文章编号: 1001-0920 (2016) 04-0629-06 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.0135

基于布尔矩阵的区间数排序方法

李德清[1a,2], 韩国柱[1b], 曾文艺[2], 余先川[2]

(1. 军械工程学院 a. 基础部，b. 火炮工程系，石家庄 050003；2. 北京师范大学 信息科学与技术学院，北京 100875)

摘 要: 讨论了 10 个区间数排序的可能度公式, 分析了它们各自的特点. 从可能度的含义和保序性两个角度指出, 基于可能度矩阵的区间数排序方法有时会导出不合理的排序结果. 通过分析可能度矩阵与模糊判断矩阵的关系, 剖析了导致这种不合理排序结果的原因. 最后, 利用可能度矩阵构造一个布尔矩阵, 基于布尔矩阵给出一个改进的区间数排序算法, 并从理论上证明了所提出的排序方法的科学性.

关键词: 区间数；可能度；可能度矩阵；布尔矩阵；排序

中图分类号: O159 **文献标志码:** A

Ranking method of interval numbers based on Boolean matrix

LI De-qing[1a,2], *HAN Guo-zhu*[1b], *ZENG Wen-yi*[2], *YU Xian-chuan*[2]

(1a. Department of Basics，1b. Artillery Engineering Department，Ordnance Engineering College，Shijiazhuang 050003, China；2. College of Information Science and Technology，Beijing Normal University，Beijing 100875，China. Correspondent：ZENG Wen-yi，E-mail：zengwy@bnu.edu.cn)

Abstract: Ten different formulas of possibility degree are analyzed. It is pointed out that such a ranking method for interval numbers is unreasonable by counterexamples from two different viewpoints. The relationship between possibility degree matrix and fuzzy judgment matrix is analyzed, and the reason leading to the unreasonable ranking result is investigated. Finally, by utilizing the possibility degree matrix, the Boolean matrix is established, and an improved algorithm of ranking interval numbers based on the Boolean matrix is proposed. The rationality of the proposed approach is proved theoretically.

Keywords: interval number；possibility degree；possibility degree matrix；Boolean matrix；ranking

0 引 言

区间数排序是不确定性决策问题研究的重要内容之一[1-17]. 为了充分反映区间数所表达信息的模糊性, 目前研究者广为采用的方法是基于可能度的区间数排序方法[2-14]. 这种排序方法的基本思想是: 定义一种反映一个区间数大于另一个区间数程度的量, 并以该度量为基础, 导出区间数之间的排序. 即, 设有两个区间数 a 和 b, 定义 $P(a>b)$, 用其描述 a 大于 b 的程度. 如果 $P(a>b)=1$, 则称 a 完全大于 b; 如果 $1/2 < P(a>b) < 1$, 则称 a 大于 b 的程度超过 $1/2$, 由互补性可知, b 大于 a 的程度小于 $1/2$, 故此时按大小排序时将 a 排在 b 之前; 如果 $P(a>b)=1/2$, 则称 a 与 b 相等 (亦称为等价)[3-8]. 为了便于处理一组区间数的排序问题, 在给出区间数两两比较的可能度定义之后, 一般采用如下算法: 利用两两比较的可能度值建立可能度矩阵, 然后对可能度矩阵每行求和, 并根据和的大小确定相应区间数的排序顺序[6-14]. 为了行文方便, 简称此排序方法为“可能度矩阵行求和法”. 本文通过具体实例, 从可能度的含义以及区间数排序的保序性要求这两个角度出发, 详细分析利用可能度矩阵对区间数进行排序时所存在的问题, 指出文献 [5-9] 所强调的可能度矩阵行求和法的理论基础是错误的, 并得出结论: 不能用可能度矩阵的行求和法对区间数进行排序. 最后通过将可能度矩阵转化为布尔矩阵, 给出一种基于布尔矩阵的区间数排序算法, 分析并证明了这种算法的理论依据.

1 常用的可能度公式

利用可能度值对区间数进行排序是一种应用极为广泛的排序方法, 目前国内外学者对此方法的研究取得了丰硕的成果. 例如, Nakahara 等[2]为了求解

收稿日期: 2015-01-27；**修回日期:** 2015-05-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(10971243, 41272359).

作者简介: 李德清(1965−), 男, 副教授, 从事模糊系统与模糊决策的研究；曾文艺(1966−), 男, 教授, 博士生导师, 从事模糊信息处理与人工智能、近似推理与模糊控制等研究.

模糊规划问题, 给出了一个比较区间数大小的可能度公式; Kundu[15]利用均匀分布知识定义了两个用于比较区间数大小的模糊偏好关系, 但该公式计算较为复杂; Sengupta 等[17]定义了一个可接受度公式, 虽然该公式比较简洁, 但其对多个区间数的排序比较困难. 国内学者围绕可能度排序方法所做的工作更为深入, 成果颇丰[3-14]. 下面重点介绍10个较为常用的可能度公式.

设 $a=[a^-,a^+]$, $b=[b^-,b^+]$ 为两个区间数, 令 $l(a)=a^+-a^-$, $l(b)=b^+-b^-$.

公式 1[2].

$$P_1(a>b)=\min\Big\{\max\Big(\frac{a^+-b^-}{l(a)+l(b)},0\Big),1\Big\}. \tag{1}$$

公式 2[5].

$$P_2(a>b)=\frac{\max\{0,l(a)+l(b)-\max(0,b^+-a^-)\}}{l(a)+l(b)}. \tag{2}$$

公式 3[6-7].

$$P_3(a>b)=\max\Big\{1-\max\Big(\frac{b^+-a^-}{l(a)+l(b)},0\Big),0\Big\}. \tag{3}$$

公式 4[13].

$$P_4(a>b)=\begin{cases}1,\ b^+<a^-;\\ \dfrac{a^+-b^-}{l(a)+l(b)},\ b^-\leqslant a^+, a^-\leqslant b^+;\\ 0,\ b^-\leqslant a^+.\end{cases} \tag{4}$$

高峰记在文献 [13] 中证明了这4种方法等价, 即有 $P_1(a>b)=P_2(a>b)=P_3(a>b)=P_4(a>b)$. 此外, 其他学者从不同角度出发, 给出了一些可能度的计算方法. 如文献 [11] 给出了如下可能度公式.

公式 5[11].

$$P_5(a>b)=\frac{1}{2}\Big(1+\frac{(a^+-b^+)+(a^--b^-)}{|a^+-b^+|+|a^--b^-|+l_{ab}}\Big), \tag{5}$$

其中 l_{ab} 表示这两个区间相交部分的长度. 其主要特点是表达式简单, 且计算结果与前4个公式的结果不同.

公式 6[3].

$$P_6(a>b)=\begin{cases}1,\ a^-\geqslant b^+;\\ \dfrac{a^+-b^+}{l(a)}+\dfrac{(b^+-a^-)(a^--b^-)}{l(a)l(b)}+\\ \dfrac{(b^+-a^-)^2}{2l(a)l(b)}\cdot\dfrac{(b^+-a^-)}{l(b)},\ b^-\leqslant a^-\leqslant b^+\leqslant a^+;\\ \dfrac{a^+-b^+}{l(a)}+\dfrac{b^+-b^-}{2l(a)},\ a^-\leqslant b^-\leqslant b^+\leqslant a^+.\end{cases} \tag{6}$$

由 $P_6(b>a)=1-P_6(a>b)$ 确定可能度 $P_6(b>a)$.

文献 [12] 利用概率论中均匀分布的知识, 详细讨论了两个区间的6种位置关系, 通过概率的计算, 给出了如下形式的可能度公式:

公式 7[12].

$$P_7(a>b)=\begin{cases}1,\ a^-\geqslant b^+;\\ 1-\dfrac{(b^+-a^-)^2}{2l(a)l(b)},\ b^-\leqslant a^-\leqslant b^+\leqslant a^+;\\ \dfrac{a^++a^--2b^-}{2l(b)},\ b^-\leqslant a^-\leqslant a^+\leqslant b^+;\\ \dfrac{2a^+-b^+-b^-}{2l(a)},\ a^-\leqslant b^-\leqslant b^+\leqslant a^+;\\ \dfrac{(a^+-b^-)^2}{2l(a)l(b)},\ b^-\leqslant a^-\leqslant a^+\leqslant b^+;\\ 0,\ a^-\leqslant a^+\leqslant b^-\leqslant b^+.\end{cases} \tag{7}$$

当两个区间数 a,b 的中点值相等时, 由以上公式计算得到的结果均为 $P(a>b)=1/2$, 此时认为 a 与 b 相等, 特别地, $P(a>b)>1/2\Leftrightarrow a$ 的中点值大于 b 的中点值. 这说明, 从排序的角度看, 利用可能度对区间数进行排序与文献 [16] 给出的利用区间数中点值进行排序的结果是一样的. 为了进一步区分中点值相等的区间数, 文献 [8] 给出了如下的计算公式:

公式 8[8].

$$P_8(a>b)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2\rho^{\frac{a^+-b^-}{l(a)+l(b)}-\frac{1}{2}}},\ \dfrac{a^+-b^-}{l(a)+l(b)}\geqslant\dfrac{1}{2};\\ \dfrac{1}{2\rho^{\frac{1}{2}-\frac{a^+-b^-}{l(a)+l(b)}}},\ \dfrac{a^+-b^-}{l(a)+l(b)}<\dfrac{1}{2}.\end{cases} \tag{8}$$

其中 $\rho>1$.

文献 [14] 以反例说明公式8对某些中点值相等的区间数仍然不能加以区分, 并利用S型函数给出如下改进公式:

公式 9[14].

$$P_9(a>b)=\begin{cases}\dfrac{1}{l(a)}\ln\Big(\dfrac{1+\mathrm{e}^{a^+}}{1+\mathrm{e}^{a^-}}\Big)-\dfrac{1}{l(b)}\ln\Big(\dfrac{1+\mathrm{e}^{b^+}}{1+\mathrm{e}^{b^-}}\Big),\\ l(a)\neq 0,\ l(b)\neq 0;\\ \dfrac{\mathrm{e}^{a^-}}{1+\mathrm{e}^{a^-}}-\dfrac{1}{l(b)}\ln\Big(\dfrac{1+\mathrm{e}^{b^+}}{1+\mathrm{e}^{b^-}}\Big),\ l(a)=0,\ l(b)\neq 0;\\ \dfrac{1}{l(a)}\ln\Big(\dfrac{1+\mathrm{e}^{a^+}}{1+\mathrm{e}^{a^-}}\Big)-\dfrac{\mathrm{e}^{b^-}}{1+\mathrm{e}^{b^-}},\ l(a)\neq 0,\ l(b)=0;\\ \dfrac{\mathrm{e}^{a^-}}{1+\mathrm{e}^{a^-}}-\dfrac{\mathrm{e}^{b^-}}{1+\mathrm{e}^{b^-}},\ l(a)=0,\ l(b)=0.\end{cases} \tag{9}$$

然而, 由此公式得到的结果有时也违背常理. 例如, 令 $a=[2.883\,8, 5.878\,7]$, $b=[1.024\,5, 8.124\,0]$, 因为 b 的中点值大于 a 的中点值, 所以一般会认为 b 比 a 大, 即应有 $P_9(b>a)>0$. 但计算结果却为 $P_9(b>a)=-0.025\,9<0$. 这说明公式9是一个不科学的排序公

式, 基于此, 在后面的讨论中不再考虑此公式.

公式 10[9].

$$P_{10}(a>b)=\begin{cases}1,\ a^-\geqslant b^+;\\ \dfrac{a^+-b^+}{l(a)}+\dfrac{(b^+-a^-)(a^--b^-)}{l(a)l(b)},\\ \qquad b^-\leqslant a^-\leqslant b^+\leqslant a^+;\\ \dfrac{a^+-b^++a^--b^-}{l(a)},\ a^-\leqslant b^-\leqslant b^+\leqslant a^+.\end{cases}\tag{10}$$

由 $P_{10}(b>a)=-P_{10}(a>b)$ 确定可能度 $P_{10}(b>a)$.

前 8 个公式确定的可能度均满足以下性质.

性质 1　$P(a>b)\in[0,1]$, 且 $P(a>b)+P(b>a)=1$.

性质 2　若 $P(a>b)\geqslant 1/2$, $P(b>c)\geqslant 1/2$, 则 $P(a>c)\geqslant 1/2$. 若其中有一个不等号成立, 则 $P(a>c)>1/2$.

对两个区间数 a,b, 若 $P(a>b)>1/2$, 则认为 a 大于 b, 记为 $a\succ b$.

对于公式 9 和公式 10 得到的可能度, 上述性质相应改变.

性质 1′　$P(a>b)\in[-1,1]$, 且 $P(a>b)+P(b>a)=0$.

性质 2′　若 $P(a>b)\geqslant 0$, $P(b>c)\geqslant 0$, 则 $P(a>c)\geqslant 0$.

相应地, 对两个区间数 a,b, 若 $P(a>b)>0$, 则认为 a 大于 b, 记为 $a\succ b$.

2　可能度矩阵行求和法存在的问题与分析

2.1　可能度矩阵行求和法存在的问题

为行文方便, 记 $I\triangleq\{1,2,\cdots,n\}$. 下面分析可能度矩阵行求和法所存在的问题. 先对该方法进行简要介绍. 假若需对一组区间数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 进行排序, 则先对任意两个区间数进行比较, 由上述可能度公式得到可能度值 $p_{ij}=P(a_i>a_j)$, 然后由它们构造可能度矩阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$, 由性质 1 可知 P 为模糊判断矩阵. 因为可能度矩阵包含了所有区间数相互比较的信息, 于是文献 [6-7] 提出可以利用模糊判断矩阵排序的方法来解决区间数的排序问题, 具体算法如下.

Step 1: 先对区间数进行两两比较, 求得相应的可能度 $p_{ij}=P(a_i>a_j)(i,j\in I)$, 建立可能度矩阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$;

Step 2: 令 $\lambda_i=\dfrac{1}{n(n-1)}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}p_{ij}+\dfrac{n}{2}-1\Big)$, 得到排序向量 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$;

Step 3: 根据 λ_i 的大小对区间数进行排序.

考虑到 Step 2 中的 n 为常数, 不同 λ_i 之间的差异只与 p_{ij} 有关, 为了减小计算的复杂性, 文献 [11] 将其修改为 $\lambda_i=\sum\limits_{j=1}^{n}p_{ij}$, 显然它们的排序结果是一样的. 在以下的分析中, 也采用修改后的计算公式.

为了更清楚地说明利用可能度矩阵行求和法对区间数排序可能会得到不科学的排序结果, 下面结合具体实例, 分别从两个角度对其进行分析.

角度 1: 从可能度含义考虑. 设对 3 个区间数 $a_1=[0,8]$、$a_2=[4.8,9]$、$a_3=[1,13]$ 进行排序. 利用公式 1, 得到可能度矩阵

$$P=\begin{bmatrix}0.50 & 0.2623 & 0.35\\ 0.7377 & 0.50 & 0.4938\\ 0.65 & 0.5062 & 0.50\end{bmatrix}.\tag{11}$$

对矩阵每一行求和, 得排序向量 $\lambda=(1.1123,1.7315,1.6562)$, 于是有 $a_2\succ a_3\succ a_1$. 但是, 可能度 $P(a_3>a_2)=0.5062>0.5$, 由可能度的含义可知 $a_3\succ a_2$. 这说明利用可能度矩阵行求和法得到了不合理的排序.

利用其他公式分别计算 $p_{32}=P(a_3>a_2)$ 及排序值 λ_2 和 λ_3 (公式 8 中, 取 $\rho=2.718$), 结果见表 1.

表 1　a_3、a_2 比较的可能度值与排序值

	p_{32}	λ_2	λ_3
P_5	0.5083	1.8139	1.7391
P_6	0.5083	1.8393	1.7896
P_7	0.5083	1.8393	1.7531
P_8	0.5031	1.6027	1.5727
P_{10}	0.0167	0.6785	0.5063

由表 1 可知, 所有公式均得到 $\lambda_2>\lambda_3$, 于是都导出 $a_2\succ a_3$ 的排序结果, 也与可能度 p_{32} 的含义矛盾.

根据可能度的含义, 即文献 [8] 所强调的 "引进可能度的本意是用可能度来刻画一个区间数大于另一个区间数的程度", 由上面前 8 个可能度公式计算的结果都表明区间数 a_3 大于区间数 a_2 的程度超过 0.5 (对于公式 10, 改为 "超过 0"). 这说明, 从可能度的含义出发应理解为 a_3 大于 a_2. 因此, 从这一角度来看, 可能度矩阵行求和法是一种不科学的排序方法.

角度 2: 从区间数排序的保序性考虑. 利用可能度矩阵行求和法对 a_1、a_2 和 a_3 三个区间数进行排序时, 得到了 a_2 "大于" a_3 的结论. 下面, 增加一个区间数 $a_4=[10,12]$, 对 4 个区间数 a_1,a_2,a_3,a_4 进行排序. 为了行文方便, 以下仅对公式 1 的结果进行分析, 利用其他公式也会得到相同的结论. 由公式 1 可得, $P(a_2>a_4)=0$, $P(a_3>a_4)=0.2143$. 此时, $\lambda_2=1.7315$, $\lambda_3=1.8705$, 那么由可能度矩阵行求和法得到 $a_3\succ a_2$, 这说明按照同样的排序方法却得到了与之前相反的结论. 区间数作为实数的推广, 区间数的排序是大小的排序, 若采用同一可能度公式, 则相同的两个区间数的排序结果不能因为在不同的比较场

合而有所不同, 也不能因为研究问题的不同而有所改变, 即区间数的排序应该满足保序性. 从这一角度来看, 可能度矩阵的行求和法用于区间数排序时不满足保序性, 因而也是不科学的.

虽然文献 [13] 和文献 [14] 都对基于可能度矩阵的排序方法进行了分析, 但都没有指出最核心的问题, 即这种方法在某些情形下可能给出错误的排序结果. 如文献 [13] 虽然指出基于可能度矩阵的排序方法没有保序性, 但却忽视了第 1 种错误的存在; 文献 [14] 只是指出这种方法计算复杂, 也没有注意到第 1 种错误问题. 因为可能度矩阵行求和法思路清晰且简便易行, 因此很受研究者的青睐, 并被广为采用[10]. 这说明, 对基于可能度的区间数排序方法有必要进行进一步的说明和改进.

2.2 关于问题的成因分析

文献 [6-9] 均强调, 上述排序方法的理论依据是: 可能度矩阵 P 为模糊判断矩阵. 为了便于分析, 下面简要介绍模糊判断矩阵的有关结论.

定义 1[20] 设二元对比矩阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$ 满足下列性质: 1) $p_{ii}=0.5$; 2) $p_{ij}+p_{ji}=1(i,j\in I)$. 则称矩阵 P 为模糊判断矩阵.

定义 2[20] 对于模糊判断矩阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$, 若对任意 $i,j,k\in I$, 均有 $p_{ik}+p_{kj}=p_{ij}+0.5$, 则称矩阵 P 具有完全一致性 (或称 P 为模糊一致性矩阵).

模糊判断矩阵是层次分析法中乘积比较矩阵的拓展, 它是由决策者或领域专家对一组方案进行两两比较的结果所形成的矩阵. 因为现实世界的复杂性以及人类认识的局限性, 个人的主观判断难免会有一定的偏差, 比如人们在对众多对象进行两两比较时, 可能会出现 A 优于 B, B 优于 C, C 优于 A 这样不合常理的循环结论. 这种现象用数学语言进行刻画就是建立的比较矩阵仅为模糊判断矩阵, 而非模糊一致性矩阵. 因此, 利用模糊判断矩阵对方案进行排序时一般要先进行一致性处理, 即在尽量保持原有信息的基础上将模糊判断矩阵转化为模糊一致性矩阵[18-21], 然后利用修正得到的模糊一致性矩阵对原模糊判断矩阵进行排序. 关于模糊一致性矩阵, 有如下结论.

定理 1 设 $P=(p_{ij})_{n\times n}$ 是模糊一致性矩阵, 令 $\lambda_i=\sum\limits_{j=1}^{n}p_{ij}(i=1,2,\cdots,n)$, 那么 $\lambda_k\geqslant\lambda_l$ 的充要条件是 $p_{kl}\geqslant 0.5\,(k,l\in I)$.

证明 由一致性条件有 $\lambda_k-\lambda_l=\sum\limits_{j=1}^{n}(p_{kj}-p_{lj})=n(p_{kl}-0.5)$, 于是 $\lambda_k\geqslant\lambda_l\Leftrightarrow p_{kl}\geqslant 0.5$. □

在利用模糊判断矩阵的排序方法对区间数进行排序时, 虽然有定理 1 作保证, 但却忽略了模糊判断矩阵排序与区间数排序之间的重要差异: 模糊判断矩阵是决策者关于决策对象进行两两比较时的主观判断结果. 正如前面的分析所强调的, 主观判断的结果很可能出现循环链的情形. 这说明在利用由主观判断结果所建立的模糊判断矩阵对方案进行排序时, 模糊判断矩阵提供的信息 "并不完全可信", 还需要对其进行合理的修正, 并且修正后的矩阵所导出的排序结果就 "视为" 原模糊判断矩阵的排序结果. 这也正是利用改造得到的模糊一致性矩阵对原模糊判断矩阵进行排序的基本思想[18-21], 这样处理显然是科学、可信的. 但对区间数排序时却不存在上述形式的主观判断. 因为区间数是实数系的推广, 每一个区间数是客观存在的, 区间数的排序是反映区间数之间 "大小" 的比较关系, 这种大小关系是客观、不变的. 对两个给定的区间数而言, 比较方法给定之后, 其大小关系应该是固定的. 这就是说, 可能度矩阵提供的信息是 "完全可信" 的, 不能、也不应该再对其进行修正. 其实, 性质 2 也说明, 利用可能度或可能度矩阵对区间数进行排序时, 不可能出现 a 大于 b, b 大于 c, c 大于 a 这样的情形. 因此, 在利用可能度矩阵对区间数进行排序时, 不能将可能度矩阵化成模糊一致性矩阵. 换言之, 模糊判断矩阵的排序方法不能应用于区间数的排序, 否则会得到不合理的排序结果. 可能度矩阵行求和法恰恰忽略了上述差异, 并且在应用时还忽略了可能度矩阵仅仅是模糊判断矩阵而非模糊一致性矩阵这一重要信息, 例如, 设有 3 个区间数 a_i,a_j,a_k, 假定 $p_{ik}=P(a_i>a_k)=0.7$, $p_{kj}=P(a_k>a_j)=0.9$, 如果可能度矩阵为模糊一致性矩阵, 则 $p_{ij}=P(a_i>a_j)=0.7+0.9-0.5=1.1>1$, 不满足要求. 这说明可能度矩阵不一定是模糊一致性矩阵, 因而不能以定理 1 作为可能度矩阵排序法的理论依据.

遗憾的是, 很多学者忽视了上述可能出现的情况, 并将定理 1 的结论很自然地推广到可能度矩阵, 有的甚至将其以定理的形式进行强调. 如文献 [6-7] 在建立可能度矩阵以后, 强调可能度矩阵为模糊判断矩阵, 据此提出可用文献 [18] 中关于模糊判断矩阵的排序方法来求解可能度矩阵的排序向量, 并将其作为可能度矩阵行求和法的理论基础. 文献 [8] 以定理的形式给出了模糊判断矩阵转化为模糊一致性矩阵的公式, 以及由模糊一致性矩阵求排序向量的方法 (见文献 [8] 定理 3), 并在给出定理前特别强调 "该区间数排序方法基于如下定理". 文献 [9] 不加证明地给出以下结论并将其作为区间数排序的理论基础 (见文献 [9] 的性质 6): 设 $P=(p_{ij})_{n\times n}$ 是可能度矩阵, 令 $\lambda_i=\sum\limits_{j=1}^{n}p_{ij}(i=1,2,\cdots,n)$, 若 $p_{kl}\geqslant 0$, 则 $\lambda_k\geqslant\lambda_l$.

注 1　仍以前面讨论的 3 个区间数为例, 由公式 10 有 $P(a_3 > a_2) = 0.02 > 0$, 但 $\lambda_3 < \lambda_2$, 这说明文献 [9] 的性质 6 的结论是错误的.

3　改进的区间数排序方法

3.1　改进的排序方法及其理论依据

下面给出改进的基于可能度的区间数排序方法及其计算步骤.

Step 1　假定需对一组区间数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 进行排序, 先对区间数进行两两比较, 求得相应的可能度 $p_{ij} = P(a_i > a_j)(i, j \in I)$, 建立可能度矩阵 $P = (p_{ij})_{n\times n}$.

Step 2　构造布尔矩阵 $Q = (q_{ij})_{n\times n}$, 称 Q 为区间数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的排序矩阵, 其中

$$q_{ij} = \begin{cases} 1,\ p_{ij} \geqslant 0.5; \\ 0,\ p_{ij} < 0.5. \end{cases} \tag{12}$$

注 2　对于公式 10, 当 $p_{ij} \geqslant 0$ 时, $q_{ij} = 1$; 当 $p_{ij} < 0$ 时, $q_{ij} = 0$. 以下关于 p_{ij} 和 q_{ij} 的讨论均类似处理, 将不再特别说明.

Step 3　令 $\lambda'_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}$, 得到排序向量 $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots, \lambda'_n)$.

Step 4　根据 λ'_i 的大小对区间数进行排序.

下面的定理为上述排序方法提供了理论依据.

定理 2　给定一组区间数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 设 $P = (p_{ij})_{n\times n}$ 和 $Q = (q_{ij})_{n\times n}$ 分别为其对应的可能度矩阵和排序矩阵, 令 $\lambda'_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则 $\lambda'_i \geqslant \lambda'_j \Leftrightarrow p_{ij} \geqslant 0.5$.

证明　先证 "$\Rightarrow$". 若不然, 有 $p_{ij} < 0.5$. 由性质 2 可得, 对于任意 k, 若 $p_{ik} \geqslant 0.5$, 则必有 $p_{jk} \geqslant 0.5$. 于是, 根据排序矩阵 Q 的定义, 有 $\lambda'_i < \lambda'_j$, 与条件矛盾. 故 $p_{ij} \geqslant 0.5$.

再证 "$\Leftarrow$". 由性质 2 可得, 对于任意 k, 若 $p_{jk} \geqslant 0.5$, 则必有 $p_{ik} \geqslant 0.5$. 据此, 有 $\lambda'_i \geqslant \lambda'_j$. □

3.2　与可能度矩阵行求和法的对比分析

下面利用排序矩阵 Q 对上述 3 个区间数 $a_1 = [0, 8]$、$a_2 = [4.8, 9]$、$a_3 = [1, 13]$ 进行排序, 并以公式 1 为例来说明计算步骤.

Step 1: 计算可能度并构造可能度矩阵, 见式 (11).

Step 2: 构造排序矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Step 3: 计算排序向量, 得 $\lambda' = (1, 2, 3)$.

Step 4: 根据排序向量对区间数进行排序, 得 $a_3 \succ a_2 \succ a_1$, 排序结果与可能度的含义一致.

当对 4 个区间数 $a_1 = [0, 8]$、$a_2 = [4.8, 9]$、$a_3 = [1, 13]$ 和 $a_4 = [10, 12]$ 进行排序时, 有

$$P = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.2623 & 0.35 & 0 \\ 0.7377 & 0.50 & 0.4938 & 0 \\ 0.65 & 0.5062 & 0.50 & 0.2143 \\ 1 & 1 & 0.7857 & 0.50 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

于是, 得到排序向量 $\lambda' = (1, 2, 3, 4)$, 排序结果为 $a_4 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_1$, 与 3 个区间数得到的排序结果不冲突. 可知改进的排序方法满足保序性.

为了进一步对比分析改进的排序方法与可能度行求和法, 下面分别用这两个方法对其他几个公式得到的可能度值进行排序. 仅以 a_1, a_2, a_3 的排序为例, 结果见表 2 (利用公式 8 时, 取 $\rho = 2.718$). 关于 a_1, a_2, a_3, a_4 排序的讨论可类似进行.

表 2　两种排序方法对 a_1, a_2, a_3 的排序结果

公式	λ	排序结果	λ'	排序结果
P_5	(0.95,1.81,1.74)	$a_2 \succ a_3 \succ a_1$	(1,2,3)	$a_3 \succ a_2 \succ a_1$
P_6	(0.87,1.84,1.79)	$a_2 \succ a_3 \succ a_1$	(1,2,3)	$a_3 \succ a_2 \succ a_1$
P_7	(0.91,1.84,1.74)	$a_2 \succ a_3 \succ a_1$	(1,2,3)	$a_3 \succ a_2 \succ a_1$
P_8	(1.32,1.60,1.57)	$a_2 \succ a_3 \succ a_1$	(1,2,3)	$a_3 \succ a_2 \succ a_1$
P_{10}	(−1.18,0.68,0.51)	$a_2 \succ a_3 \succ a_1$	(1,2,3)	$a_3 \succ a_2 \succ a_1$

由表 2 可知, 对于所有的可能度公式, 基于布尔矩阵的排序方法得到的结果都与可能度的含义一致. 这进一步验证了改进方法的科学性.

4　结　　论

在区间数排序过程中, 可能度可以反映一个区间数大于另一个区间数的程度, 是一种非常好的处理区间数模糊信息的方法. 众多学者从不同角度构建了不同形式的可能度公式, 极大地丰富了这方面的研究内容. 但是, 区间数的排序是两两比较的结果, 两个区间数之间的大小关系只与相互比较的可能度的大小有关. 因此, 利用可能度矩阵行求和法来对一组区间数进行排序有一定的局限性, 可能导出不合常理的排序结果. 考虑到此种方法简便易行且影响非常广泛, 因而有必要对其予以说明和改进. 本文利用可能度矩阵构造布尔矩阵, 并基于布尔矩阵给出一个改进的区间数排序算法, 并从理论上证明了这种方法的科学性.

参考文献(References)

[1]　吴江, 黄登仕. 区间数排序方法研究综述[J]. 系统工程, 2004, 22(8): 1-4.
(Wu J, Huang D S. An review on ranking methods of

interval numbers[J]. Systems Engineering, 2004, 22(8):1-4.)

[2] Nakahara Y, Sasaki M, Gen M. On the linear programming problems with interval coefficients[J]. Int J of Computer Industrial Engineering, 1992, 23(1/2/3/4): 301-304.

[3] 张全, 樊治平, 潘德惠. 不确定性多属性决策中区间数的一种排序方法[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(5): 129-133.
(Zhang Q, Fan Z P, Pan D H. A ranking approach for interval numbers in uncertain multiple attribute decision making problems[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 1999, 19(5): 129-133.)

[4] 张全, 樊治平, 潘德惠. 区间数多属性决策中一种带有可能度的排序方法[J]. 控制与决策, 1999, 14(6): 703-711.
(Zhang Q, Fan Z P, Pan D H. A ranking approach with possibilities for multiple attribute decision making problems with intervals[J]. Control and Decision, 1999, 14(6): 703-711.)

[5] 达庆利, 刘新旺. 区间数线性规划及其满意解[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(4): 3-7.
(Da Q L, Liu X W. Interval number linear programming and its satisfactory solution[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 1999, 19(4): 3-7.)

[6] 徐泽水, 达庆利. 区间数的排序方法研究[J]. 系统工程, 2001, 19(6): 94-96.
(Xu Z S, Da Q L. Research on method for ranking interval numbers[J]. Systems Engineering, 2001, 19(6): 94-96.)

[7] 徐泽水, 达庆利. 区间数排序的可能度法及其应用[J]. 系统工程学报, 2003, 18(1): 67-70.
(Xu Z S, Da Q L. Possibility degree method for ranking interval numbers and its application[J]. J of Systems Engineering, 2003, 18(1): 67-70.)

[8] 张吉军. 区间数的排序方法研究[J]. 运筹与管理, 2003, 12(3): 18-22.
(Zhang J J. Research on method for ranking interval numbers[J]. Operations Research and Management Science, 2003, 12(3): 18-22.)

[9] 李志林. 区间数的一种改进的排序方法[J]. 数学的实践与认识, 2004, 34(6): 124-127.
(Li Z L. A new improved ranking approach for interval numbers[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2004, 34(6): 124-127.)

[10] 孙海龙, 姚卫星. 区间数排序方法评述[J]. 系统工程学报, 2010, 25(3): 304-312.
(Sun H L, Yao W X. Comments on methods for ranking interval numbers[J]. J of Systems Engineering, 2010, 25(3): 304-312.)

[11] 李德清, 谷云东. 一种基于可能度的区间数排序方法[J]. 系统工程学报, 2008, 23(2): 223-226.
(Li D Q, Gu Y D. Method for ranking interval numbers based on possibility degree[J]. J of Systems Engineering, 2008, 23(2): 223-226.)

[12] 肖峻, 张跃, 付川. 基于可能度的区间数排序方法比较[J]. 天津大学学报, 2011, 44(8): 705-711.
(Xiao J, Zhang Y, Fu C. Comparison between methods of interval number ranking based on possibility[J]. J of Tianjin University, 2011, 44(8): 705-711.)

[13] 高峰记. 可能度及区间数综合排序[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(8): 2033-2040.
(Gao F J. Possibility degree and comprehensive priority of interval numbers[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(8): 2033-2040.)

[14] 王中兴, 邵翠丽, 唐芝兰. 基于相对优势度的区间数排序及其在多属性决策中的应用[J]. 模糊系统与数学, 2013, 27(2): 142-148.
(Wang Z X, Shao C L, Tang Z L. Method for ranking interval numbers based on relative superiority and its application to multiple attribute decision making[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2013, 27(2): 142-148.)

[15] Kundu S. Min-transitivity of fuzzy leftness relationship and its application to decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 86(3): 357-367.

[16] 曾文艺, 罗承忠, 肉孜阿吉. 区间数的综合决策模型[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(11): 48-50.
(Zeng W Y, Luo C Z, Rou Z A J. Comprehensive decision model of interval number[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 1997, 17(11): 48-50.)

[17] Sengupta A, Pal T K. On comparing interval numbers[J]. European J of Operation Research, 2000, 127(1): 28-43.

[18] 徐泽水. 模糊互补判断矩阵排序的一种算法[J]. 系统工程学报, 2001, 16(4): 311-314.
(Xu Z S. Algorithm for priority of fuzzy complementary judgement matrix[J]. J of Systems Engineering, 2001, 16(4): 311-314.)

[19] 徐泽水. 模糊互补判断矩阵的排序方法研究[J]. 系统工程与电子技术, 2002, 24(11): 73-75.
(Xu Z S. Study on the prioritizing method for fuzzy complementary judgement matrices[J]. Systems Engineering and Electronics, 2002, 24(11): 73-75.)

[20] 樊治平, 姜艳萍. 模糊判断矩阵排序方法研究的综述[J]. 系统工程, 2001, 19(5): 12-18.
(Fan Z P, Jiang Y P. An overview on ranking methods of fuzzy judgement matrix[J]. Systems Engineering, 2001, 19(5): 12-18.)

[21] 姚敏, 黄燕君. 模糊决策方法研究[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(11): 61-64.
(Yao M, Huang Y J. Research on methodology of fuzzy decision making[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 1999, 19(11): 61-64.)

(责任编辑：齐　霁)