第 31 卷 第 4 期
Vol. 31 No. 4

控 制 与 决 策
Control and Decision

2016 年 4 月
Apr. 2016

文章编号: 1001-0920 (2016) 04-0673-05 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2015.0107

基于模糊熵和证据推理的语言 D 数多准则决策方法

王坚强, 黄思旷

(中南大学 商学院，长沙 410083)

摘 要: 定义了语言 D 数及其模糊熵, 提出了基于模糊熵和证据推理的多准则决策方法, 以解决准则权系数信息不完全确定的语言 D 数多准则决策问题. 所提方法通过建立基于语言 D 数模糊熵的线性规划模型来得到准则的最优权系数, 利用证据推理算法确定方案的综合准则值, 进而得出最优方案. 最后通过实例验证了所提出方法的有效性和可行性.

关键词: 多准则决策；语言 D 数；模糊熵；证据推理

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Multi-criteria decision-making method based on fuzzy entropy and evidential reasoning with linguistic D numbers

WANG Jian-qiang, *HUANG Si-kuang*

(School Business of Central，South University，Changsha 410083，China．Correspondent：WANG Jian-qiang，E-mail: jqwangcsu@126.com)

Abstract: Linguistic D numbers, as well as fuzzy entropy for linguistic D numbers are defined. For the multi-criteria decision-making problems that the criteria values are linguistic D numbers with incomplete certain information on weights of criteria, a method based on fuzzy entropy and evidential reasoning is proposed. In this method, the criteria weights are attained by constructing a linear programming model based on the linguistic D numbers fuzzy entropy, and the evidential reasoning approach is used to reach the comprehensive criteria values, and the most desirable alternatives are obtained. Analysis of an example demonstrates the feasibility and effectiveness of the method.

Keywords: multi-criteria decision-making；linguistic D numbers；fuzzy entropy；evidential reasoning

0 引 言

Dempster-Shafer 证据理论是表达不确定信息的常用方法, 最初由Dempster[1]提出. 其后, Shafer[2]对其进行了更深入的研究. 由于其在不确定表达和推理中考虑了未知的信任分配等优势, 其理论不断完善, 在多准则决策中的应用也得到了相应的发展, 如 Yang 等[3]提出了基于证据推理的递归算法, 解决了权系数确定而准则值不完全的多准则决策问题; Hua等[4]提出了 DS-AHP 方法, 以解决不完全信息情况下的多准则决策问题. 然而, 证据理论也有一些固有的缺点, 如识别框架必须为互不相容的基本命题 (假定) 组成的完备集合, 且其基本概率分配 (BPA) 需满足完整性约束, 即 BPA 的所有元素之和必须等于 1, 这些假设条件在某些实际情况中难以满足. 为此, Deng[5]提出了 D 数的概念, 以克服其不足. 目前, 已有一些 D 数的相关研究. 文献 [5] 给出了 D 数的定义及其加法运算和比较方法; 文献 [6] 定义了 D 数偏好关系, 并针对供应商选择问题提出了基于 D 数的 AHP 方法; 文献 [7] 提出了基于 D 数的 VIKOR 方法, 以解决药品供应商的选择问题; 文献 [8] 定义了 D 数模糊一致偏好关系, 并应用到多准则决策问题中.

模糊熵是刻画模糊集不确定程度的测度, 其相关研究成果层出不穷. Zadeh[9]首先定义了模糊熵, 并由 Burillo 等[10]引入模糊集理论中; 之后, Szmidt 等[11]定义了直觉模糊熵, 刻画直觉模糊集的模糊程度; Xu 等[12]定义了犹豫模糊熵, 刻画犹豫模糊集的模糊程度. 但是, 模糊熵并未扩展到 D 数中.

相对于其他模糊决策而言, 语言决策有着不可比

收稿日期: 2015-01-25；**修回日期:** 2015-05-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71271218)；湖南省自然科学基金项目(14JJ2009).

作者简介: 王坚强(1963−), 男, 教授, 博士, 从事决策理论与应用、风险管理与控制、物流管理、信息管理等研究；黄思旷(1989−), 女, 硕士生, 从事决策理论与应用、信息管理的研究.

拟的优势, 用语言短语作为评估变量能够直接有效地表达不确定信息, 更接近实际, 所以基于语言评价集的多准则决策方法一直备受关注[13]. Delgado 等[14]对语义标度的集结算子进行了研究; Herrera 等[15]提出了基于语言信息集结的二元语义分析方法; 王坚强[16]建立了基于证据推理和二元语义的群体语言决策模型. 然而, 语言评价暗含了各语言值的信任度为1, 不能刻画决策者的犹豫程度. 因此, 本文在 D 数和语言评价集的基础上定义了语言 D 数和语言 D 数的模糊熵, 并针对准则权系数信息不完全确定的语言 D 数多准则决策问题, 提出了基于模糊熵和证据推理的多准则决策方法.

1 语言 D 数及其相关定义

设 $H=\{H_1,H_2,\cdots,H_t,\cdots,H_{2t-1}\}$ 为一组自然语言评价集, 具有以下性质[13]:

1) 有序性. 若 $i>j$, 则 $H_i>H_j$.

2) 可逆性. 存在一个逆算子, 若 $i+j=2t$, 则 $H_i=\mathrm{neg}(H_j)$.

为了避免信息丢失, 在原有标度 H 的基础上定义拓展标度 $\overline{H}=\{H_\alpha|\alpha\in[0,q],q\geqslant 2t-1\}$, 拓展后的标度仍满足以上性质.

D 数是 D-S 证据理论的一种扩展, 不同于 D-S 证据理论, D 数假设空间的基本命题可以相容, 且可以处理信息不完整的情况, 其定义如下.

定义 1[5] 设 $\varOmega$ 为一个有限非空集, D 数定义为 $D:\varOmega\to[0,1]$, 满足 $\displaystyle\sum_{B\subseteq\varOmega}D(B)\leqslant 1$, 且 $D(\varnothing)=0$. 其中: $\varnothing$ 为空集, B 为 $\varOmega$ 的一个子集.

语言 D 数综合考虑语言决策和 D 数在不确定决策中的优点, 既能用语言评价值表示模糊的概念, 又可以表达出多个不同的评价值以及对每个评价值的信任程度. 语言 D 数及其相关定义如下.

定义 2 设 $\widetilde{H}$ 为一个有限非空语言集, 语言 D 数定义为 $\mathrm{LD}:\widetilde{H}\to[0,1]$, 满足 $\displaystyle\sum_{h\subseteq\widetilde{H}}\mathrm{LD}(h)\leqslant 1$, 且 $\mathrm{LD}(\varnothing)=0$. 其中: $\varnothing$ 为空集, h 为 H 的一个子集.

语言 D 数是 D 数的一种特殊表达方式.

设 $\widetilde{H}=\{h_1,h_2,\cdots,h_i,\cdots,h_n\}$ 为一个语言集, 且 $h_i\in\overline{H}$, 语言 D 数可以表示为 $\mathrm{LD}(\{h_i\})=\upsilon_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 简记为

$$\mathrm{LD}=\{(h_1,\upsilon_1),\cdots,(h_i,\upsilon_i),\cdots,(h_n,\upsilon_n)\},$$

其中 υ_i 表示指定到语言评价等级 h_i 的信任度, 且满足 $\upsilon_i>0$, $\displaystyle\sum_{i=1}^n\upsilon_i\leqslant 1$. 若 $\displaystyle\sum_{i=1}^n\upsilon_i=1$, 则表明语言 D 数表达的信息是完整的; 若 $\displaystyle\sum_{i=1}^n\upsilon_i<1$, 则表明语言 D 数表达的信息是不完整的. 当 $n=1$, $\upsilon_1=1$ 时, 语言 D 数退化为语言值.

例 1 设由一个 10 人组成的专家小组对某一产品质量进行评估, 语言评估标度为 $H=\{H_1,H_2,H_3\}=\{$差, 一般, 好$\}$.

1) 若 1 人认为差, 6 人认为一般, 3 人认为好, 则可用语言 D 数表示为 $\mathrm{LD}=\{(H_1,0.1),(H_2,0.6),(H_3,0.3)\}$, 其表达的信息是完整的.

2) 若 6 人认为一般, 3 人认为好, 还有 1 人未给出任何评价, 则可用语言 D 数表示为 $\mathrm{LD}=\{(H_2,0.6),(H_3,0.3)\}$, 其表达的信息是不完整的.

2 语言 D 数的合成

在证据推理过程中, 决策者将获得的各种有用信息看成一种证据, 即评价结果是被信任的证据. 对于语言 D 数 $\mathrm{LD}=\{(h_1,\upsilon_1),\cdots,(h_i,\upsilon_i),\cdots,(h_n,\upsilon_n)\}$, $\mathrm{LD}(\{h_i\})$ 表示证据支持语言等级 h_i 的程度, 即对 h_i 的信任值. 为了方便, 用 m_i 表示 $\widetilde{H}=\{h_1,h_2,\cdots,h_i,\cdots,h_n\}$ 的信任函数. 决策过程中, 常需要将不同的证据进行合成.

定义 3 设 $\mathrm{LD}_1=\{(h_1^1,\upsilon_1^1),\cdots,(h_{n_1}^1,\upsilon_{n_1}^1)\}$ 和 $\mathrm{LD}_2=\{(h_1^2,\upsilon_1^2),\cdots,(h_{n_2}^2,\upsilon_{n_2}^2)\}$ 为两个语言 D 数, $m_i^1=\mathrm{LD}_1(\{h_i^1\})\,(i\in\{1,2,\cdots,n_1\})$ 和 $m_j^2=\mathrm{LD}_2(\{h_j^2\})\,(j\in\{1,2,\cdots,n_2\})$ 分别为语言 D 数 LD_1 和 LD_2 的信任函数. m_i^1 和 m_j^2 的合成记为 $m(h)=m_i^1\oplus m_j^2$, 它表示 $\mathrm{LD}=\mathrm{LD}_1\oplus\mathrm{LD}_2$ 的信任函数, 则

$$m(h)=\frac{\displaystyle\sum_{h_i^1\bigcap h_j^2=h}m_i^1m_j^2}{1-\displaystyle\sum_{h_i^1\bigcap h_j^2=\varnothing}m_i^1m_j^2},\tag{1}$$

其中 $h\neq\varnothing$, $h=h_i^1\oplus h_j^2$.

3 语言 D 数的模糊熵

语言 D 数的模糊熵是用以描述语言评价值的模糊性和信息量的测度, 下文讨论中, $\mathrm{LD}=\{(h_1,\upsilon_1),\cdots,(h_n,\upsilon_n)\}$ 表示语言 D 数, $\upsilon_c=1-\displaystyle\sum_{i=1}^n\upsilon_i$ 表示不确定指数, $E_n=\dfrac{1}{2(n-1)}\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|\upsilon_i-\upsilon_j|$. 语言 D 数的模糊熵有如下约束条件:

1) 当语言 D 数退化为传统语言评价值, 即 $n=1$, $\upsilon_1=1$ 时, 其模糊熵取最小值 0.

2) 对于语言 D 数 LD, 当 $E_n=0$ 且 $n\neq 1$ 时, 指定到各语言评价等级的信任度相等, 即支持各语言评价等级的证据一样多; 而对于不确定指数 υ_c, 无法判断它的指定情况, 此时其模糊熵取最大值 1.

3) E_n 的减函数, 其中 $n\neq 1$. 对于语言 D 数 LD,

n 值越大, 支持各语言评价等级的证据越分散; υ_i 之间的偏差越小, 支持各语言评价等级的证据越相近. 此两种情况均使得语言 D 数的模糊性增加, 从而其模糊熵也就越大, 反之则越小.

4) υ_c 的增函数. υ_c 减小, 表示对支持各语言评价等级的证据增多, 从而语言 D 数的模糊熵相应减小, 反之则增大.

根据以上约束条件, 可定义语言 D 数的模糊熵.

定义 4　设 $\mathrm{LD}_k=\{(h_1^k,\upsilon_1^k),\cdots,(h_{n_k}^k,\upsilon_{n_k}^k)\}\,(k=1,2,\cdots,m)$ 为一组语言 D 数, 则语言 D 数集 $\overline{\mathrm{LD}}=\{\mathrm{LD}_1,\mathrm{LD}_2,\cdots,\mathrm{LD}_m\}$ 的模糊熵为

$$F(\overline{\mathrm{LD}})=\begin{cases}\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4(1+\upsilon_c^k)}\right),\ n_k=1;\\ \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4(1+\upsilon_c^k)}\times\right.\\ \left.\dfrac{1}{2(n_k-1)}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}|\upsilon_i^k-\upsilon_j^k|\right),\ n_k>1.\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\upsilon_c^k=1-\displaystyle\sum_{i=1}^{n_k}\upsilon_i^k,\ k=1,2,\cdots,m$. 当 $m=1$ 时, 即为语言 D 数的模糊熵.

定义 5　设 $\mathrm{LD}_k=\{(h_1^k,\upsilon_1^k),\cdots,(h_{n_k}^k,\upsilon_{n_k}^k)\}\,(k=1,2,\cdots,m)$ 为一组语言 D 数, $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$ 为与之对应的权向量, 则语言 D 数集 $\overline{\mathrm{LD}}=\{\mathrm{LD}_1,\mathrm{LD}_2,\cdots,\mathrm{LD}_m\}$ 的加权模糊熵为

$$F(\overline{\mathrm{LD}})=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\omega_k\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4(1+\upsilon_c^k)}\right),\ n_k=1;\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\omega_k\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4(1+\upsilon_c^k)}\times\right.\\ \left.\dfrac{1}{2(n_k-1)}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}|\upsilon_i^k-\upsilon_j^k|\right),\ n_k>1.\end{cases}\tag{3}$$

其中 $\upsilon_c^k=1-\displaystyle\sum_{i=1}^{n_k}\upsilon_i^k,\ k=1,2,\cdots,m.$

4　基于语言 D 数的模糊熵和证据推理的多准则决策方法

假设在一个多准则决策问题中, 有 n 个方案 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$, m 个决策准则 $C=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$, 准则权向量为 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$. 其中: $\omega_k\geqslant 0\,(k=1,2,\cdots,m)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\omega_k=1$, 且 $(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)\in\delta$, δ 表示权向量 ω 的不完全确定的信息集[16]. 决策者以语言 D 数的形式给出方案的决策值, 其决策矩阵为 $\mathrm{LD}=(\mathrm{LD}_{ik})_{n\times m}$, 其中 $\mathrm{LD}_{ik}=\{(h_{i1}^k,\upsilon_{i1}^k),\cdots,(h_{in_k}^k,\upsilon_{in_k}^k)\}$, υ_{ij}^k 表示决策者对语言评价等级 h_{ij}^k 的信任度, 所有方案在各准则下的评价标度为 $H=\{H_1,H_2,\cdots,H_{2t-1}\}$, 试确定最佳方案.

上述决策问题的最佳方案确定的步骤如下.

Step 1　规范化决策信息.

对于准则值 LD_{ik}, h_{ij}^k 为其评价元素. 若准则为效益型, 则无需对评价元素 h_{ij}^k 进行规范化处理; 若准则为成本型, 则用下式对 h_{ij}^k 进行规范化:

$$\widetilde{h}_{ij}^k=\mathrm{neg}(h_{ij}^k)=H_{2t-1}-h_{ij}^k.$$

为了方便, 将规范化处理后的决策矩阵仍记为 $\mathrm{LD}=(\mathrm{LD}_{ik})_{n\times m}$.

Step 2　建立规划模型, 求解准则权重.

m 个准则 C_k 下, 所有方案 A_i 的准则值均可组成一个语言 D 数集合. 由定义 5 可知, 方案 A_i 对应语言 D 数集合的加权模糊熵为 $F(A_i)=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\omega_kF(\mathrm{LD}_{ik})$. 而保守的决策者期望模糊熵取最小值, 因为方案的模糊熵越小表示其包含信息量越多, 信息模糊性越小, 由此可建立如下规划模型:

$$\begin{aligned}&\min F(A)=\sum_{k=1}^{m}\omega_kF(\mathrm{LD}_{ik});\\&\text{s.t. }(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)\in\delta,\\&\sum_{k=1}^{m}\omega_k=1,\ \omega_k\geqslant 0.\end{aligned}\tag{4}$$

在决策过程中, 所有候选方案均处于同一竞争水平, 且其模糊熵是由同一组准则权系数综合而来, 由此需综合所有候选方案的模糊熵, 进而可建立如下线性规划模型:

$$\begin{aligned}&\min F(A_i)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\omega_kF(\mathrm{LD}_{ik});\\&\text{s.t. }(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)\in\delta,\\&\sum_{k=1}^{m}\omega_k=1,\ \omega_k\geqslant 0.\end{aligned}\tag{5}$$

求解线性规划模型 (5), 得到权系数的最优解为 $\omega^*=(\omega_1^*,\omega_2^*,\cdots,\omega_m^*)$.

Step 3　集成方案的准则值.

设准则值中没有指定到任何一个语言评价等级的信任度所在的语言评价等级为 H^*, 基于语言 D 数的证据推理算法的过程如下[3] .

用 m_{ij}^k 和 $m_{iH^*}^k$ 表示 A_i 在 C_k 下的信任函数, 则

$$m_{ij}^k=\omega_k^*\upsilon_{ij}^k,$$

$$m_{iH^*}^k=1-\sum_{j=1}^{n_k}m_{ij}^k=1-\sum_{j=1}^{n_k}\omega_k^*\upsilon_{ij}^k.$$

用 $m_{ij_{(H_p)}}^{K(k+1)}$ 和 $m_{iH^*}^{K(k+1)}$ 表示语言评价等级 $H_p\,(p=1,2,\cdots,2t-1)$ 和 H^* 的前 k 个准则与第 $k+1$ 个准则的集成值, 其中 $j_{(H_p)}$ 表示 H_p 的对应序列, 则对于每一个语言评价等级 H_p 有

$$m_{ij_{(H_p)}}^{K(k+1)} = Z_i^{K(k+1)}[m_{ij_{(H_p)}}^{K(k)} m_{ij_{(H_p)}}^{k+1} + m_{iH^*}^{K(k)} m_{ij_{(H_p)}}^{k+1} + m_{ij_{(H_p)}}^{K(k)} m_{iH^*}^{k+1}].$$

对于语言评价等级 H^* 有

$$m_{iH^*}^{K(k+1)} = Z_i^{K(k+1)} m_{iH^*}^{K(k)} m_{iH^*}^{k+1}.$$

其初始值为

$$m_{ij_{(H_p)}}^{K(1)} = m_{ij_{(H_p)}}^{1},\ m_{iH^*}^{K(1)} = m_{iH^*}^{1},$$

且

$$Z_i^{K(k+1)} = \Big[1 - \sum_{x=1}^{2t+1} \sum_{\substack{y=1\\ y\neq x}}^{2t+1} m_{ij_{(H_x)}}^{K(k)} m_{ij_{(H_y)}}^{k+1}\Big]^{-1}.$$

由上述递归算法可得 A_i 在 H_p 下的信任度为

$$v_{ij_{(H_p)}} = \frac{1 - v_{iH^*}}{1 - m_{iH^*}^{K(m)}} m_{ij_{(H_p)}}^{K(m)}. \tag{6}$$

其中 $v_{iH^*} = \sum\limits_{k=1}^{m} \omega_k^* \Big(1 - \sum\limits_{p=1}^{2t+1} v_{ij_{(H_p)}}^{k}\Big)$ 为不完整信息下的准则值所产生的信任度.

Step 4 集成方案的效用值.

设语言评价等级 H_p 的效用值为 $U(H_p)$, 则方案 A_i 的最大效用值为

$$U_{\max}(A_i) = \sum_{p=1}^{2t} v_{ij_{(H_p)}} U(H_p) + (v_{ij_{(H_{2t+1})}} + v_{iH^*}) U(H_{2t+1}). \tag{7}$$

方案 A_i 的最小效用值为

$$U_{\min}(A_i) = \sum_{p=2}^{2t+1} v_{ij_{(H_p)}} U(H_p) + (v_{ij_{(H_1)}} + v_{iH^*}) U(H_1). \tag{8}$$

方案 A_i 的平均效用值为

$$U_{\text{avg}}(A_i) = \frac{U_{\max}(A_i) + U_{\min}(A_i)}{2}. \tag{9}$$

Step 5 方案排序.

根据各方案的平均效用值 $U_{\text{avg}}(A_i)$ 进行排序, 效用值越大, 方案越优, 由此得出最佳方案.

5 应用分析

一家投资公司从5家公司 A_1, A_2, A_3, A_4 和 A_5 中选择投资对象, 主要考虑4个准则: 应对潜在风险能力 C_1、近3年成长能力 C_2、未来持续盈利能力 C_3、经营环境 C_4. 决策者给出不完全确定的准则权系数信息为 $0.12 \leqslant \omega_1 \leqslant 0.20$, $0.12 \leqslant \omega_2 \leqslant 0.40$, $0.08 \leqslant \omega_3 \leqslant 0.25$, $0.10 \leqslant \omega_4 \leqslant 0.23$. 语言评价标度为 $H = \{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7\}$ = {极差,很差, 差, 一般, 好, 很好, 极好}. 每个评价等级的效用值为 $U(H_1) = 0.05, U(H_2) = 0.13, U(H_3) = 0.25, U(H_4) = 0.40, U(H_5) = 0.57, U(H_6) = 0.77, U(H_7) = 1.00$. 决策者以语言 D 数的形式给出决策信息, 如表1所示.

表 1 方案的准则值

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$\{(H_4,0.2),(H_5,0.7)\}$	$\{(H_2,0.2),(H_3,0.5),(H_4,0.2)\}$	$\{(H_4,0.4),(H_5,0.4),(H_6,0.2)\}$	$\{(H_4,0.5),(H_6,0.5)\}$
A_2	$\{(H_5,0.5),(H_6,0.5)\}$	$\{(H_3,0.2),(H_4,0.3),(H_5,0.4)\}$	$\{(H_3,0.6),(H_4,0.4)\}$	$\{(H_3,0.2),(H_4,0.3),(H_5,0.5)\}$
A_3	$\{(H_4,0.3),(H_5,0.5),(H_6,0.1)\}$	$\{(H_4,0.3),(H_5,0.7)\}$	$\{(H_3,0.3),(H_4,0.5),(H_5,0.2)\}$	$\{(H_3,0.3),(H_4,0.6)\}$
A_4	$\{(H_3,0.3),(H_4,0.4),(H_5,0.3)\}$	$\{(H_3,0.4),(H_4,0.6)\}$	$\{(H_4,0.5),(H_5,0.4)\}$	$\{(H_3,0.3),(H_4,0.5),(H_5,0.2)\}$
A_5	$\{(H_4,0.8),(H_5,0.2)\}$	$\{(H_4,0.5),(H_5,0.4)\}$	$\{(H_2,0.3),(H_3,0.4),(H_4,0.3)\}$	$\{(H_3,0.3),(H_4,0.5),(H_5,0.2)\}$

最佳投资公司的确定过程如下.

Step 1 规范化决策信息.

准则均为效益型, 因此无需规范化处理.

Step 2 建立规划模型, 求解准则权重.

利用式(2)计算准则值的模糊熵, 如表2所示.

表 2 方案准则值的模糊熵

	$F(\text{LD})_{i1}$	$F(\text{LD})_{i2}$	$F(\text{LD})_{i3}$	$F(\text{LD})_{i4}$
A_1	0.457	0.643	0.727	1
A_2	1	0.749	0.727	0.613
A_3	0.546	0.510	0.613	0.643
A_4	0.854	0.727	0.867	0.613
A_5	0.325	0.867	0.854	0.613

利用式(5)可建立如下模型:

$$\min F(A) = 3.182\omega_1 + 3.496\omega_2 + 3.788\omega_3 + 3.482\omega_4.$$

$$\text{s.t. } 0.12 \leqslant \omega_1 \leqslant 0.20,\ 0.12 \leqslant \omega_2 \leqslant 0.40;$$
$$0.08 \leqslant \omega_3 \leqslant 0.25,\ 0.10 \leqslant \omega_4 \leqslant 0.23;$$
$$\sum_{k=1}^{4} \omega_k = 1.$$

求解上述线性规划模型, 得到的最优准则权系数为 $\omega = (0.2, 0.4, 0.17, 0.23)$.

Step 3 集成方案的准则值.

根据语言 D 数的证据推理算法, 可得所有方案在各语言评价等级下的信任度, 从而各方案的综合准则值 LD_i 如下:

$$\text{LD}_1 = \{(H_2, 0.086), (H_3, 0.215), (H_4, 0.321), (H_5, 0.183), (H_6, 0.135)\};$$

$$\text{LD}_2 = \{(H_3, 0.212), (H_4, 0.259), (H_5, 0.400), (H_6, 0.081)\};$$

$$\text{LD}_3 = \{(H_3, 0.095), (H_4, 0.410), (H_5, 0.438), (H_6, 0.015)\};$$

$$\text{LD}_4 = \{(H_3, 0.286), (H_4, 0.561), (H_5, 0.136)\};$$

$$\mathrm{LD}_5 = \{(H_2, 0.038), (H_3, 0.111), (H_4, 0.570), (H_5, 0.242)\}.$$

Step 4 集成方案的效用值.

将所有方案在各语言评价等级下的信任度与给出的语言评价等级效用值进行集成, 利用式(7)、(8)和(9)可求得各方案的平均效用值 U 分别为 $U_{\rm avg}(A_1) = 0.433$, $U_{\rm avg}(A_2) = 0.470$, $U_{\rm avg}(A_3) = 0.471$, $U_{\rm avg}(A_4) = 0.382$, $U_{\rm avg}(A_5) = 0.419$.

Step 5 方案排序.

根据平均效用值可得排序结果为 $A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_4$, A_3 为最佳方案.

为了验证本文所提出方法的有效性, 采用文献[17]所提出的基于语言犹豫模糊加权平均(LHFWA)算子的决策方法求解上述投资决策问题. 准则权系数为 $\omega = (0.2, 0.4, 0.17, 0.23)$, 用 LHFWA 算子集成方案的准则值, 所得结果的得分函数值为 $E(A_1) = H_{1.656}$, $E(A_2) = H_{1.672}$, $E(A_3) = H_{1.929}$, $E(A_4) = H_{1.478}$, $E(A_5) = H_{1.604}$. 方案的排序结果为 $A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_4$, A_3 为最佳方案. 此方法得到的结果与本文所提出的方法得到的结果一致, 由此验证了本文所提出方法的有效性. 但相比较而言, 本文所提出的方法将证据进行融合递归, 算法可靠性强, 同时犹豫模糊语言的集成算子可能使信息的不确定性扩大.

6 结 论

本文定义了语言 D 数, 给出了语言 D 数的模糊熵, 并针对准则权系数信息不完全确定的多准则决策问题, 建立了基于模糊熵和证据推理的语言 D 数多准则决策模型, 给出了具体步骤和算例分析. 语言 D 数作为一种表达不确定信息的新方法, 能更灵活有效地处理模糊和不完全等各种不确定信息, 并且克服了证据理论的固有缺点. 本文建立的基于语言 D 数的模糊熵的线性规划模型能够很好地适应不确定决策环境, 有效地解决准则权系数信息不完全确定的多准则决策问题. 实际应用表明, 本文方法操作性较强, 具有广泛的实际应用价值.

参考文献(References)

[1] Dempster A P. Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping[J]. Annals of Math Statistics, 1967, 38(2): 325-339.

[2] Shefer G. A mathematical theory of evidence[M]. Princeton: Princeton University Press, 1976: 85-150.

[3] Yang J B, Xu D L. Nonlinear information aggregation via evidential reasoning in multi-attribute decision analysis under uncertainty[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans, 2002, 32(3): 376-393.

[4] Hua Z S, Gong B G, Xu X Y. A DS-AHP approach for multi-attribute decision making problem with incomplete information[J]. Expert Systems with Applications, 2008, 34(3): 2221-2227.

[5] Deng Y. D numbers: Theory and applications[J]. J of Information and Computational Science, 2012, 9(9): 2421-2428.

[6] Deng X Y, Hu Y, Deng Y, et al. Supplier selection using AHP methodology extended by D numbers[J]. Expert Systems with Applications, 2014, 41(1): 156-167.

[7] Han X L, Chen X. A D-VIKOR method for medicine provider selection[C]. In Computational Sciences & Optimization. New York: IEEE Press, 2014: 419-423.

[8] Deng X Y, Lua X, Felix T S, et al. D-CFPR: D numbers extended consistent fuzzy preference relations[J]. Knowledge-Based Systems, 2015, 73(1): 61-68.

[9] Zadeh L A. Fuzzy sets and systems[C]. Proc of the Symposium on Systems, Theory Polytechnic Institute of Brooklyn. New York, 1965: 29-37.

[10] Burillo P, Bustince H. Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 78(3): 305-316.

[11] Szmidt E, Kacprzyk J. Entropy for intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 118(3): 467-477.

[12] Xu Z S, Xia M M. Hesitant fuzzy entropy and cross-entropy and their use in multi-attribute decision making[J]. Int J of Intelligent Systems, 2012, 27(9): 799-822.

[13] Delgado M, Verdegay J L, Vila M A. Linguistic decision making models[J]. Int J of Intelligent Systems, 1992, 7(5): 479-492.

[14] Delgado M, Verdegay J L, Vila M A. An aggregation operations of linguistic label[J]. Int J of Intelligent Systems, 1993, 8(3): 351-370.

[15] Herrera F, Martinez L. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 746-752.

[16] 王坚强. 一种信息不完全确定的多准则语言群决策方法[J]. 控制与决策, 2007, 22(4): 394-398.
(Wang J Q. Group multi-criteria linguistic decision-making method with incomplete certain information[J]. Control and Decision, 2007, 22(4): 394-398.)

[17] Meng F Y, Chen X H, Zhang Q. Multi-attribute decision analysis under a linguistic hesitant fuzzy environment[J]. Information Sciences, 2014, 267(1): 287-305.

(责任编辑: 齐 霁)