第 31 卷 第 4 期
Vol. 31 No. 4

控 制 与 决 策
Control and Decision

2016 年 4 月
Apr. 2016

文章编号: 1001-0920 (2016) 04-0640-07 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2015.0040

犹豫模糊语言的可能度排序方法

冯向前, 谭倩云, 钱 钢

(南京师范大学 计算机科学与技术学院，南京 210023)

摘 要: 研究犹豫模糊语言集可能度排序方法. 在给出犹豫模糊语言集排序可能度公理的基础上, 给出 3 类犹豫模糊语言集可能度排序公式: 第 1 类基于 RL 的 5 个等价犹豫模糊语言可能度排序公式; 第 2 类基于 WNS 的 5 个等价犹豫模糊语言可能度排序公式; 第 3 类基于概率可信度的犹豫模糊语言可能度比较公式. 通过实例对 3 类公式进行对比分析, 给出方法选择的建议, 第 3 类方法可以区别差别较小的犹豫模糊语言数, 第 1 类方法适于大规模计算中的应用.

关键词: 犹豫模糊语言；可能度；排序

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Possibility degree methods for ranking hesitant fuzzy linguistic sets

FENG Xiang-qian, *TAN Qian-yun*, *QIAN Gang*

(School of Computer Science & Technology，Nanjing Normal University，Nanjing 210023，China．Correspondent: FENG Xiang-qian，E-mail：feng_xq@njnu.edu.cn)

Abstract: Possibility degree methods for ranking hesitant fuzzy linguistic sets(HFLTSs) are studied. Three kinds of possibility degree formulas are proposed based on presenting possibility degree axiom. The five mutual equivalent formulas of the first kind are based on the idea of the interval comparison method. Another five mutual equivalent formulas are proposed based on the first kind of formulas, and the third kind of possibility degree formulas with respect to HFLTSs is proposed by probability criterion of uniform distribution. Finally, an example is given to explain the rationality and feasibility of the new formulas. The results show that the third kind of formula can deal with ranking problems resulting from slight difference of HFLTS, and the first kind of formula is simple to calculate and suitable for large-scale computation.

Keywords: hesitant fuzzy linguistic term sets；possibility degree；ranking

0 引 言

在多属性决策问题中, 存在许多定性性质的属性, 更适合用语言的形式进行评价. 例如, 评价一台或多台电脑的质量, 通常用“很好”或者“一般”等语言评价. 但是, 在实际生活中, 决策者往往很难用单一的语言术语集来评价一个语言变量. 为了解决该问题, Rodríguez 等[1]在犹豫模糊集的基础上引入了犹豫模糊语言术语集这一概念, 通过犹豫模糊语言术语集模型, 决策者可以用更加灵活的语言表达评价某个语言变量. 近期, 关于犹豫模糊语言术语集的相关理论和应用研究取得了一些进展, Rodríguez 等[2]提出了犹豫模糊语言群决策模型, 可以用更加灵活丰富且贴近人类认知的表达方式体现决策者的偏好. Wang 等[3]综合犹豫模糊语言和 ELECTRE I 方法, 提出了一种级别高于关系的方法解决多属性决策问题. Liu 等[4]利用模糊关系公式构建了犹豫模糊语言的包络并结合 TOPSIS 模型解决多属性决策问题. Zhu 等[5]用犹豫模糊语言的偏好关系作为收集和表示决策者偏好的工具, 并对犹豫模糊语言的偏好关系进行了一致性检验. Liu 等[6]通过对语言变量的比较讨论了犹豫模糊偏好关系的强一致性问题. Beg 等[7]提出了一种 TOPSIS 模糊方法整合决策者的意见, 并用犹豫模糊语言进行表示. 王坚强等[15]定义了新的犹豫模糊语言集, 构建了基于优序关系的犹豫模糊语言多准则决策方法. Liao 等[8]定义了犹豫模糊语言的距离测度和相似度测度并将它们应用于多属性决策问题. Lee 等[9-10]提出了一种基于可能性为基础的犹豫模糊语言的对比关系. Wei 等[11]构建了可能度公式来比较犹豫模糊语言, 并定义了两个集结算子解决多属性决策问题.

收稿日期: 2015-01-09；**修回日期:** 2015-06-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71371107)；江苏省高校哲学社科项目(2013SJD630039).

作者简介: 冯向前(1977−), 男, 副教授, 从事决策理论与方法的研究；钱钢(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策分析与优化、信息化战略规划与项目管理等研究.

犹豫模糊语言排序是犹豫模糊语言多属性决策的核心内容之一, 目前有关犹豫模糊语言排序方法分为两类: 一类给出两个犹豫模糊语言的绝对大小关系, 如文献 [16-17] 分别构建不同的犹豫模糊语言的均值和方差函数, 给出两个犹豫模糊语言的确定排序方法, 但两个犹豫模糊语言的大小关系绝对化不能很好地反映变量取值的不确定性; 另一类给出一个犹豫模糊语言优于另一个犹豫模糊语言的程度, 如文献 [1, 9] 利用犹豫模糊语言的包络比较两个犹豫模糊语言, 但在特殊情况下其结果不太合理, 文献 [11] 分不同情况构建了两个犹豫模糊语言可能度公式, 但计算比较复杂. 本文在此基础上深入研究基于度的犹豫模糊语言排序方法.

1 基础知识

定义 1 设 $S=\{s_i|i=0,1,\cdots,2\tau\}$ 是由奇数个语言术语组成的集合, $2\tau+1$为语言术语集的粒度, 若满足以下特征:

1) 逆运算: $s_i=\mathrm{neg}(s_j)\Leftrightarrow I(s_i)+I(s_j)=2\tau$;

2) 有序性: $s_i\leqslant s_j\Leftrightarrow I(s_i)\leqslant I(s_j)$;

3) 最大值: $\max(s_i,s_j)=s_i$, 当 $s_i\geqslant s_j$;

4) 最小值: $\min(s_i,s_j)=s_i$, 当 $s_i\leqslant s_j$.

则称 s 为语言术语集[1], 其中 $I(s_i)=i$, 术语的个数称为该语言术语集的粒度.

例如, 粒度为 7 的语言术语集可定义为

$$S=\{s_0:\text{nothing},\ s_1:\text{very low},\ s_2:\text{low},\ s_3:\text{medium},\ s_4:\text{high},\ s_5:\text{very high},\ s_6:\text{perfect}\}.$$

为了避免语言信息运算过程中信息损失的问题, Xu[14]将离散的术语集 S 拓展到连续的语言术语集 $\bar{S}=\{s_i|I(s_i)=i\in[0,l]\}$, $l>2\tau$.

定义 2 设 $S=\{s_i|i=0,1,\cdots,2\tau\}$ 为一语言术语集, s_i、s_j 是 S 上的任意两个语言术语, 二元关系[1] p 定义为

$$p(s_i,s_j)=\begin{cases}1,\ s_i>s_j;\\0,\ s_i\leqslant s_j.\end{cases}$$

定义 3 设 $S=\{s_i|i=0,1,\cdots,2\tau\}$ 为一语言术语集, 若 H_S 是 S 中有限个有序连续语言术语的集合, 则称 H_S 为 S 上的一个犹豫模糊语言术语集[11].

定义 4 设 $S=\{s_i|i=0,1,2,\cdots,2\tau\}$ 为一语言术语集, H_S、H_S^1、H_S^2 是 S 上 3 个犹豫模糊语言术语集, 则定义[1,11]:

1) 交集: $H_S^1\bigcap H_S^2=\{s_i|s_i\in H_S^1 \text{ and } s_i\in H_S^2\}$;

2) 并集: $H_S^1\bigcup H_S^2=\{s_i|s_i\in H_S^1 \text{ or } s_i\in H_S^2\}$;

3) 补集: $\overline{H}_S=S-H_S=\{s_i\in S \text{ and } s_i\notin H_S\}$;

4) 上界: $H_S^+=\max\{s_i|s_i\in H_S\}$;

5) 下界: $H_S^-=\min\{s_i|s_i\in H_S\}$;

6) 包络: $\mathrm{env}(H_S)=[H_s^-,H_s^+]$;

7) $\lambda H_S=\{s_{\lambda i}|s_i\in H_S\}$.

定义 5 设 $S=\{s_i|i=0,1,\cdots,2\tau\}$ 为一语言术语集, H_S 是 S 上一个犹豫模糊语言术语集, 定义 H_S 的得分函数为 $s(H_S)=\dfrac{1}{\#H_S}\sum\limits_{s_i\in H_S}s_i$, 其中 $\#H_S=H_S^+-H_S^-+1$ 表示语言术语集 H_S 的元素个数[13].

2 可能度公理

设 $S=\{s_0,s_1,\cdots,s_{2\tau}\}$ 为一语言术语集, H_S^1 和 H_S^2 是 S 上的两个犹豫模糊语言术语集, Rodríguez 等[1]采用区间数的比较理论比较犹豫模糊语言术语集, 有

$$p_R(H_S^1\geqslant H_S^2)=\frac{\max(0,I(H_S^{1+})-I(H_S^{2-}))-\max(0,I(H_S^{1-})-I(H_S^{2+}))}{(I(H_S^{1+})-I(H_S^{1-}))+(I(H_S^{2+})-I(H_S^{2-}))}.$$

Lee 等[9]也给出了犹豫模糊语言术语集的可能度比较方法, 即

$$p_L(H_S^1\geqslant H_S^2)=\max\left\{1-\max\left(\frac{I(H_S^{2+})-I(H_S^{1-})}{I(H_S^{2+})-I(H_S^{2-})+I(H_S^{1+})-I(H_S^{1-})},0\right),0\right\}.$$

事实上, 设 $H_S^1=\{s_3,s_4,s_5\}$, $H_S^2=\{s_5,s_6\}$, 则 $p_R(H_S^1\geqslant H_S^2)=p_L(H_S^1\geqslant H_S^2)=0$, 即 H_S^2 绝对优于 H_S^1, 显然与大家的认识是相矛盾的, 表明完全套用区间数比较理论不太合理. 事实上, 可以证明 $p_R(H_S^1\geqslant H_S^2)=p_L(H_S^1\geqslant H_S^2)$, 而且, 当两个犹豫模糊语言集退化为只有一个元素时, 两个公式的分母为0, 显然是不合理的. 为此, 文献 [11] 提出了两个改进公式, 但是公式比较复杂, 本文后面将对其作进一步改进. 下面首先类似于区间数比较的可能度公理给出犹豫模糊语言数比较的可能度公理.

公理 1 (规范性) $0\leqslant p(H_S^1\geqslant H_S^2)\leqslant 1$.

公理 2 (直观性) 如果 $H_S^{1-}>H_S^{2+}$, 则 $p(H_S^1\geqslant H_S^2)=1$; 如果 $H_S^{1+}<H_S^{2-}$, 则 $p(H_S^1\geqslant H_S^2)=0$.

公理 3 (互补性) $p(H_S^1\geqslant H_S^2)+p(H_S^2\geqslant H_S^1)=1$.

公理 4 (自反性) 如果 $H_S^1=H_S^2$, 则 $p(H_S^1\geqslant H_S^2)=p(H_S^2\geqslant H_S^1)=0.5$.

公理 5 (传递性) 如果 $p(H_S^1\geqslant H_S^2)\geqslant 0.5$, $p(H_S^2\geqslant H_S^3)\geqslant 0.5$, 则 $p(H_S^1\geqslant H_S^3)\geqslant 0.5$.

公理 6 (优超性) 如果 $p(H_S^1\geqslant H_S^2)=1$, 则 $p(H_S^1\geqslant H_S^3)\geqslant p(H_S^2\geqslant H_S^3)$.

定义 6 设 $S=\{s_0,s_1,\cdots,s_{2\tau}\}$ 为一个语言术语集, H_S^1 和 H_S^2 是 S 上的两个犹豫模糊语言术语集.

如果 $p(H_S^1 \geqslant H_S^2) = 1$, 则称犹豫模糊数 H_S^1 绝对优于 H_S^2, 记为 $H_S^1 \succ_s H_S^2$; 如果 $0.5 < p(H_S^1 \geqslant H_S^2) < 1$, 则称犹豫模糊数 H_S^1 优于 H_S^2, 记为 $H_S^1 \succ H_S^2$; 如果 $p(H_S^1 \geqslant H_S^2) = 0.5$, 则称犹豫模糊数 H_S^1 等价于 H_S^2, 记为 $H_S^1 \sim H_S^2$; 如果 $0 < p(H_S^1 \geqslant H_S^2) < 0.5$, 则称犹豫模糊数 H_S^1 劣于 H_S^2, 记为 $H_S^1 \prec H_S^2$; 如果 $p(H_S^1 \geqslant H_S^2) = 0$, 则称犹豫模糊数 H_S^1 绝对劣于 H_S^2, 记为 $H_S^1 \prec_s H_S^2$.

3 可能度排序公式

3.1 基于RL的可能度公式

文献 [1, 18] 利用区间数比较理论给出的犹豫模糊语言术语数比较公式虽然有不合理的地方, 但是提供了很好的思路, 下面给出合理的可能度公式.

定义7 设 $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_{2\tau}\}$ 为一个语言术语集, H_S^1 和 H_S^2 是 S 上的两个犹豫模糊语言术语集, 定义 $H_S^1 \geqslant H_S^2$ 的可能度 $p_i(H_S^1 \geqslant H_S^2)(i = 1, 2, \cdots, 5)$ 为

$$p_1(H_S^1 \geqslant H_S^2) = \frac{\max(0, I(H_S^{1+}) - I(H_S^{2-}) + 1)}{\#H_S^1 + \#H_S^2} - \frac{\max(0, I(H_S^{1-}) - I(H_S^{2+}) - 1)}{\#H_S^1 + \#H_S^2}. \tag{1}$$

$$p_2(H_S^1 \geqslant H_S^2) = \min\left\{\max\left(\frac{I(H_S^{1+}) - I(H_S^{2-}) + 1}{\#H_S^1 + \#H_S^2}, 0\right), 1\right\}. \tag{2}$$

$$p_3(H_S^1 \geqslant H_S^2) = \frac{\max(0, \#H_S^1 + \#H_S^2 - \max(0, I(H_S^{2+}) - I(H_S^{1-}) + 1))}{\#H_S^1 + \#H_S^2}. \tag{3}$$

$$p_4(H_S^1 \geqslant H_S^2) = \begin{cases} 1, \ I(H_S^{2+}) < I(H_S^{1-}); \\ \dfrac{I(H_S^{1+}) - I(H_S^{2-}) + 1}{\#H_S^1 + \#H_S^2}, \\ \quad I(H_S^{2-}) \leqslant I(H_S^{1+}),\ I(H_S^{1-}) \leqslant I(H_S^{2+}); \\ 0, \ I(H_S^{2-}) > I(H_S^{1+}). \end{cases} \tag{4}$$

$$p_5(H_S^1 \geqslant H_S^2) = \max\left\{1 - \max\left(\frac{I(H_S^{2+}) - I(H_S^{1-}) + 1}{\#H_S^1 + \#H_S^2}, 0\right), 0\right\}. \tag{5}$$

定理1 犹豫模糊语言数比较公式 (1) ∼ (5) 相互等价.

证明 设 $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_{2\tau}\}$ 为一个语言术语集, H_S^1 和 H_S^2 是 S 上的两个犹豫模糊语言术语集, H_S^1 和 H_S^2 的位置关系可分为如下 6 种类型:

1) $H_S^{1+} < H_S^{2-}$;

2) $H_S^{1-} \leqslant H_S^{2-} \leqslant H_S^{1+} \leqslant H_S^{2+}$;

3) $H_S^{2-} < H_S^{1-} \leqslant H_S^{1+} < H_S^{2+}$;

4) $H_S^{1-} < H_S^{2-} \leqslant H_S^{2+} < H_S^{1+}$;

5) $H_S^{2-} \leqslant H_S^{1-} \leqslant H_S^{2+} \leqslant H_S^{1+}$;

6) $H_S^{2+} < H_S^{1-}$.

对于类型 1), 有

$$I(H_S^{1+}) - I(H_S^{2-}) + 1 \leqslant 0,$$
$$\#H_S^1 + \#H_S^2 \leqslant I(H_S^{2+}) - I(H_S^{1-}) + 1.$$

在式 (1) 中, 有

$$I(H_S^{1-}) - I(H_S^{2+}) - 1 < 0,$$

从而有

$$\frac{\max(0, I(H_S^{1+}) - I(H_S^{2-}) + 1)}{\#H_S^1 + \#H_S^2} - \frac{\max(0, I(H_S^{1-}) - I(H_S^{2+}) + 1)}{\#H_S^1 + \#H_S^2} = 0,$$

即 $p_1(H_S^1 \geqslant H_S^2) = 0$.

在式 (2) 中, 有

$$\max\left(\frac{I(H_S^{1+}) - I(H_S^{2-}) + 1}{\#H_S^1 + \#H_S^2}, 0\right) = 0,$$

从而有

$$p_2(H_S^1 \geqslant H_S^2) = \min\left\{\max\left(\frac{I(H_S^{1+}) - I(H_S^{2-}) + 1}{\#H_S^1 + \#H_S^2}, 0\right), 1\right\} = 0.$$

在式 (3) 中, 有

$$\max(0, I(H_S^{2+}) - I(H_S^{1-}) + 1) = I(H_S^{2+}) - I(H_S^{1-}) + 1,$$
$$\#H_S^1 + \#H_S^2 - (I(H_S^{2+}) - I(H_S^{1-}) + 1) \leqslant 0,$$

从而有

$$p_3(H_S^1 \geqslant H_S^2) = \frac{\max(0, \#H_S^1 + \#H_S^2 - \max(0, I(H_S^{2+}) - I(H_S^{1-}) + 1))}{\#H_S^1 + \#H_S^2} = 0.$$

在式 (4) 中, $p_4(H_S^1 \geqslant H_S^2) = 0$.

在式 (5) 中, 有

$$\frac{I(H_S^{2+}) - I(H_S^{1-}) + 1}{\#H_S^1 + \#H_S^2} \geqslant 1,$$

从而有

$$p_5(H_S^1 \geqslant H_S^2) = \max\left\{1 - \max\left(\frac{I(H_S^{2+}) - I(H_S^{1-}) + 1}{\#H_S^1 + \#H_S^2}, 0\right), 0\right\} = 0.$$

综上, 对于类型 1), 有

$$p_1(H_S^1 \geqslant H_S^2) = p_2(H_S^1 \geqslant H_S^2) = p_3(H_S^1 \geqslant H_S^2) = p_4(H_S^1 \geqslant H_S^2) = p_5(H_S^1 \geqslant H_S^2) = 0,$$

即式 (1) ∼ (5) 等价.

对于类型 2), 有

$$\#H_S^1+\#H_S^2 \geqslant I(H_S^{2+})-I(H_S^{1-})+1 \geqslant$$
$$I(H_S^{1+})-I(H_S^{2-})+1>0,$$
$$I(H_S^{1-})-I(H_S^{2+})-1 \leqslant 0,$$

所以有

$$p_1(H_S^1 \geqslant H_S^2)=$$
$$\frac{I(H_S^{1+})-I(H_S^{2-})+1}{\#H_S^1+\#H_S^2}=p_4(H_S^1 \geqslant H_S^2),$$
$$p_2(H_S^1 \geqslant H_S^2)=\min\left\{\frac{I(H_S^{1+})-I(H_S^{2-})+1}{\#H_S^1+\#H_S^2},1\right\}=$$
$$\frac{I(H_S^{1+})-I(H_S^{2-})+1}{\#H_S^1+\#H_S^2}=p_4(H_S^1 \geqslant H_S^2),$$
$$p_3(H_S^1 \geqslant H_S^2)=$$
$$\frac{\max(0,\#H_S^1+\#H_S^2-(I(H_S^{2+})-I(H_S^{1-})+1))}{\#H_S^1+\#H_S^2}=$$
$$\frac{\#H_S^1+\#H_S^2-(I(H_S^{2+})-I(H_S^{1-})+1)}{\#H_S^1+\#H_S^2}=$$
$$\frac{I(H_S^{1+})-I(H_S^{2-})+1}{\#H_S^1+\#H_S^2}=p_4(H_S^1 \geqslant H_S^2),$$
$$p_5(H_S^1 \geqslant H_S^2)=$$
$$\max\left\{1-\frac{I(H_S^{2+})-I(H_S^{1-})+1}{\#H_S^1+\#H_S^2},0\right\}=$$
$$\frac{I(H_S^{1+})-I(H_S^{2-})+1}{\#H_S^1+\#H_S^2}=p_4(H_S^1 \geqslant H_S^2).$$

综上, 对于类型 2), 有

$$p_1(H_S^1 \geqslant H_S^2)=p_2(H_S^1 \geqslant H_S^2)=p_3(H_S^1 \geqslant H_S^2)=$$
$$p_4(H_S^1 \geqslant H_S^2)=p_5(H_S^1 \geqslant H_S^2),$$

即式 (1) ∼ (5) 等价.

对于类型 3), 有

$$\#H_S^1+\#H_S^2 \geqslant I(H_S^{2+})-I(H_S^{1-})+1>0,$$
$$\#H_S^1+\#H_S^2 \geqslant I(H_S^{1+})-I(H_S^{2-})+1>0,$$

所以有

$$p_1(H_S^1 \geqslant H_S^2)=p_2(H_S^1 \geqslant H_S^2)=$$
$$p_3(H_S^1 \geqslant H_S^2)=p_4(H_S^1 \geqslant H_S^2)=$$
$$p_5(H_S^1 \geqslant H_S^2)=\frac{I(H_S^{1+})-I(H_S^{2-})+1}{\#H_S^1+\#H_S^2},$$

即对于类型 3), 式 (1) ∼ (5) 相互等价.

对于类型 4) ∼ 6), 同理可证明式 (1) ∼ (5) 对于任意两个犹豫模糊语言集可能度的计算都相等. □

容易证明定义 7 的 5 个等价可能度公式满足公理 1 ∼ 公理 4, 下面证明其也满足公理 5 和公理 6.

性质 1 (传递性)　如果 $p_i(H_S^1 \geqslant H_S^2) \geqslant 0.5$, $p_i(H_S^2 \geqslant H_S^3) \geqslant 0.5$, 则 $p_i(H_S^1 \geqslant H_S^3) \geqslant 0.5$, $i=1,2,3,4,5$.

证明　因为 $p_i(H_S^1 \geqslant H_S^2)(i=1,2,\cdots,5)$ 是等价的, 所以只需要证明 $p_4(H_S^1 \geqslant H_S^2)$ 满足传递性. 根据式 (4), $p_4(H_S^1 \geqslant H_S^2) \geqslant 0.5$, 当且仅当

$$I(H_S^{1-})>I(H_S^{2+}) \text{ 或 } \frac{I(H_S^{1+})-I(H_S^{2-})+1}{\#H_S^1+\#H_S^2} \geqslant 0.5,$$
$$(I(H_S^{2-}) \leqslant I(H_S^{1+}) \text{ 且 } I(H_S^{1-}) \leqslant I(H_S^{2+});$$

当且仅当

$$I(H_S^{1-})>I(H_S^{2+}) \text{ 或 } I(H_S^{1+})+I(H_S^{1-}) \geqslant$$
$$I(H_S^{2+})+I(H_S^{2-}),$$
$$I(H_S^{2-}) \leqslant I(H_S^{1+}) \text{ 且 } I(H_S^{1-}) \leqslant I(H_S^{2+});$$

当且仅当

$$I(H_S^{1+})+I(H_S^{1-}) \geqslant I(H_S^{2+})+I(H_S^{2-}).$$

由于 $p(H_S^1 \geqslant H_S^2) \geqslant 0.5$, 且 $p(H_S^2 \geqslant H_S^3) \geqslant 0.5$, 则有

$$I(H_S^{1+})+I(H_S^{1-}) \geqslant I(H_S^{2+})+I(H_S^{2-}),$$
$$I(H_S^{2+})+I(H_S^{2-}) \geqslant I(H_S^{3+})+I(H_S^{3-}),$$

即

$$I(H_S^{1+})+I(H_S^{1-}) \geqslant I(H_S^{3+})+I(H_S^{3-}).$$

因此 $p_4(H_S^1 \geqslant H_S^3) \geqslant 0.5$. □

性质 2 (优超性)　如果 $p_i(H_S^1 \geqslant H_S^2)=1$, 则 $p_i(H_S^1 \geqslant H_S^3) \geqslant p_i(H_S^2 \geqslant H_S^3)$, $i=1,2,3,4,5$.

证明　由于 $p_i(H_S^1 \geqslant H_S^2)(i=1,2,\cdots,5)$ 是等价的, 只需要证明 $p_4(H_S^1 \geqslant H_S^2)$ 满足优超性. 对于任意的 H_S^1、H_S^2 和 H_S^3, 其区间位置关系可分为如下 3 种类型:

1) $H_S^{3-}>H_S^{2+}$. 如果 $H_S^{3-}>H_S^{2+}$, 则 $p_4(H_S^2 \geqslant H_S^3)=0 \leqslant p_4(H_S^1 \geqslant H_S^3)$.

2) $H_S^{3+}<H_S^{1-}$. 如果 $H_S^{3+}<H_S^{1-}$, 则 $p_4(H_S^1 \geqslant H_S^3)=1 \geqslant p_4(H_S^2 \geqslant H_S^3)$.

3) $H_S^{3-} \leqslant H_S^{2+}$ 且 $H_S^{3+} \geqslant H_S^{1-}$. 如果 $p_4(H_S^1 \geqslant H_S^2)=1$, 则 $H_S^{2+} \leqslant H_S^{1-}$. 由 $H_S^{3-} \leqslant H_S^{2+}$ 得 $H_S^{3-} \leqslant H_S^{1+}$ 且 $H_S^{2-} \leqslant H_S^{3+}$. 根据式 (4) 得到

$$p_4(H_S^1 \geqslant H_S^3)=$$
$$\frac{I(H_S^{1+})-I(H_S^{3-})+1}{(I(H_S^{1+})-I(H_S^{1-})+1)+(I(H_S^{3+})-I(H_S^{3-})+1)}=$$
$$\frac{(I(H_S^{1+})-I(H_S^{1-})+1)+(I(H_S^{1-})-I(H_S^{2+})-1)}{(I(H_S^{1+})-I(H_S^{1-})+1)+(I(H_S^{3+})-I(H_S^{3-})+1)}+$$
$$\frac{(I(H_S^{2+})-I(H_S^{3-})+1)}{(I(H_S^{1+})-I(H_S^{1-})+1)+(I(H_S^{3+})-I(H_S^{3-})+1)}>$$
$$\frac{(I(H_S^{1-})-I(H_S^{2+})-1)+(I(H_S^{2+})-I(H_S^{3-})+1)}{(I(H_S^{3+})-I(H_S^{3-})+1)} \geqslant$$
$$\frac{I(H_S^{2+})-I(H_S^{3-})+1}{I(H_S^{3+})-I(H_S^{3-})+1}p_4(H_S^2 \geqslant H_S^3)=$$
$$\frac{I(H_S^{2+})-I(H_S^{3-})+1}{(I(H_S^{2+})-I(H_S^{2-})+1)+(I(H_S^{3+})-I(H_S^{3-})+1)}<$$

$$\frac{I(H_S^{2+})-I(H_S^{3-})+1}{(I(H_S^{3+})-I(H_S^{3-})+1)},$$

所以 $p_4(H_S^1 \geqslant H_S^3) \geqslant p_4(H_S^2 \geqslant H_S^3)$. □

3.2 基于WNS的可能度公式

文献[11]构造了 $H_S^1 \geqslant H_S^2$ 的可能度公式如下:

$$p_w(H_S^1 \geqslant H_S^2)=\begin{cases} 0,\ H_S^{1+}<H_S^{2-};\\ \dfrac{0.5(I(H_S^{1+})-I(H_S^{2-})+1)}{I(H_S^{2+})-I(H_S^{1-})+1},\\ \quad H_S^{1-}\leqslant H_S^{2-}\leqslant H_S^{1+}\leqslant H_S^{2+};\\ \dfrac{I(H_S^{1-})-I(H_S^{2-})+0.5(I(H_S^{1+})-I(H_S^{1-})+1)}{I(H_S^{2+})-I(H_S^{2-})+1},\\ \quad H_S^{2-}<H_S^{1-}\leqslant H_S^{1+}<H_S^{2+};\\ \dfrac{0.5(I(H_S^{2+})-I(H_S^{2-})+1)+(I(H_S^{1+})-I(H_S^{2+}))}{I(H_S^{1+})-I(H_S^{1-})+1},\\ \quad H_S^{1-}<H_S^{2-}\leqslant H_S^{2+}<H_S^{1+};\\ \dfrac{0.5(I(H_S^{2+})-I(H_S^{1-})+1)+(I(H_S^{1+})-I(H_S^{2+}))}{I(H_S^{1+})-I(H_S^{2-})+1}+\\ \dfrac{(I(H_S^{1-})-I(H_S^{2-}))}{I(H_S^{1+})-I(H_S^{2-})+1},\ H_S^{2-}\leqslant H_S^{1-}\leqslant H_S^{2+}\leqslant H_S^{1+};\\ 1,\ H_S^{2+}<H_S^{1-}. \end{cases} \tag{6}$$

可以看出, 式(6)较为复杂, 下面给出5个与之等价的简洁方法 $p_{wi}(H_S^1 \geqslant H_S^2)(i=1,2,\cdots,5)$ 为

$$p_{w1}(H_S^1 \geqslant H_S^2)=\frac{\max(0, I(H_S^{1+})-I(H_S^{2-})+1)}{\#H_S^1+\#H_S^2}-\frac{\max(0, I(H_S^{1-})-I(H_S^{2+})-1)}{\#H_S^1+\#H_S^2}. \tag{7}$$

$$p_{w2}(H_S^1 \geqslant H_S^2)=\min\Big\{\max\Big(\frac{I(H_S^{1+})-I(H_S^{2-})+1}{\#(H_S^1\bigcup H_S^2)}-\frac{0.5\#(H_S^1\bigcap H_S^2)}{\#(H_S^1\bigcup H_S^2)},0\Big),1\Big\}. \tag{8}$$

$$p_{w3}(H_S^1 \geqslant H_S^2)=\frac{\max(0,\#(H_S^1\bigcup H_S^2)-\max(0,I(H_S^{2+})-I(H_S^{1-})+1))}{\#(H_S^1\bigcup H_S^2)}. \tag{9}$$

$$p_{w4}(H_S^1 \geqslant H_S^2)=\begin{cases} 0,\ H_S^{1+}<H_S^{2-};\\ \dfrac{I(H_S^{1+})-I(H_S^{2-})+1-0.5\#(H_S^1\bigcap H_S^2)}{\#(H_S^1\bigcup H_S^2)},\\ \quad H_S^{2-}\leqslant H_S^{1+},\ H_S^{1-}<H_S^{2+};\\ 1,\ H_S^{2+}<H_S^{1-}. \end{cases} \tag{10}$$

$$p_{w5}(H_S^1 \geqslant H_S^2)=\max\Big\{1-\max\Big(\frac{I(H_S^{2+})-I(H_S^{1-})+1}{\#(H_S^1\bigcup H_S^2)}+\frac{0.5\#(H_S^1\bigcap H_S^2)}{\#(H_S^1\bigcup H_S^2)},0\Big),0\Big\}. \tag{11}$$

类似于定理1, 可以证明公式(7)～(11)相互等价.

3.3 基于概率可信度的可能度公式

在 $H_S^1=\{s_i|s_i\in H_S^1\}$ 和 $H_S^2=\{s_j|s_j\in H_S^2\}$ 中, s_i 和 s_j 的取值分别服从均匀分布, 且其取值是相互独立的, 因此可以将犹豫模糊语言数 H_S^1 和 H_S^2 的可能度关系问题转化为从犹豫模糊语言数 H_S^1 和 H_S^2 内随机取值 s_i 和 s_j, 求 s_i 大于 s_j 的概率, 即 $p(s_i>s_j)$, 得到如下的犹豫模糊语言可能度公式:

$$p_T(H_S^1 \geqslant H_S^2)=\frac{0.5\#(H_S^1\bigcap H_S^2)+\sum\limits_{s_i\in H_S^1,s_j\in H_S^2}p(s_i,s_j)}{\#H_S^1\#H_S^2}. \tag{12}$$

下面证明 $p_T(H_S^1 \geqslant H_S^2)$ 等价于文献[11]给出的可能度公式 $p_F(H_S^1 \geqslant H_S^2)$:

$$p_F(H_S^1 \geqslant H_S^2)=\begin{cases} 0,\ H_S^{1+}<H_S^{2-};\\ \dfrac{0.5(I(H_S^{1+})-I(H_S^{2-})+1)^2}{\#H_S^1\#H_S^2},\\ \quad H_S^{1-}\leqslant H_S^{2-}\leqslant H_S^{1+}\leqslant H_S^{2+};\\ \dfrac{I(H_S^{1-})-I(H_S^{2-})+0.5\#H_S^1}{\#H_S^2},\\ \quad H_S^{2-}<H_S^{1-}\leqslant H_S^{1+}<H_S^{2+};\\ \dfrac{0.5(I(H_S^{2+})-I(H_S^{2-})+1)+(I(H_S^{1+})-I(H_S^{2+}))}{\#H_S^1},\\ \quad H_S^{1-}<H_S^{2-}\leqslant H_S^{2+}<H_S^{1+};\\ \dfrac{0.5(I(H_S^{2+})-I(H_S^{1-})+1)}{\#H_S^1\#H_S^2}+\dfrac{I(H_S^{1+})-I(H_S^{2+})}{\#H_S^1}+\\ \dfrac{(I(H_S^{1-})-I(H_S^{2-}))(I(H_S^{2+})-I(H_S^{1-})+1)}{\#H_S^1\#H_S^2},\\ \quad H_S^{2-}\leqslant H_S^{1-}\leqslant H_S^{2+}\leqslant H_S^{1+};\\ 1,\ H_S^{2+}<H_S^{1-}. \end{cases} \tag{13}$$

设 S 为一个语言术语集, H_S^1 和 H_S^2 是 S 上的两个犹豫模糊语言术语集, H_S^1 和 H_S^2 的位置关系可分为如下6种类型:

1) $H_S^{1+}<H_S^{2-}$;

2) $H_S^{1-}\leqslant H_S^{2-}\leqslant H_S^{1+}\leqslant H_S^{2+}$;

3) $H_S^{2-}<H_S^{1-}\leqslant H_S^{1+}<H_S^{2+}$;

4) $H_S^{1-}<H_S^{2-}\leqslant H_S^{2+}<H_S^{1+}$;

5) $H_S^{2-} \leqslant H_S^{1-} \leqslant H_S^{2+} \leqslant H_S^{1+}$;

6) $H_S^{2+} < H_S^{1-}$.

对于类型 1), $H_S^1 \bigcap H_S^2 = \varnothing$, $s_i < s_j$ (对于$\forall s_i \in H_S^1$, $s_j \in H_S^2$), 所以 $p_T(H_S^1 \geqslant H_S^2) = 0$.

对于类型 2), 有

$$\sum_{s_i \in H_S^1, s_j \in H_S^2} p(s_i, s_j) = 0.5(\#(H_S^1 \bigcap H_S^2))^2 - 0.5\#(H_S^1 \bigcap H_S^2),$$

所以

$$p_T(H_S^1 \geqslant H_S^2) = \frac{0.5(\#(H_S^1 \bigcap H_S^2))^2}{\#H_S^1 \#H_S^2} = \frac{0.5(I(H_S^{1+}) - I(H_S^{2-}) + 1)^2}{\#H_S^1 \#H_S^2} = p_F(H_S^1 \geqslant H_S^2).$$

对于类型 3), 有

$$\sum_{s_i \in H_S^1, s_j \in H_S^2} p(s_i, s_j) = (H_S^{1-} - H_S^{2-})\#H_S^1 + 0.5(\#(H_S^1)^2 - \#H_S^1),$$

所以

$$p_T(H_S^1 \geqslant H_S^2) = \frac{(H_S^{1-} - H_S^{2-})\#H_S^1 + 0.5\#(H_S^1)^2}{\#H_S^1 \#H_S^2} = \frac{I(H_S^{1-}) - I(H_S^{2-}) + 0.5\#H_S^1}{\#H_S^2} = p_F(H_S^1 \geqslant H_S^2).$$

对于类型 4) ∼ 6), 同理可以证明 $p_T(H_S^1 \geqslant H_S^2) = p_F(H_S^1 \geqslant H_S^2)$.

本文提出的公式显然比文献 [11] 提出的公式更方便使用, 另外可以证明本文所提出的犹豫模糊语言数可能度排序公式均满足犹豫模糊语言排序的可能度公理.

4 实例分析

例 1 设 $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_6\}$, $H_S^1 = \{s_2, s_3, s_4\}$, $H_S^2 = \{s_3, s_4, s_5\}$, $H_S^3 = \{s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$, $H_S^4 = \{s_4, s_5\}$, 利用本文所提出方法可以得出如下的结论:

$$p_i(H_S^1 \geqslant H_S^2) = \frac{I(H_S^{1+}) - I(H_S^{2-}) + 1}{\#H_S^1 + \#H_S^2} = \frac{1}{3},$$

$$|p_i(H_S^1 \geqslant H_S^2) - p_i(H_S^2 \geqslant H_S^1)| = \frac{1}{3},$$

$$p_{wi}(H_S^1 \geqslant H_S^2) = \frac{I(H_S^{1+}) - I(H_S^{2-}) + 1 - 0.5\#(H_S^1 \bigcap H_S^2)}{\#(H_S^1 \bigcup H_S^2)} = \frac{1}{4},$$

$$|p_{wi}(H_S^1 \geqslant H_S^2) - p_{wi}(H_S^2 \geqslant H_S^1)| = \frac{1}{2},$$

$$p_T(H_S^1 \geqslant H_S^2) = \frac{0.5\#(H_S^1 \bigcap H_S^2) + \sum\limits_{s_i \in H_S^1, s_j \in H_S^2} p(s_i, s_j)}{\#H_S^1 \#H_S^2} = \frac{2}{9},$$

$$|p_T(H_S^1 \geqslant H_S^2) - p_T(H_S^2 \geqslant H_S^1)| = \frac{5}{9},$$

$$p_i(H_S^3 \geqslant H_S^4) = \frac{I(H_S^{3+}) - I(H_S^{4-}) + 1}{\#H_S^3 + \#H_S^4} = \frac{3}{7},$$

$$|p_i(H_S^3 \geqslant H_S^4) - p_i(H_S^4 \geqslant H_S^3)| = \frac{1}{7},$$

$$p_{wi}(H_S^3 \geqslant H_S^4) = \frac{I(H_S^{3+}) - I(H_S^{4-}) + 1 - 0.5\#(H_S^3 \bigcap H_S^4)}{\#(H_S^3 \bigcup H_S^4)} = \frac{2}{5},$$

$$|p_{wi}(H_S^3 \geqslant H_S^4) - p_{wi}(H_S^4 \geqslant H_S^3)| = \frac{1}{5},$$

$$p_T(H_S^3 \geqslant H_S^4) = \frac{0.5\#(H_S^3 \cap H_S^4) + \sum\limits_{s_i \in H_S^3, s_j \in H_S^4} p(s_i, s_j)}{\#H_S^3 \#H_S^4} = \frac{2}{5},$$

$$|p_T(H_S^3 \geqslant H_S^4) - p_T(H_S^4 \geqslant H_S^3)| = \frac{1}{5}.$$

由算例的结果可以看出, 第 1 类基于 RL 的可能度公式的表达式较为简单, 但两个犹豫模糊语言数的可能度差值较小, 第 3 类基于概率可信度的可能度公式表达式较复杂, 但两个犹豫模糊语言数的可能度差值较大. 因此, 对于差别较小的犹豫模糊语言数宜采用第 3 类公式, 便于排序; 对于大数量的犹豫模糊语言数进行排序宜采用第 1 类公式, 便于计算.

例 2 设

$$S = \{s_0: \text{nothing}, s_1; \text{very low}, s_2: \text{low}, s_3: \text{medium}, s_4: \text{high}, s_5: \text{very high}, s_6: \text{perfect}\},$$

$$H_S^1 = \{s_3, s_4, s_5\},\ H_S^2 = \{s_4, s_5, s_6\},\ H_S^3 = \{s_5\},\ H_S^4 = \{s_1, s_2, s_3\},\ H_S^5 = \{s_3, s_4\},$$

对其进行排序[11].

利用式 (1) ∼ (5) 对 5 个犹豫模糊语言数进行两两比较, 得到可能度矩阵 $P = (p_{ij})_{5\times 5}$ 为

$$P = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.8333 & 0.6000 \\ 0.6667 & 0.5000 & 0.5000 & 1.0000 & 0.8000 \\ 0.7500 & 0.5000 & 0.5000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.1667 & 0.0000 & 0.0000 & 0.5000 & 0.2000 \\ 0.4000 & 0.2000 & 0.0000 & 0.8000 & 0.5000 \end{bmatrix}.$$

构造有向图 $D = (V(D), A(D), \phi_D)$[18]. 其中: $V(D) = \{1, 2, \cdots, 5\}$ 为 D 的顶点集, $A(D)$ 为有弧构成的集合 (对于 $\forall i \neq j$, 若 $p_{ij} \geqslant 0.5$, 则有弧 $\widehat{p_{ij}}$); ϕ_D 为关联函数, 使得 D 的每条弧对应于 D 的有序顶点对 (i, j). 寻找 D 中弧数为 4 且没有循环圈的有向路, 进而得出带有可能度的优序关系为 $H_S^3 \overset{50\%}{\succ} H_S^2 \overset{66.7\%}{\succ} H_S^1 \overset{60.0\%}{\succ} H_S^5 \overset{80.0\%}{\succ} H_S^4$.

同理, 利用式 (7) ∼ (11) 或 (12) 得到可能度优序

关系分别为 $H_S^3 \overset{50\%}{\succ} H_S^2 \overset{75\%}{\succ} H_S^1 \overset{66.7\%}{\succ} H_S^5 \overset{87.5\%}{\succ} H_S^4$ 和 $H_S^3 \overset{50\%}{\succ} H_S^2 \overset{77.8\%}{\succ} H_S^1 \overset{66.7\%}{\succ} H_S^5 \overset{91.7\%}{\succ} H_S^4$. 采用3类不同的可能度公式所得到的排序相同, 但是可能度不同, 采用第1类公式区分度较小, 第3类公式区分度最大.

5 结 论

犹豫模糊语言比较是犹豫模糊语言研究的重要内容, 也是犹豫模糊语言多属性决策的核心内容之一. 本文给出了犹豫模糊语言比较的可能度公理, 在此基础上提出了3类可能度排序公式: 第1类基于区间数可能度比较方法的思想, 提出5个犹豫模糊语言数可能度排序公式; 第2类结合第1类的思想和文献[11]提出的公式提出了5个等价的公式; 第3类基于均匀分布概率准则提出了一个可能度公式. 实际应用中可以根据具体情况合理选择, 以同时满足精度和速度的要求.

参考文献(References)

[1] Rodríguez Rosa M, Martínez Luis, Herrera Francisco, et al. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2012, 20(1): 109-119.

[2] Rodríguez Rosa M, Martínez Luis, Herrera Francisco, et al. A group decision making model dealing with comparative expressions based on hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. Information Sciences, 2013, 241(8): 28-42.

[3] Wang Jianqiang, Wang Jing, Chen Qinghui, et al. An outranking approach for multi-criteria decision-making with hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. Information Sciences, 2014, 280(10): 338-351.

[4] Liu Hongbin, Rodríguez Rosa M. A fuzzy envelope for hesitant fuzzy linguistic term set and its application to multi-criteria decision making[J]. Information Sciences, 2014, 258(2): 220-238.

[5] Zhu Bin, Xu Zeshui. Consistency measures of hesitant fuzzy linguistic preference relations[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2014, 22(1): 34-35.

[6] Liu Hongbin, Cai Jianfeng, Jiang Le. On improving the additive consistency of the fuzzy preference relation based on comparative Linguistic expressions[J]. Int J of Intelligent Systems, 2014, 29(6): 544-559.

[7] Beg Ismat, Tabasam Rashid. TOPSIS for hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2013, 28(12): 1162-1171.

[8] Liao Huchang, Xu Zeshui, Zeng Xiaojun. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy linguistic term sets and their application in multi-criteria decision making[J]. Information Sciences, 2014, 271(7): 125-142.

[9] Lee Liwei, Chen Shyiming. Fuzzy decision making based on likelihood-based comparison relations of hesitant fuzzy linguistic term sets and hesitant fuzzy linguistic operators[J]. Information Sciences, 2015, 294(2): 513-529.

[10] Lee Liwei, Chen Shyiming. Fuzzy decision making based on hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. Intelligent Information and Database Systems. Berlin: Springer-Heidelberg, 2013, 7802: 21-30.

[11] Wei Cuiping, Zhao Na, Tang Xijin. Operators and comparisons of hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2014, 22(3): 575-585.

[12] Wang Jianqiang, Wang Jing, Chen Qinghui, et al. An outranking approach for multi-criteria decision-making with hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. Information Sciences, 2014, 280(10): 338-351.

[13] Zhang Zhiming, Wu Chong. Hesitant fuzzy linguistic aggregation operators and their applications to multiple attribute group decision making[J]. J of Intelligent & Fuzzy Systems, 2014, 26(5): 2185-2202.

[14] Xu Zeshui. Deviation measures of linguistic preference relations in group decision making[J]. Omega, 2005, 33(3): 249-254.

[15] 王坚强, 吴佳亭. 基于优序关系的犹豫模糊语言多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(5): 887-891.
(Wang J Q, Wu J T. Method for multi-criteria decision-making with hesitant linguistic based on outranking relation[J]. Control and Decision, 2015, 30(5): 887-891.)

[16] Liao Huchang, Xu Zeshui, Zeng Xiaojun. Hesitant fuzzy linguistic VIKOR method and its application in qualitative multiple criteria decision making[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2015, 23(5): 1343-1355.

[17] Wu Zhibin, Xu Jiuping. Possibility distribution-based approach for MAGDM with hesitant fuzzy linguistic information[Z]. IEEE Trans on Cybernetics, 2015: 10.1109/TCYB.2015.2413894.

[18] 冯向前, 魏翠萍. 区间数互补判断矩阵一致性及其权重算法研究[J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(19): 87-93.
(Feng X Q, Wei C P. On consistency and priority method of interval complementary judgment matrix[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2007, 37(19): 87-93.)

(责任编辑：郑晓蕾)