第 31 卷 第 4 期
Vol. 31 No. 4

控 制 与 决 策
Control and Decision

2016 年 4 月
Apr. 2016

文章编号: 1001-0920 (2016) 04-0661-06 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2015.0152

基于互逆分数阶算子的GM(1,1) 阶数优化模型

孟 伟[1,2], 刘思峰[1], 方志耕[1], 曾 波[2]

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 210016；2. 重庆工商大学
电子商务及供应链系统重庆市重点实验室，重庆 400067)

摘 要: 在互逆的分数阶累加生成算子和分数阶累减生成算子的基础上, 建立分数阶算子GM(1,1) 模型, 均值GM(1,1) 模型是当$r=1$时的特例. 给出分数阶算子GM(1,1) 模型最小平均相对误差下最优阶数的粒子群优化算法. 多个验证实例表明, 通过对阶数进行优化, 分数阶算子GM(1,1) 模型可具有比GM(1,1)、DGM(1,1) 等模型更高的拟合精度.

关键词: 灰色预测模型；分数阶算子；GM(1,1) 模型
中图分类号: N941.5 **文献标志码:** A

GM(1,1) with optimized order based on mutual fractional operators

MENG Wei[1,2], *LIU Si-feng*[1], *FANG Zhi-geng*[1], *ZENG Bo*[2]

(1. College of Economics and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016, China；2. Chongqing Key Laboratory of Electronic Commerce & Supply Chain System，Chongqing Technology and Business University，Chongqing 400067，China．Correspondent：MENG Wei，E-mail：mongvi@126.com)

Abstract: Based on the fractional order grey accumulating generation operator and reducing generation operator, the fractional order grey prediction model is proposed. The even GM(1,1) is a special case of the fractional order grey prediction model with $r=1$. Then the particle swarm optimization algorithm for the optimized fractional order of the minimum average relative error is presented. The case study shows that the fractional order operator GM(1,1) with optimized order can achieve better fitting precision than DGM(1,1), GM(1,1) and some other optimized GM(1,1) models.

Keywords: grey prediction model；fractional order operator；GM(1,1)

0 引 言

灰色预测模型研究的重点在于解决小样本以及贫信息不确定性的问题, 已成为预测领域的一个重要分支[1-2]. GM(1,1) 模型作为灰色预测理论的基本模型, 其建模方法研究一直非常活跃. 研究人员先后提出背景值优化法[4-5]、灰导数白化值优化法[6]、级差格式优化法[7]、遗传算法优化参数法[8]、新陈代谢建模法[9]、离散法[10]、级比优化法[11]、离散指数函数优化法[12]、缓冲算子法[13]、背景值和边值修正优化法[14]、区间灰数建模[15-16]等方法. 此外, 文献 [17] 也系统地研究了 GM(1,1) 模型的几种基本形式和适用范围.

这些优化方法的共同点都在于基于一阶累加生成序列建模, 再通过一阶累减还原得到预测值. 文献 [18-19] 研究了分数阶 GM(1,1) 模型的稳定性和求解方法, 但只是基于分数阶 ($r\in(0,1)$) 累加生成序列建模, 再一阶累减还原, 未研究分数阶累减生成算子和阶数确定方法, 在建模方法上受到了局限.

本文在分数阶累加生成算子和分数阶累减生成算子的基础上给出分数阶算子 GM(1,1) 模型的建模方法, 并利用粒子群优化算法求解最小平均相对误差的最优阶数. 多个实例表明, 通过对累加生成序列的阶数进行优化, 分数阶算子 GM(1,1) 模型可具有更好的拟合精度.

收稿日期: 2015-01-30；**修回日期:** 2015-04-28.

基金项目: 欧盟委员会第 7 研究框架“玛丽·居里国际智力引进计划”项目(FP7-PIIF-GA-2013-629051)；国家自然科学基金项目(91324003, 71271226)；教育部人文社科基金项目(12YJC630140, 14YJAZH033)；重庆市科委前沿与应用基础研究项目(cstc2014jcyjA00024)；重庆市教委科技项目(KJ1400606)；发改高技项目((2012)2218-R121201).

作者简介: 孟伟(1979−), 男, 副教授, 博士生, 从事灰色系统理论、系统建模与仿真的研究；刘思峰(1955−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、复杂装备研制管理等研究.

1 分数阶累加与累减生成算子

定义 1[2] 设 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$ 为原始序列, $X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$ 为 $X^{(0)}$ 的一阶累加生成序列, 其中

$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),\ k=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

定理 1[3] 设 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$ 为原始序列, $r\in R^{+}$, $X^{(r)}=(x^{(r)}(1),x^{(r)}(2),\cdots,x^{(r)}(n))$ 为 $X^{(0)}$ 的 r 阶累加生成序列, 其中

$$x^{(r)}(k)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\Gamma(r+k-i)}{\Gamma(k-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i),\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

式 (2) 的矩阵表达形式为

$$x^{(r)}(k)=\Big[\frac{\Gamma(r+k-1)}{\Gamma(k)\Gamma(r)},\frac{\Gamma(r+k-2)}{\Gamma(k-1)\Gamma(r)},\cdots,\frac{\Gamma(r)}{\Gamma(1)\Gamma(r)}\Big]\times\begin{bmatrix}x^{(0)}(1)\\x^{(0)}(2)\\\vdots\\x^{(0)}(k)\end{bmatrix},\ k=1,2,\cdots,n. \tag{3}$$

定义 2[2] 设 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$ 为原始序列, 并且 $X^{(-1)}=(x^{(-1)}(1),x^{(-1)}(2),\cdots,x^{(-1)}(n))$ 为 $X^{(0)}$ 的一阶累减生成序列, 其中

$$x^{(-1)}(k)=x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k-1),\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{4}$$

定理 2[3] 设 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$ 为原始序列, $r\in R^{+}$, $X^{(-r)}=(x^{(-r)}(1),x^{(-r)}(2),\cdots,x^{(-r)}(n))$ 为 $X^{(0)}$ 的 r 阶累减生成序列, 其中

$$x^{(-r)}(k)=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i}\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(r-i+1)}x^{(0)}(k-i),\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{5}$$

式 (5) 的矩阵表达形式为

$$x^{(-r)}(k)=\Big[\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(1)\Gamma(r+1)},\cdots,\frac{(-1)^{k-1}\Gamma(r+1)}{\Gamma(k)\Gamma(r-k+2)}\Big]\times\begin{bmatrix}x^{(0)}(k)\\x^{(0)}(k-1)\\\vdots\\x^{(0)}(r-k+1)\end{bmatrix},\ k=1,2,\cdots,n. \tag{6}$$

定理 3[3] 设 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$ 为原始序列, $r\in R^{+}$, $X^{(r)}$ 是 $X^{(0)}$ 的 r 阶累加生成序列, $X^{(-r)}$ 是 $X^{(0)}$ 的 r 阶累减生成序列, r 阶累加生成算子与 r 阶累减生成算子互为逆运算, 即

$$X^{(0)}=(X^{(r)})^{(-r)}=(X^{(-r)})^{(r)}. \tag{7}$$

2 分数阶算子灰色 GM(1,1) 模型

定义 3 设 $X^{(0)}$ 为原始序列, $X^{(r)}$ 如定理 1 所示, $Z^{(r)}=(z^{(r)}(2),z^{(r)}(3),\cdots,z^{(r)}(n))$, 其中

$$z^{(r)}(k)=\frac{x^{(r)}(k)+x^{(r)}(k-1)}{2},\quad k=2,3,\cdots,n, \tag{8}$$

则称

$$x^{(r-1)}(k)+az^{(r)}(k)=b \tag{9}$$

为分数阶算子 GM(1,1) 模型.

特别地, 当 $r=1$ 时, $x^{(r-1)}(k)+az^{(r)}(k)=b$ 变为 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$, 即此时该模型为均值 GM(1,1) 模型.

定理 4 设 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$ 为原始序列, $r\in R^{+}$, 变量 $X^{(r)}$、$X^{(-r)}$、$Z^{(r)}$ 分别如定理 1、定理 2 和定义 3 所示, 分数阶算子 GM(1,1) 模型 $x^{(r-1)}(k)+az^{(r)}(k)=b$ 中的参数向量 $\hat{a}=[a,b]^{\mathrm{T}}$ 可以运用最小二乘法估计, 即

$$\hat{a}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y, \tag{10}$$

其中 Y, B 分别为

$$Y=\begin{bmatrix}x^{(r-1)}(2)\\x^{(r-1)}(3)\\\vdots\\x^{(r-1)}(n)\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-z^{(r)}(2)&1\\-z^{(r)}(3)&1\\\vdots&\vdots\\-z^{(r)}(n)&1\end{bmatrix}. \tag{11}$$

因为

$$x^{(r-1)}(k)=x^{(r)}(k)-x^{(r)}(k-1)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\Gamma(r+k-i)}{\Gamma(k-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\Gamma(r+k-i-1)}{\Gamma(k-i)\Gamma(r)}x^{(0)}(i),\quad k=2,3,\cdots,n,$$

所以

$$z^{(r)}(k)=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{\Gamma(r+k-i)}{\Gamma(k-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)}{2}+\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\Gamma(r+k-i)}{\Gamma(k-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)}{2},\quad k=2,3,\cdots,n,$$

$$Y=\begin{bmatrix}\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\frac{\Gamma(r+2-i)}{\Gamma(2-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)-\sum_{i=1}^{1}\frac{\Gamma(r+2-1-i)}{\Gamma(2-i)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\Gamma(r+3-i)}{\Gamma(3-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)-\sum_{i=1}^{2}\frac{\Gamma(r+3-1-i)}{\Gamma(3-i)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)\\ \vdots\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\Gamma(r+n-i)}{\Gamma(n-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\Gamma(r+n-1-i)}{\Gamma(n-i)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}(r-1)x^{(0)}(1)+x^{(0)}(2)\\ \dfrac{r(r-1)}{2}x^{(0)}(1)+(r-1)x^{(0)}(2)+x^{(0)}(3)+\cdots\\ \vdots\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\Gamma(r+n-i)}{\Gamma(n-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\Gamma(r+n-1-i)}{\Gamma(n-i)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}-\dfrac{x^{(r)}(1)+x^{(r)}(2)}{2} & 1\\ -\dfrac{x^{(r)}(2)+x^{(r)}(3)}{2} & 1\\ \vdots & \vdots\\ -\dfrac{x^{(r)}(n-1)+x^{(r)}(n)}{2} & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{2}\Big[\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\frac{\Gamma(r+2-i)}{\Gamma(2-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)+\sum_{i=1}^{1}\frac{\Gamma(r+1-i)}{\Gamma(1-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)\Big] & 1\\ -\dfrac{1}{2}\Big[\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\Gamma(r+3-i)}{\Gamma(3-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)+\sum_{i=1}^{2}\frac{\Gamma(r+2-i)}{\Gamma(2-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)\Big] & 1\\ \vdots & \vdots\\ -\dfrac{1}{2}\Big[\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\Gamma(r+n-i)}{\Gamma(n-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\Gamma(r+n-1-i)}{\Gamma(n-1-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)\Big] & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{2}\Big[(r+1)x^{(0)}(1)+x^{(0)}(2)\Big] & 1\\ -\dfrac{1}{2}\Big[\dfrac{r(r+3)}{2}x^{(0)}(1)+(r+1)x^{(0)}(2)+x^{(0)}(3)\Big] & 1\\ \vdots & \vdots\\ -\dfrac{1}{2}\Big[\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\Gamma(r+n-i)}{\Gamma(n-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\Gamma(r+n-i)}{\Gamma(n-i+1)\Gamma(r)}x^{(0)}(i)\Big] & 1\end{bmatrix}.$$

定义 4　称

$$\frac{\mathrm{d}x^{(r)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(r)}=b \tag{12}$$

为分数阶算子 GM(1,1) 模型 $x^{(r-1)}(k)+az^{(r)}(k)=b$ 的白化微分方程.

定理 5　设 B、Y、$\hat{a}$ 如定理 4 所述, 则满足如下 3 个条件:

1) 分数阶算子 GM(1,1) 模型的白化微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x^{(r)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(r)}=b$ 的解, 即时间响应函数为

$$\hat{x}^{(r)}(t)=\Big(x^{(r)}(1)-\frac{b}{a}\Big)\mathrm{e}^{-at}+\frac{b}{a}; \tag{13}$$

2) 分数阶算子 GM(1,1) 模型 $x^{(r-1)}(k)+az^{(r)}(k)=b$ 的时间响应序列为

$$\hat{x}^{(r)}(k)=\Big(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\Big)\mathrm{e}^{-a(k-1)}+\frac{b}{a},\quad k=2,3,\cdots,n; \tag{14}$$

3) 还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k)=(\hat{x}^{(r)})^{(-r)}(k)=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i}\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(r-i+1)}\hat{x}^{(r)}(k-i),\quad k=2,3,\cdots,n,\ \hat{x}^{(0)}(1)=x^{(0)}(1). \tag{15}$$

3　阶数优化粒子群算法

粒子群优化算法 (PSO) 是 Eberhart 和 Kennedy 于 1995 年提出的一种全局优化进化算法[20], 其基本思

想源于对鸟群觅食行为的研究. PSO 算法具有概念简单、需要调整参数不多、易于编程实现等优点, 已广泛应用于函数优化和神经网络训练等领域[21].

针对粒子群优化算法存在的早熟收敛现象, 文献 [22] 提出了基于群体适应度方差自适应变异的粒子群优化算法, 可显著提高全局收敛性能. 最小平均相对误差下分数阶算子 GM(1,1) 模型的最优阶数在于求解如下最优化问题:

$$\min f(r)=\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\frac{|x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)|}{x^{(0)}(k)},\ r\in R^{+}. \tag{16}$$

最优阶数的自适应变异粒子群优化算法计算流程如下.

Step 1: 随机初始化粒子群中粒子的位置和速度, 可取 pBest $=1$, 即均值 GM(1,1) 模型.

Step 2: 将粒子中的 pBest 设置为当前位置, gBest 设置为初始群体中最佳粒子的位置.

Step 3: 计算分数阶算子 GM(1,1) 模型在 $r=$ pBest 时的平均相对误差:

1) 计算原始序列 $X^{(0)}$ 的 r 阶累加生成序列 $X^{(r)}$;

2) 对 $X^{(r)}$ 作紧邻均值生成序列 $Z^{(r)}$;

3) 计算 $X^{(r)}$ 的一阶累减生成序列 $X^{(r-1)}$;

4) 求解参数 $\hat{a}=[a,b]^{\mathrm{T}}$;

5) 确定 $\hat{x}^{(r)}(k)$ 的时间响应式;

6) 计算 $X^{(r)}$ 的模拟值;

7) 还原求出 $X^{(0)}$ 的模拟值;

8) 计算平均相对误差 f(pBest);

9) 判断 $|f(\text{pBest})-f(\text{gBest})|$ 是否小于给定收敛值, 如果满足, 则转向 Step 9, 否则执行 Step 4.

Step 4: 对于所有粒子, 执行如下操作:

1) 更新粒子的位置和速度

$$V=\omega\times V+c_1\times\text{rand}\times(\text{pBest}-\text{Present})+ c_2\times\text{rand}\times(\text{gBest}-\text{Present}),$$

$$\text{Present}=\text{Present}+V,$$

$$\omega=\omega_{\max}-\text{run}\times\frac{(\omega_{\max}-\omega_{\min})}{\text{runMax}};$$

2) 如果粒子的适应度优于 pBest 的适应度, 则将 pBest 设置为新位置;

3) 如果粒子的适应度优于 gBest 的适应度, 则将 gBest 设置为新位置.

Step 5: 计算群体适应度方差 σ^2 和 f(gBest), 令

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{f_i-f_{\text{avg}}}{f}\Big)^2;$$

$$f=\begin{cases}\max\{|f_i-f_{\text{avg}}|\},\ \max\{|f_i-f_{\text{avg}}|\}>1;\\ 1,\ \text{others}.\end{cases}$$

Step 6: 计算变异概率

$$p_m=\begin{cases}k,\ \sigma^2<\sigma_d^2\ \text{and}\ f(\text{gBest})>f_d;\\ 0,\ \text{others}.\end{cases}$$

Step 7: 产生随机数 $\varepsilon\in[0,1]$, 如果 $\varepsilon<p_m$, 则按式 $\text{gBest}_k=\text{gBest}_k\times(1+0.5\times\eta)$ 执行变异操作, 否则转向 Step 8.

Step 8: 判断算法收敛准则是否满足, 如果满足, 则执行 Step 9, 否则转向 Step 3.

Step 9: 输出 gBest, 即 r 最优取值, 输出 $r=$ gBest 的分数阶算子 GM(1,1) 模型的预测值 $\hat{x}^{(0)}(k)$、相对误差 Δ_k 和平均相对误差 Δ, 算法运行结束.

4 实例比较

例 1 文献 [8] 提出了遗传算法优化背景值参数和边值, 通过我国 1991～1997 年电子器件产品产值建立遗传算法优化 GM(1,1) 模型, 预测 1998 年电子器件产品产值. 文献 [8] 模型的误差平方和高于文献 [7] 的 GM^P(1,1) 模型和灰色 Logistic II 模型的误差平方和, 但平均相对误差低于后两个模型, 1998 年预测值精度介于后两个模型之间. 本文通过粒子群优化算法可知, 分数阶算子 GM(1,1) 模型在 $r=0.514$ 时具有最小平均相对误差, 即为 4.535%, 误差平方和为 685.1. 1998 年的预测误差为 0.065%, 拟合精度和预测精度均高于文献 [7]、文献 [8]、DGM(1,1)、均值 GM(1,1) 模型结果. 原始数据见表 1, 模拟预测结果比较见表 2.

表 1 中国电子器件产品产值[8] 亿元

年份	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
$x^{(0)}(k)$	112	128	170	257	312	382	480	597

表 2 中国电子器件产品产值数据模拟和预测结果

方法	1991～1997 年模拟值		1998 年预测值	
	误差平方和	Δ /%	预测值	相对误差 /%
文献 [7] GM^P(1,1)	1 174.9	4.946	625.368	−4.75
文献 [7] Logistic II	931.0	4.636	593.866	0.53
文献 [8] 模型	1 523.2	4.594	615.950	−3.17
DGM(1,1) 模型	1 234.2	6.343	628.177	−5.22
$r=1$	1 166.9	5.974	620.685	−3.97
$r=0.514$	685.1	4.535	596.615	0.065

例 2 文献 [11] 提出了基于级比优化的广义 GM(1,1) 模型, 对我国 2000～2007 年的 GDP 数据进行了拟合和预测分析, 并与微分 GM(1,1) 模型和差分 GM(1,1) 模型进行比较, 级比优化模型具有较高的拟合和预测精度. 本文通过粒子群优化算法可知, 分数阶算子 GM(1,1) 模型在 $r=1.173$ 时具有最小平均相对误差, 即为 0.51%, 精度显著高于文献 [11] 模型的 1.48%、DGM(1,1) 模型的 1.99% 和均值 GM(1,1) 模型的 1.42%, 结果比较见表 3.

表 3　我国 GDP 数据模拟误差表

年份	GDP /亿元	DGM(1,1) 模型		文献 [11] 模型		$r=1$		$r=1.173$	
	$x^{(0)}(k)$	$\hat{x}^{(0)}(k)$	Δ_k /%	$\hat{x}^{(0)}(k)$	Δ_k /%	$\hat{x}^{(0)}(k)$	Δ_k /%	$\hat{x}^{(0)}(k)$	Δ_k /%
2000	99 214.6								
2001	109 655.2	104 351.6	4.84	108 326.3	1.21	104 142.7	5.03	109 651.2	0
2002	120 332.7	120 397.1	0.05	123 645.1	2.75	120 131.5	0.17	120 211	0.1
2003	135 822.8	138 909.8	2.27	141 130.3	3.91	138 574.9	2.03	136 433.7	0.45
2004	159 878.3	160 269	0.24	161 088.1	0.76	159 850.0	0.02	157 074.5	1.75
2005	183 217.4	184 912.5	0.93	183 868.2	0.36	184 391.3	0.64	182 211.5	0.55
2006	211 923.5	213 345.2	0.67	209 869.7	0.97	212 700.4	0.37	212 324.7	0.19
2007	249 529.9	246 149.9	1.35	239 548.3	4.00	245 355.6	1.67	248 126	0.56
平均相对误差 Δ /%		1.48		1.99		1.42		0.51	

表 4　江苏省财政科技投入数据模拟误差表

年份	投入 /亿元	DGM(1,1) 模型		文献 [12] 模型		$r=1$		$r=1.243$	
	$x^{(0)}(k)$	$\hat{x}^{(0)}(k)$	Δ_k /%	$\hat{x}^{(0)}(k)$	Δ_k /%	$\hat{x}^{(0)}(k)$	Δ_k /%	$\hat{x}^{(0)}(k)$	Δ_k /%
1997	8.21								
1998	9.52	8.78	7.75	9.12	4.20	8.75	8.08	9.52	0.02
1999	10.51	10.53	0.15	10.83	3.04	10.48	0.25	10.55	0.37
2000	12.72	12.61	0.83	12.88	1.26	12.56	1.26	12.34	2.96
2001	14.84	15.12	1.87	15.30	3.10	15.05	1.39	14.74	0.70
2002	17.89	18.12	1.28	18.19	1.68	18.03	0.76	7.77	0.70
2003	21.22	21.71	2.33	21.62	1.89	21.60	1.77	21.54	1.49
2004	26.79	26.02	2.86	25.69	4.11	25.87	3.42	26.20	2.21
平均相对误差 Δ /%		2.44		2.75		2.42		1.21	

例 3　文献 [12] 提出了基于离散指数函数优化的 GM(1,1) 模型, 以江苏省 1997～2004 年财政科技投入数据来验证模型, 可以得出模拟和预测精度高于原始 GM(1,1) 模型和文献 [5] 中背景值优化模型. 本文通过粒子群优化算法可知, 分数阶算子 GM(1,1) 模型在 $r=1.243$ 时具有最小平均相对误差, 即 1.21%, 拟合精度高于文献 [12]、DGM(1,1) 和均值 GM(1,1) 三个模型的结果, 结果比较见表 4.

5　结　论

在分数阶累加生成算子和分数阶累减生成算子的基础上, 建立分数阶算子 GM(1,1) 模型. 按照平均相对误差最小原理给出分数阶算子 GM(1,1) 模型阶数 r 取值的粒子群优化算法. 多个实例结果表明, 均值 GM(1,1) 模型作为分数阶算子 GM(1,1) 模型在 $r=1$ 时的特例, 在很多情况下都不具有最小平均相对误差. 通过粒子群优化算法求解平均相对误差最小时的最优阶数, 分数阶算子 GM(1,1) 模型可取得比 DGM(1,1)、均值 GM(1,1) 和算例文献中各优化模型更高的拟合精度. 通过对原始序列的累加生成序列阶数进行优化可以提高 GM(1,1) 模型的拟合精度, 从而扩大 GM(1,1) 模型的应用范围.

参考文献(References)

[1] Liu S F, Lin Y. Grey systems: Theory and applications[M]. London: Springer, 2011: 1-3.

[2] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第 7 版. 北京: 科学出版社, 2014: 1-5.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G, et al. Grey system theories and its applications[M]. 7th ed. Beijing: Science Press, 2014: 1-5.)

[3] 孟伟, 曾波. 分数阶算子与灰色预测模型研究[M]. 北京: 科学出版社, 2015: 17-49.
(Meng W, Zeng B. Study on fractional order operators and grey prediction modeling[M]. Beijing: Science Press, 2015: 17-49.)

[4] 王义闹, 李应川, 陈绵云. 一种逐步优化灰导数背景值的 GM(1,1) 建模方法[J]. 系统工程与电子技术, 2001, 23(7): 76-78.
(Wang Y N, Li Y C, Chen M Y. The modeling method of GM(1,1) with a step by step optimum grey derivative's background values[J]. Systems Engineering and Electronics, 2001, 23(7): 76-78.)

[5] 罗党, 刘思峰, 党耀国. 灰色模型 GM(1,1) 优化[J]. 中国工程科学, 2003, 5(8): 50-53.

(Luo D, Liu S F, Dang Y G. The optimization of grey model GM(1,1)[J]. Engineering Science, 2003, 5(8): 50-53.)

[6] Wang Y N, Chen Z J, Gao Z Q, et al. A generalization of the GM(1,1) direct modeling method with a step by step optimizing grey derivative's whiten values and its applications[J]. Kybernetes, 2004, 33(2): 382-389.

[7] 同小军, 陈绵云. 基于级差格式的灰色Logistic模型[J]. 控制与决策, 2002, 17(5): 554-558.
(Tong X J, Chen M Y. Gray Logistic model based on grade difference format[J]. Control and Decision, 2002, 17(5): 554-558.)

[8] 何文章, 宋国乡. 基于遗传算法估计灰色模型中的参数[J]. 系统工程学报, 2005, 20(4): 432-436.
(He W Z, Song G X. Estimation of grey model parameter based on genetic algorithm[J]. J of System Engineering, 2005, 20(4): 432-436.)

[9] 袁景凌, 钟珞, 江琼, 等. 新陈代谢GM(1,1)建模与应用[J]. 武汉理工大学学报: 信息与管理工程版, 2005, 27(2): 168-170.
(Yuan J L, Zhong L, Jiang Q, et al. Modeling and application of metabolic GM(1,1)[J]. J of Wuhan Automotive Polytechnic University: Information & Management Engineering, 2005, 27(2): 168-170.)

[10] 谢乃明, 刘思峰. 离散GM(1,1)模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-99.
(Xie N M, Liu S F. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2005, 25(1): 93-99.)

[11] 周伟, 方志耕, 刘思峰. 基于级比优化的广义GM(1,1)预测模型[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(8): 1433-1438.
(Zhou W, Fang Z G, Liu S F. Generalized GM(1,1) forecast model based on the optimized level ratio[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2010, 30(8): 1433-1438.)

[12] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 基于离散指数函数优化的GM(1,1)模型[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 34(2): 61-67.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. An optimal GM(1,1) based on the discrete function with exponential law[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2008, 34(2): 61-67.)

[13] 崔立志, 刘思峰, 吴正朋. 新的强化缓冲算子的构造及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(3): 484-489.
(Cui L Z, Liu S F, Wu Z P. New strengthening buffer operators and applications[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2010, 30(3): 484-489.)

[14] 张彬, 西桂权. 基于背景值和边值修正的GM(1,1)模型优化[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(3): 682-688.
(Zhang B, Xi G Q. GM(1,1) model optimization based on the background value and boundary value correction[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2013, 33(3): 682-688.)

[15] 曾波, 刘思峰. 一种基于区间灰数几何特征的灰数预测模型[J]. 系统工程学报, 2011, 26(2): 174-180.
(Zeng B, Liu S F. Prediction model of interval grey number based on its geometrical characteristics[J]. J of System Engineering, 2011, 26(2): 174-180.)

[16] 孟伟, 刘思峰, 曾波. 区间灰数的标准化及其预测模型的构建与应用研究[J]. 控制与决策, 2012, 27(5): 773-776.
(Meng W, Liu S F, Zeng B. Standardization of interval grey number and research on its prediction modeling and application[J]. Control and Decision, 2012, 27(5): 773-776.)

[17] 刘思峰, 曾波, 刘解放, 等. GM(1,1)模型的几种基本形式及其适用范围研究[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(3): 501-508.
(Liu S F, Zeng B, Liu J F, et al. Several basic models of GM(1,1) and their applicable bound[J]. Systems Engineering and Electronics, 2014, 36(3): 501-508.)

[18] Wu L F, Liu S F, Yao L G, et al. Grey system model with the fractional order accumulation[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2013, 18(7): 1775-1785.

[19] 吴利丰, 刘思峰, 刘健. 灰色GM(1,1)分数阶累积模型及其稳定性[J]. 控制与决策, 2014, 29(5): 919-924.
(Wu L F, Liu S F, Liu J. GM(1,1) model based on fractional order accumulating method and its stability[J]. Control and Decision, 2014, 29(5): 919-924.)

[20] Kennedy J. Particle swarm optimization[M]. New York: Springer, 2010: 760-766.

[21] 倪庆剑, 邢汉承, 张志政, 等. 粒子群优化算法研究进展[J]. 模式识别与人工智能, 2007, 20(3): 349-357.
(Ni Q J, Xing H C, Zhang Z Z, et al. Survey of particle swarm optimization algorithm[J]. Pattem Recognition and Aitificial Intelligence, 2007, 20(3): 349-357.)

[22] 吕振肃, 侯志荣. 自适应变异的粒子群优化算法[J]. 电子学报, 2004, 32(3): 416-420.
(Lü Z S, Hou Z R. Particle swarm optimization with adaptive mutation[J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(3): 416-420.)

(责任编辑：闫 妍)