文章编号: 1001-0920 (2016) 05-0869-06 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.0130

GM(1,1) 模型的病态性问题再研究

荆 科[1,2], 刘业政[1]

(1. 合肥工业大学 管理学院，合肥 230009；2. 阜阳师范学院 数学与统计学院，安徽 阜阳 236037)

摘 要: 针对 GM(1,1) 模型参数辨识过程中的病态性和稳健性问题, 一方面通过不改变预测精度的数乘变换将模型参数辨识过程中的病态性矩阵转化为良态矩阵, 另一方面利用适当的正交矩阵对原始数据序列实施正交变换, 将模型的参数辨识过程转化为具有递归形式线性方程组的求解过程, 从而避免参数辨识过程中出现的病态性问题, 提高模型的适用性. 最后通过算例和 Monte-Carlo 数值模拟进一步验证了所提出方法的有效性.

关键词: 正交矩阵；GM(1,1) 模型；条件数；病态性；数乘变换

中图分类号: N941.5 **文献标志码:** A

Morbidity problem of GM(1, 1) model

JING Ke[1,2], *LIU Ye-zheng*[1]

(1. School of Management，Hefei University of Technology，Hefei 230009，China；2. School of Mathematics and Statistics，Fuyang Teachers College，Fuyang 236037，China. Correspondent：JING Ke，E-mail：jingxuefei296@sina.com)

Abstract: In order to improve the bad robustness and morbidity of parameter identification of GM(1,1) model, on one hand, the ill-conditioned matrix of parameter identification is transformed into the good-conditioned matrix by using the multiply transformation, which does not change the prediction precision of the model; on the other hand, the process of parameter identification is transformed into solving the linear equations with the recursive form by using the appropriating orthogonal matrix. By using the proposed methods, the morbidity problem of least squares is avoided, and the applicability of the model is improved. The numerical example and Monte-Carlo simulation show the effectiveness of the proposed methods.

Keywords: orthogonal matrix；GM(1, 1) model；condition number；morbidity；multiply transformation

0 引 言

灰色系统理论是一种研究“少数据”、“贫信息”、“不确定性”问题的新方法, 主要通过对部分已知信息的生成、开发、提取有价值的信息, 实现对系统运行和演化规律的准确描述和有效监控. 近年来, 灰色系统研究领域的学者对灰色系统理论的核心内容 GM(1,1) 模型进行了系统的研究, 研究成果广泛应用于能源、经济、工业等领域[1-15]. 虽然 GM(1,1) 模型在理论和应用方面受到广泛的重视, 但其参数辨识多是基于最小二乘准则, 在实际应用中, 由于原始数据大多为观测数据, 不可避免地存在系统误差, 当原始数据较大或为病态数据时, 容易导致矩阵的条件数过大, 从而可能产生病态性现象, 降低了模型的适用性. 鉴于此, 学者们对 GM(1,1) 模型的病态性问题展开研究, 分析其成因, 并在克服模型的病态性、提高模型的可靠性方面取得了丰硕的成果.

文献 [16-18] 分析了 GM(1,1) 模型产生病态性的成因, 指出累加数和矩阵元素数量级差别过大是导致病态性的重要原因, 从而影响了模型的稳定性. 在此基础上, 不同学者针对 GM(1,1) 模型的病态性问题提出了一些解决方案, 主要包括数乘变换法、仿射变换法和累积法等. 文献 [18] 指出, 直接使用原始数据建模, 容易导致模型产生严重的病态性, 通过对原始数据进行数乘变换降低其数量级, 能够较好地解决该问题. 文献 [19] 利用仿射变换预先处理数据, 有效改善了 GM(1,1) 模型的病态性. 文献 [20] 以矩阵谱条件数为工具进行分类讨论, 通过数乘变换解决 GM(1,1) 模型的病态性, 且不会改变原有模型的相对残差、平均

收稿日期: 2015-01-27；**修回日期:** 2015-07-20.

基金项目: 国家自然科学基金重大项目(71490725)；国家 973 计划项目(2013CB329600)；国家自然科学基金项目(71371062)；安徽高等学校自然科学研究项目(2014KJ011).

作者简介: 荆科(1983−), 男, 讲师, 博士生, 从事灰色系统理论、应用数值逼近的研究；刘业政(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与方法、灰色系统理论等研究.

残差和预测精度. 文献 [21-24] 基于矩阵扰动理论, 利用累积法解决 GM(1,1) 模型的病态性问题, 并通过实际算例验证了方法的可靠性和实用性. 上述方法虽然能够有效缓解模型的病态性, 但数乘变换法并没有给出降低系数矩阵条件数的具体准则; 仿射变换法有可能降低原有模型的精度; 累积法所得到的结论与新信息优先原理相矛盾, 且累积阶数如何取值并没有解决.

本文为了进一步提高建模效率, 更好地解决 GM(1,1) 模型的病态性问题, 一方面通过不改变预测精度的数乘变换将病态性矩阵转化为良态矩阵, 并给出数乘变换的最优准则; 另一方面, 利用正交矩阵的性质, 将模型的最小二乘参数辨识过程转化为具有递归形式线性方程组的求解过程. 两者都旨在解决模型中出现的病态性问题, 提高模型的稳定性和适用性. 最后通过算例和 Monte-Carlo 数值模拟进一步验证所提出方法的有效性.

1 降低矩阵谱条件数

考虑线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵, $\boldsymbol{x}$ 为方程组的精确解.

定义 1[25] 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 或常数 $\boldsymbol{b}$ 的微小变化引起方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解的巨大变化, 则称方程组为病态方程组, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为病态矩阵 (相对于方程组而言), 否则称方程组为良态方程组, $\boldsymbol{A}$ 为良态矩阵.

当 $\boldsymbol{A}$ 是精确的, $\boldsymbol{b}$ 有微小误差 $\delta\boldsymbol{b}$, 解为 $\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}$, 则如下定理成立.

定理 1[25] 设 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\neq 0$, 且 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}+\delta\boldsymbol{b}$, 则

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\leqslant\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}.$$

当 $\boldsymbol{b}$ 是精确的, $\boldsymbol{A}$ 有微小误差 $\delta\boldsymbol{A}$, 解为 $\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}$, 则如下定理成立.

定理 2[25] 设 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\neq 0$, 且 $(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}$, 如果 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\,\|\delta\boldsymbol{A}\|<1$, 则

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\leqslant\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|\dfrac{\|\delta\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}}{1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|\dfrac{\|\delta\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}}.$$

定理 1 表明常数项 $\boldsymbol{b}$ 的相对误差在解中可能被放大 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|$, 定理 2 表明系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的相对误差在解中可能被放大 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|$. 总之, 量 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|$ 越小, 由 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 的相对误差引起的解相对误差便越小; 量 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|$ 越大, 该解的相对误差便越大. 所以量 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|$ 实际上刻画了解对原始数据变化的灵敏程度, 即刻画了方程组的病态程度.

定义 2[25] 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵, 称

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_v=\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_v\|\boldsymbol{A}\|_v,\ v=1,2,\infty$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数.

由定理 1、定理 2 和定义 2 可见, 当 $\boldsymbol{A}$ 的条件数相对较大时, 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是病态的, 反之为良态的. 由于矩阵范数的等价性, 为了方便起见, 本文采用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱条件数, 即

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_2=\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}}. \tag{1}$$

特别地, 当 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵时, $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_2=|\lambda_1|/|\lambda_2|$, 其中 λ_1、λ_2 为 $\boldsymbol{A}$ 绝对值最大和最小的特征值.

设 $\boldsymbol{X}^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$ 为非负原始序列, $\boldsymbol{X}^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\}$ 为 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 的 1-AGO 序列, 称一阶线性微分方程

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b \tag{2}$$

为 GM(1,1) 模型的离散形式, 其中 a、b 为待辨识参数. 由最小二乘准则可得

$$\boldsymbol{u}=[a,b]^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}, \tag{3}$$

且

$$\boldsymbol{Y}=(x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),\cdots,x^{(0)}(n))^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-z^{(0)}(2) & -z^{(0)}(3) & \cdots & -z^{(0)}(n)\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

显然有

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n-1}[z^{(1)}(k)]^2 & -\sum\limits_{k=1}^{n-1}z^{(1)}(k)\\ -\sum\limits_{k=1}^{n-1}z^{(1)}(k) & n-1\end{bmatrix}, \tag{5}$$

由式 (1) 可知, GM(1,1) 模型的谱条件数为

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})_2=\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}. \tag{6}$$

由文献 [18] 可知, 引起系数矩阵条件数变大有两个原因, 原始数据较大、较小或病态数据 (即近似为首项不为 0, 其他项为 0 的常数序列). 对于后一类问题, 没有实际意义, 不必深究.

下面分析当原始数据较大或较小时, 如何利用数乘变换降低系数矩阵条件数, 并给出最优准则. 为了克服病态性, 对原始数据序列分别乘以 ρ, 式 (5) 中的系数矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 变为

$$\begin{bmatrix}\rho^2\sum\limits_{k=1}^{n-1}[z^{(1)}(k)]^2 & -\rho\sum\limits_{k=1}^{n-1}z^{(1)}(k)\\ -\rho\sum\limits_{k=1}^{n-1}z^{(1)}(k) & n-1\end{bmatrix}. \tag{7}$$

引理 1[26] 若 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 为实数序列, 则有

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\Big)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2, \tag{8}$$

其中等式成立当且仅当序列 a 和 b 线性相关.

令引理 1 中的实数序列

$$\boldsymbol{a}=-\rho(z^{(1)}(1),z^{(1)}(2),\cdots,z^{(1)}(n-1)),$$

$$\boldsymbol{b}=(1,1,\cdots,1),$$

由矩阵的特征值的定义、韦达定理和引理 1 可知, 式 (7) 的两个特征根均大于零. 因此, 由式 (6) 可得

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})_2=f(\rho)=\frac{\alpha\rho^2+\sqrt{(\alpha\rho^2-\beta)^2+4\rho^2\gamma^2}}{\alpha\rho^2-\sqrt{(\alpha\rho^2-\beta)^2+4\rho^2\gamma^2}}. \tag{9}$$

其中

$$\sum_{k=1}^{n-1}[z^{(1)}(k)]^2=\alpha,\ n-1=\beta,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}z^{(1)}(k)=\gamma.$$

由于式 (9) 中的 $z^{(1)}(k)$ 和 n 均为已知常数, 表明此时模型的系数矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 的条件数大小与 ρ 有直接关系, 降低系数矩阵的条件数归结为求式 (9) 的最小值问题, 根据引理 1 和 ρ 的定义可得 $f(\rho)$ 的驻点, 归结为对下式求解:

$$f'(\rho)=\frac{2(\alpha\rho^2+\beta)(\sqrt{(\alpha\rho^2-\beta)^2+4\rho^2\gamma^2})'}{(\alpha\rho^2+\beta-\sqrt{(\alpha\rho^2-\beta)^2+4\rho^2\gamma^2})^2}-\frac{-2(\alpha\rho^2+\beta)'\sqrt{(\alpha\rho^2-\beta)^2+4\rho^2\gamma^2}}{(\alpha\rho^2+\beta-\sqrt{(\alpha\rho^2-\beta)^2+4\rho^2\gamma^2})^2}=0\Rightarrow$$

$$2(\alpha\rho^2+\beta)(\sqrt{(\alpha\rho^2-\beta)^2+4\rho^2\gamma^2})'-2(\alpha\rho^2+\beta)'\sqrt{(\alpha\rho^2-\beta)^2+4\rho^2\gamma^2}=0\Rightarrow$$

$$\frac{2(\alpha\rho^2+\beta)(\alpha^2\rho^3-\alpha\beta\rho+2\gamma^2\rho)}{\sqrt{(\alpha\rho^2-\beta)^2+4\rho^2\gamma^2}}-\frac{2\alpha\rho(\alpha^2\rho^4-2\alpha\beta\rho+\beta^2+4\gamma^2\rho^2)}{\sqrt{(\alpha\rho^2-\beta)^2+4\rho^2\gamma^2}}=0\Rightarrow$$

$$\frac{2(\alpha^2\beta\rho^3-\alpha\gamma^2\rho^3)-2(\beta\gamma^2\rho-\alpha\beta^2\rho-\alpha\beta\rho)}{\sqrt{(\alpha\rho^2-\beta)^2+4\rho^2\gamma^2}}=0\Rightarrow$$

$$\rho^2=\frac{\alpha\beta^2-\beta\gamma^2}{\alpha^2\beta-\alpha\gamma^2}\Rightarrow\rho=\sqrt{\frac{\alpha\beta^2-\beta\gamma^2}{\alpha^2\beta-\alpha\gamma^2}}\Rightarrow$$

$$\rho_1=\sqrt{\frac{(n-1)^2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}[z^{(1)}(k)]^2-(n-1)\Big[\sum_{k=1}^{n-1}z^{(1)}(k)\Big]^2}{(n-1)\Big[\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}[z^{(1)}(k)]^2\Big]^2-\Big[\sum_{k=1}^{n-1}z^{(1)}(k)\Big]^2\sum_{k=1}^{n-1}[z^{(1)}(k)]^2}}. \tag{10}$$

式 (10) 表明了函数 $f(\rho)$ 在定义域内的唯一驻点为 ρ_1, 由于在区间 $(0,\rho_1)$ 内, $f'(\rho)<0$ 在区间 (ρ_1,∞) 内, $f'(\rho)>0$, 可得系数矩阵的条件数 $f(\rho)$ 的最小值在 ρ_1 处取得.

2　正交变换求解

由式 (2) 和 (3) 可知, GM(1,1) 模型的参数辨识问题实际上为一元线性回归问题. 为方便, 将其写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}+\varepsilon. \tag{11}$$

其中: $\boldsymbol{Y}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{u}$ 如式 (3) 和 (4) 所示, ε 为随机扰动项.

对于线性回归模型 (11), 有很多方法辨识参数 $\boldsymbol{u}$, 最小二乘准则是最经典的一种, 其核心思想是: 寻找一个由 $\boldsymbol{u}=[a,b]^{\mathrm{T}}$ 张成的直线, 使得其尽可能地接近已知的点. 由式 (3) 可知, 为获得参数 $\boldsymbol{u}$, 需要计算逆矩阵 $(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}$, 显然在矩阵条件数较大时, 会出现严重的病态性, 同时在求解时, 误差累计也可能会很大. 为此, 能否构造一个无需计算逆矩阵的方法对其进行求解, 便成为克服 GM(1,1) 模型病态性问题的关键.

假设存在一个正交矩阵 $\boldsymbol{H}$, 使得 $\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}$ 成为形如

$$\boldsymbol{B}^*=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1^*\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&0&0&\cdots&0\\\boldsymbol{B}_{12}&\boldsymbol{B}_{12}&0&\cdots&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

的上三角矩阵, 将其左乘式 (11), 可得

$$\boldsymbol{Y}^*=\boldsymbol{H}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{H}\varepsilon=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{u}+\varepsilon^*. \tag{13}$$

根据 $\boldsymbol{B}^*$ 形如式 (12) 的分块, 可以对式 (13) 进行如下分块:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1^*\\\boldsymbol{Y}_2^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1^*\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}\varepsilon_1^*\\\varepsilon_2^*\end{bmatrix}. \tag{14}$$

根据正交矩阵的性质, 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 只是将向量进行旋转, 而不改变向量的长度, 因此有

$$\hat{\boldsymbol{u}}=\arg\min_{\boldsymbol{u}}\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\|^2=\arg\min_{\boldsymbol{u}}\|\boldsymbol{Y}^*-\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{u}\|^2=\arg\min_{\boldsymbol{u}}(\|\boldsymbol{Y}_1^*-\boldsymbol{B}_1^*\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{Y}_2^*\|^2). \tag{15}$$

这样, 方程 (11) 的参数辨识便转化为方程 (13) 的参数辨识问题. 由于式 (15) 中的 $\|\boldsymbol{Y}_2^*\|^2$ 不含任何未知辨识参数 $\boldsymbol{u}$ 的信息, 只取决于原始数据 $\boldsymbol{Y}$ 和正交矩阵 $\boldsymbol{H}$, 因此可将式 (15) 进一步简化为

$$\hat{\boldsymbol{u}}=\arg\min_{\boldsymbol{u}}\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\|^2=\arg\min_{\boldsymbol{u}}\|\boldsymbol{Y}_1^*-\boldsymbol{B}_1^*\boldsymbol{u}\|^2. \tag{16}$$

由于 $\|\boldsymbol{Y}_1^*-\boldsymbol{B}_1^*\boldsymbol{u}\|^2\geqslant 0$, 其最小值 0 只能在 $\boldsymbol{Y}_1^*=\boldsymbol{B}_1^*\boldsymbol{u}$ 时取得. 此外，由于其系数矩阵 $\boldsymbol{B}_1^*$ 为上三角阵, 进而可以通过反向替换算法求出辨识参数 $\boldsymbol{u}$.

模型 (11) 的参数辨识转化为对方程 $\boldsymbol{Y}_1^*=\boldsymbol{B}_1^*\boldsymbol{u}$ 求解, 避免了求逆矩阵 $(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}$. 前文提及的正交矩

阵 $\boldsymbol{H}$ 是存在的, 它是由一组 Householder 矩阵乘积[27] 所得, Srivastava 给出了由 Housholder 矩阵构造正交矩阵的方法和 Matlab 程序.

3 实例分析

为验证本文所提出两种方法 (数乘变换、正交变换) 解决 GM(1,1) 模型中病态性问题的有效性. 采用 2005～2014 年中国人均粮食产量进行分析比较, 见表 1. 数据选取原因在于粮食产量是关系国家生存与发展的永恒主题, 建国以来中国的粮食产量出现了几次较大幅度波动, 不仅制约了经济发展, 影响了民生, 同时对世界经济产生了巨大影响. 因此, 分析近年来中国人均粮食产量的波动规律, 具有重要的理论意义和实践价值.

根据 GM(1,1) 模型的建模方法和数乘变换公式 (10), 在 Matlab 2012a 环境下编程并计算最优值 ρ 和数乘变换后的参数 a、b, 结果如下:

$$a = -0.0239,\ b = 0.1671,$$

$$\rho = 4.6245 \times 10^{-4}.$$

表 2 和表 3 比较了 GM(1,1) 的原始模型与经数乘变换、正交变换模型的预测精度. 由表 2 和表 3 可见: 1) 对原始数据序列进行数乘变换后, GM(1,1) 模型系数矩阵的条件数较变换前大大降低, 已经属于良态矩阵, 平均误差和预测精度不变, 这表明数乘变换后的 GM(1,1) 模型稳定性更好, 适用性更高. 2) 由最小二乘法和正交变换法所得到的结果几乎完全一致, 从而表明了正交变换法的有效性.

为进一步验证上述方法解决 GM(1,1) 模型病态性问题的有效性, 通过 Monte-Carlo 数值模拟方法生成数据集. 由于 GM(1,1) 模型的白化方程的解具有指数形式, 不妨设

$$x^{(0)}(k) = 10\mathrm{e}^{0.2k} + \varepsilon_k,\ k = 1, 2, \cdots, 11,$$

其中 ε_k 为随机扰动项, 服从 $i.i.d\ N(0,1)$ 分布. 计算 ρ 和数乘变换后的模型参数 a、b, 结果如下:

$$a = -0.1987,\ b = 10.8365,$$

$$\rho = 7.4218 \times 10^{-3}.$$

由表 4 和表 5 可见: 1) 通过数乘变换的方法, 在不改变预测精度的情况下, 能够极大地降低 GM(1,1) 模型的条件数, 提高模型的稳定性; 2) 通过正交变换方法得到的结果和最小二乘的结果较为一致, 从而进一步验证了其有效性.

表 1 我国人均粮食产量的原始数据

年份	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
产量/kg	370.2	378.4	379.6	398.0	397.7	407.5	424.0	435.4	442.4	443.8

表 2 3 种方法的模拟结果和误差 (1)

数据	GM(1,1) 模型		数乘变换 GM(1,1) 模型		正交变换 GM(1,1) 模型	
	预测值	相对误差	预测值	相对误差	预测值	相对误差
370.2	370.2000	0.0000	370.2000	0.0000	370.2000	0.0000
378.4	374.5059	1.0288	374.5059	1.0288	374.4403	1.0464
379.6	383.6000	1.0537	383.6000	1.0537	383.4857	1.0236
398.0	392.9138	1.2779	392.9138	1.2779	392.7496	1.3192
397.7	402.4538	1.1953	402.4538	1.1953	402.2373	1.1409
407.5	412.2254	1.1596	412.2254	1.1596	411.9543	1.0391
424.0	422.2343	0.4164	422.2343	0.4164	421.9059	0.4939
435.4	432.4862	0.6692	432.4862	0.6692	432.0980	0.7584
平均误差	0.8501		0.8501		0.8594	
条件数	2.0967 e+07		20.7371			

表 3 3 种方法的模拟结果和误差 (2)

数据	GM(1,1) 模型		数乘变换 GM(1,1) 模型		正交变换 GM(1,1) 模型	
	预测值	相对误差	预测值	相对误差	预测值	相对误差
442.4	442.9870	0.1327	442.9870	0.1327	442.5362	0.0308
443.8	453.7427	2.2404	453.7427	2.2404	453.2266	2.1241
平均误差	1.1865		1.1865		1.0774	

表 4 3 种方法的 Monte-Carlo 数值模拟结果和误差 (1)

数据	GM(1,1) 模型		数乘变换 GM(1,1) 模型		正交变换 GM(1,1) 模型	
	预测值	相对误差	预测值	相对误差	预测值	相对误差
12.702 2	12.702 2	0.000 0	12.702 2	0.000 0	12.702 2	0.000 0
14.749 9	15.218 7	3.241 6	15.218 7	3.241 6	15.263 1	3.542 4
18.025 1	18.536 1	2.834 6	18.536 1	2.834 6	18.584 7	3.104 5
23.674 7	22.576 6	4.638 6	22.576 6	4.638 6	22.629 1	4.416 3
27.474 4	27.497 8	0.085 1	27.497 8	0.085 1	27.553 8	0.288 9
33.399 0	33.497 8	0.277 7	33.497 8	0.277 7	33.550 1	0.452 5
42.139 7	40.792 2	3.197 6	40.792 2	3.197 6	40.851 4	3.057 2
48.725 9	49.684 1	1.966 6	49.684 1	1.966 6	49.741 6	2.084 6
61.193 1	60.514 2	1.109 4	60.514 2	1.109 4	60.566 6	1.023 9
平均误差	2.168 9		2.168 9		1.996 7	
条件数	6.053 4e+04		10.871 6			

表 5 3 种方法的 Monte-Carlo 数值模拟的预测结果和误差 (2)

数据	GM(1,1) 模型		数乘变换 GM(1,1) 模型		正交变换 GM(1,1) 模型	
	预测值	相对误差	预测值	相对误差	预测值	相对误差
74.725 6	73.705 1	1.365 7	73.705 1	1.365 7	73.747 3	1.309 2
90.006 4	89.771 3	0.261 2	89.771 3	0.261 2	89.796 4	0.233 3
平均误差	0.813 5		0.813 5		0.771 3	

4 结 论

本文分别使用数乘变换法和正交变换法, 解决了 GM(1,1) 模型中的病态性问题, 提高了模型的适用性和稳定性. 通过数值实例和 Monte-Carlo 数值模拟进一步表明了所提出方法的有效性. 此外, 本文方法同样适用其他灰色预测模型 (如 GM(2,1)、GM(1,1) 幂、MGM(1,m) 模型), 可以得到一些新的结果, 这些研究有待进一步展开.

参考文献(References)

[1] Zheng Z, Mi C M. Research on prediction accuracy of GM(1,1) model[J]. J of Grey System, 2009, 12(4): 185-189.

[2] Ye J, Li B, Liu F. GM(1,1) forecast under function cot x transformation[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2013, 3(3): 236-249.

[3] 刘思峰, 曾波, 刘解放, 等. GM(1,1) 模型的几种基本形式及其适用范围研究[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(3): 501-508.
(Liu S F, Zeng B, Liu J F, et al. Several basic models of GM(1,1) and their applicable bound[J]. Systems Engineering and Electronics, 2014, 36(3): 501-508.)

[4] 张彬, 西桂权. 基于背景值和边值修正的 GM(1,1) 模型优化[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(3): 682-688.
(Zhang B, Xi G Q. GM(1,1) model optimization based on the background value and boundary value correction[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(3): 682-688.)

[5] 李玻, 魏勇. 优化灰导数后的新 GM(1,1) 模型[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(2): 100-105.
(Li B, Wei Y. Optimizes grey derivative of GM(1,1)[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2009, 29(2): 100-105.)

[6] 王晓佳, 杨善林. 基于组合插值的 GM(1,1) 模型预测方法的改进与应用[J]. 中国管理科学, 2012, 20(2): 129-134.
(Wang X J, Yang S L. The improvement and application of forecasting method in GM(1,1) model based on combinative interpolation[J]. Chinese J of Management Science, 2012, 20(2): 129-134.)

[7] Yan H, Li Q, Wang Z Y. Apply GM(1,1) and radial basic function network to predict the radial pressure data in oil wells[J]. J of Grey System, 2014, 17(1): 15-20.

[8] Deng L R, Hu Z Y, Yang S G, et al. Improved non-equidistant grey model GM(1,1) applied to the stock market[J]. J of Grey System, 2012, 15(4): 189-194.

[9] Min J C H, Tang H W V. Forecasting Chinese tourism demand in Taiwan using GM(1,1) interval prediction model[J]. J of Grey System, 2011, 14(1): 1-7.

[10] Xia M, Wong W K. A seasonal discrete grey forecasting model for fashion retailing[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 57(6): 119-126.

[11] Hamzacebi C, Es H A. Forecasting the annual electricity consumption of Turkey using an optimized grey model[J]. Energy, 2012, 40(1): 165-171.

[12] Huan H, Tan Q. The forecast of cultivate land quantity based on Grey-Markov model: A case study of Jiangsu Province[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2015, 5(1): 127-136.

[13] Ma W, Zhu X, Wang M. Forecasting iron ore import and consumption of China using grey model optimized by particle swarm optimization algorithm[J]. Resources Policy, 2013, 38(4): 613-620.

[14] Pao H T, Fu H C, Tseng C L. Forecasting of CO_2 emissions, energy consumption and economic growth in China using an improved grey model[J]. Energy, 2012, 40(1): 400-409.

[15] Liu L W, Zong H J, Zhao E D, et al. Can China realize its carbon emission reduction goal in 2020: From the perspective of thermal power development[J]. Applied Energy, 2014, 124(3): 199-212.

[16] 郑照宁, 武玉英, 包涵龄. GM模型的病态性问题[J]. 中国管理科学, 2001, 9(5): 38-44.
(Zheng Z N, Wu Y Y, Bao H L. Morbidity problem in grey model[J]. Chinese J of Management Science, 2001, 9(5): 38-44.)

[17] 党耀国, 王正新, 刘思峰. 灰色模型的病态问题研究[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(1): 156-160.
(Dang Y G, Wang Z X, Liu S F. Study on morbidity problem in grey model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2008, 28(1): 156-160.)

[18] 吴正朋, 刘思峰, 党耀国, 等. 再论离散GM(1,1)模型的病态问题研究[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(1): 108-112.
(Wu Z P, Liu S F, Dang Y G, et al. Study on the morbidity problem in grey model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2011, 31(1): 108-112.)

[19] 肖新平, 毛树华. 灰预测与决策方法[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 201-292.
(Xiao X P, Mao S H. Grey prediction and decision-making method[J]. Beijing: Science Press, 2013: 201-292.)

[20] 唐利民. GM(1,1)病态问题求解的调整计量单位法[J]. 武汉大学学报: 信息科学版, 2014, 39(9): 1038-1042.
(Tang L M. Adjust measurement unit algorithm for ill-posed problem of GM(1,1) model[J]. J of Wuhan University: Geomatics and Information Science, 2014, 39(9): 1038-1042.)

[21] 曾祥艳, 肖新平. GM(1,1)模型拓广方法研究与应用[J]. 控制与决策, 2009, 24(7): 1092-1096.
(Zeng X Y, Xiao X P. Study on generalization for GM(1,1) model and its application[J]. Control and Decision, 2009, 24(7): 1092-1096.)

[22] 吴利丰, 刘思峰, 姚立根. 基于分数阶累加的离散灰色模型[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(7): 1822-1827.
(Wu L F, Liu S F, Yao L G. Discrete grey model based on fractional order accumulate[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(7): 1822-1827.)

[23] 吴利丰, 刘思峰, 姚立根. 含Caputo型分数阶导数的灰色预测模型[J]. 系统工程理论与实践, 2015, 35(5): 1311-1316.
(Wu L F, Liu S F, Yao L G. Grey model with caputo fractional order derivative[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2015, 35(5): 1311-1316.)

[24] 吴利丰, 刘思峰, 刘健. 灰色GM(1,1)分数阶累积模型及其稳定性[J]. 控制与决策, 2014, 29(5): 919-924.
(Wu L F, Liu S F, Liu J. GM(1,1) model based on fractional order accumulating method and its stability[J]. Control and Decision, 2014, 29(5): 919-924.)

[25] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2007: 163-197.
(Li Q Y, Wang N C, Yi D Y. Numerical analysis[M]. Wuhan: Huazhong University of Science & Technology Press, 2007: 163-197.)

[26] Mitrinovic D S. The solution to inequality[M]. Beijing: Science Press, 1987: 93-162.

[27] Householder A S. Unitary triangularization of a nonsymmetric matrix[J]. J of the ACM, 1958, 5(4): 339-342.

(责任编辑：郑晓蕾)