF.

表1 3种算法的运行时间比较

	UKF	PUKF	GMUKF
T_n	1	213.04	1.74

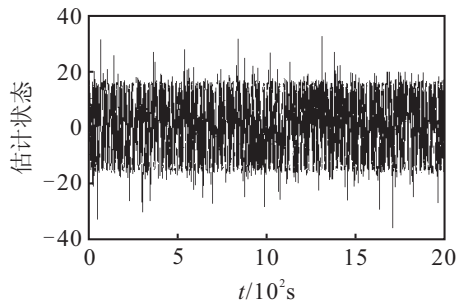


图3 状态估计

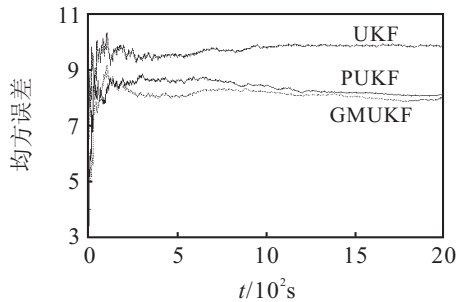


图4 状态的均方误差

4.2 纯方位跟踪模型的实验结果

纯方位目标跟踪的状态方程和观测方程如下:

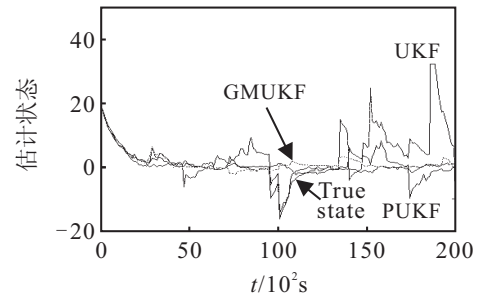
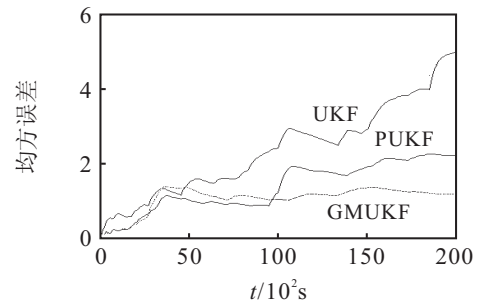
$$x_k = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + u_{k-1},$$

$$z_k = \tan^{-1} \left(\frac{x_{2,k} - \sin(k)}{x_{1,k} - \cos(k)} \right) + v_k. \quad (38)$$

其中: $x_k = [x_{1,k} \ x_{2,k}]^T$, 随机系统噪声 u_{k-1} 服从均值为0、协方差为 Q_{k-1} 的高斯分布, $Q_{k-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.1 \end{bmatrix}$; 随机变量的噪声向量 v_k 服从均值为0、方差为 R_k 的高斯分布, $R_k = 0.1$, 初始状态 $x_0 = [20 \ 5]^T$, 初始协方差矩阵 $P_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$.

可能出现的负权重和随着维数的增加而产生的非局部效应都可能导致UKF滤波的不稳定以及精度的下降. 如图5和图6所示, UKF对状态 x_1 的估计曲线具有较大波动, 并且每当出现大的波动时, UKF对状态 x_1 的均方误差曲线都会随着时间的增加而上升. PUKF采用对概率密度函数积分的方法确定样本点的权重, 从而保证了样本点的权重全是正数, 这种正的权重有助于PUKF算法的稳定性. 如图5和图6所示, PUKF的波动相对较小, 并且均方误差也较小. GMUKF选择的样本点是通过标准正态分布下的样本点转化而来, 而在确定标准正态分布下的样本时利用了PUKF算法, 这也有助于GMUKF算法的稳定性, 如图5所示, GMUKF在真实状态曲线附近相对稳定, 即跟踪效果较好. 在GMUKF中采用了多层采样的方

法增加了采样点的数量, 并且这些采样点捕获了随机变量的高阶矩, 从而提高了GMUKF算法的估计精度, 降低了均方误差, 如图6所示.

图5 状态 x_1 的估计曲线图6 状态 x_1 的均方误差

5 结论

传统的二阶UKF的估计精度低, 高阶的PUKF虽然估计精度高但是计算效率低. 对此, 本文基于高斯分布结合高阶矩匹配与无迹卡尔曼滤波线性扩张方法(LUKF), 提出了一种兼顾效率和精度的高斯滤波离线算法. 该方法有如下特点: 1) 应用PUKF的PUT算法生成标准正态分布的带权样本点; 2) 离线计算标准分布的带权样本点, 使得GMUKF实时计算复杂度等同于LUKF; 3) 采用多层采样的方法, 可以捕获随机变量的任意高阶矩, 使得滤波可达到任意精度; 4) 基于标准正态分布的样本点使用LUKF方法生成非标准正态分布的样本点. 实验结果表明: 在精确度上, GMUKF明显的优于UKF; 在计算效率上, GMUKF远高于PUKF. 但是该方法基于高斯分布这一后验假设, 不适用于任意分布的情形, 下一步将研究如何将该方法延拓到任意后验分布的滤波中.

参考文献(References)

- [1] Jazwinski A H. Stochastic processes and filtering theory[M]. New York: Courier Dover Publications, 2007: 162-193.
- [2] Maybeck P S. Stochastic models, estimation, and control [M]. New York: Academic Press, 1982: 68-266.
- [3] Julier S J, Uhlmann J K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems[C]. Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls. Orlando, 1997: 182-193.

- [4] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. Proc of the IEEE, 2004, 92(3): 401-422.
- [5] Arulampalam M S, Maskell S, Gordon N, et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2002, 50(2): 174-188.
- [6] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254-1269.
- [7] Julier S J, Uhlmann J K. A counter example to the theory of simultaneous localization and map building[C]. Proc 2001 ICRA IEEE Int Conf on Robotics and Automation. Seoul: IEEE, 2001: 4238-4243.
- [8] Lerro D, Bar-Shalom Y. Tracking with debiased consistent conversistent converted measurement versus EKF[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 1993, 29(3): 1015-1022.
- [9] Senne K. Stochastic processes and filtering theory[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1972, 17(5): 752-753.
- [10] 胡士强, 敬忠良. 粒子滤波算法综述[J]. 控制与决策, 2005, 20(4): 361-365.
(Hu S Q, Jing Z L. Overview of particle filter algorithm[J]. Control and Decision, 2005, 20(4): 361-365.)
- [11] Gordon N, Salmond D. Novel approach to non-linear and non-gaussian bayesian state estimation[J]. Proc of Institute Electric Engineering, 1993, 140(2): 107-113.
- [12] Doucet A, Gordon N. Sequential monte carlo methods in practice[M]. New York: Springer, 2001: 295-317.
- [13] 赵琳, 王小旭, 孙明, 等. 基于极大后验估计和指数加权的自适应UKF滤波算法[J]. 自动化学报, 2010, 36(7): 1007-1019.
(Z L, Wang X X, Sun M, et al. Adaptive UKF filtering algorithm based on maximum a posterior estimation and exponential weighting[J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(7): 1007-1019.)
- [14] 王璐, 李光春, 乔相伟, 等. 基于极大似然准则和最大期望算法的自适应UKF算法[J]. 自动化学报, 2012, 38(7): 1200-1210.
(Wang L, Li G C, Qiao X W, et al. An adaptive UKF algorithm based on maximum likelihood principle and expectation maximization algorithm[J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(7): 1200-1210.)
- [15] 石勇, 韩崇昭. 自适应UKF算法在目标跟踪中的应用[J]. 自动化学报, 2011, 37(6): 755-759.
(Shi Y, Han C Z. Adaptive UKF method with applications to Target Tracking[J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37(6): 755-759.)
- [16] 潘泉, 杨峰, 叶亮, 等. 一类非线性滤波器——UKF综述[J]. 控制与决策, 2005, 20(5): 481-489.
(Pan Q, Yang F, Ye L, et al. Survey of a kind of nonlinear filters — UKF[J]. Control and Decision, 2005, 20(5): 481-489.)
- [17] Julier S J, Uhlmann J K. Reduced sigma point filters for the propagation of means and covariances through nonlinear transformations[C]. American Control Conf. Alaska: IEEE, 2002: 887-892.
- [18] Julier S J. The scaled unscented transformation[C]. American Control Conf. Jefferson City: IEEE, 2002: 4555-4559.
- [19] Julier S J, Uhlmann J K. A Consistent debiased method for converting between polar and Cartesian coordinate systems[C]. Int Society for Optics and Photonics. Orlando: SPIE, 1997: 110-121.
- [20] 张勇刚, 黄玉龙, 武哲民, 等. 一种高阶无迹卡尔曼滤波方法[J]. 自动化学报, 2014, 40(5): 838-848.
(Zhang Y G, Huang Y L, Wu Z M, et al. A high order unscented Kalman filtering method[J]. Acta Automatica Sinica, 2014, 40(5): 838-848.)
- [21] Date P, Mamon R, Jalen L. A new moment matching algorithm for sampling from partially specified symmetric distributions[J]. Operations Research Letters, 2008, 36(6): 669-672.
- [22] Tenne D, Singh T. The higher order unscented filter[C]. American Control Conference. Colorado: IEEE, 2003: 2441-2446.
- [23] Wang Y J, Liu J, Yang W Q, et al. A heuristic for sigma set selection of UKF[C]. The 12th IEEE Int Conf on Signal Processing. Hangzhou: IEEE, 2014: 72-77.
- [24] Liu J, Wang Y J, Zhang J. A linear extension of UKF to higher-order moment-matching[C]. Conf on Decision and Control. Los Angeles: IEEE, 2014: 5021-5026.
- [25] Julier S J. The spherical simplex unscented transformation[C]. American Control Conference. Denver: IEEE, 2003: 2430-2434.
- [26] Hu D, Wu M, Hu X. Unscented Kalman filtering for additive noise case: Augmented versus nonaugmented[J]. IEEE on Signal Processing Letters, 2005, 12(5): 4051-4055.
- [27] Dunik J, Simandl M, Straka O. Unscented Kalman filter: Aspects and adaptive setting of scaling parameter[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2012, 57(11): 2411-2416.

(责任编辑: 郑晓蕾)