

## 基于事件触发的二阶多智能体领导跟随一致性

黄红伟<sup>a</sup>, 黄天民<sup>b</sup>, 吴胜<sup>c</sup>, 周坤<sup>a</sup>

(西南交通大学 a. 电气工程学院, b. 数学学院, c. 交通运输与物流学院, 成都 610031)

**摘要:** 研究二阶多智能体系统在固定有向拓扑下的领导跟随一致性问题. 为了节省网络和计算资源, 给出一种基于事件触发控制的一致性算法. 针对每个跟随者智能体, 设计基于状态误差形式的触发函数, 只有当状态误差满足一定条件, 即触发函数取值为零时智能体才触发事件, 同时更新并传递自身的采样信息, 在两个相邻事件触发时刻之间, 控制输入只受领导者控制信号的影响. 利用模型变换、矩阵理论和 Lyapunov 稳定性理论给出多智能体系统达到领导跟随一致性的充分条件. 仿真结果验证了理论方案的可行性和有效性.

**关键词:** 多智能体系统; 领导跟随; 事件触发控制; 一致性

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Leader-following consensus of second-order multi-agent systems via event-triggered control

HUANG Hong-wei<sup>a</sup>, HUANG Tian-min<sup>b</sup>, WU Sheng<sup>c</sup>, ZHOU Kun<sup>a</sup>

(a. School of Electrical Engineering, b. School of Mathematics, c. School of Transportation and Logistics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China. Correspondent: HUANG Hong-wei, E-mail: hhw.8076@163.com)

**Abstract:** The leader-following consensus of second-order multi-agent systems under the directed network with fixed topology is studied. In order to save network and computing resources, a consensus algorithm via decentralized event-triggered control is proposed. For each following agent, the sampling information is updated and transmitted by properly defined events, which depend on the measurement error. Between two adjacent event times, the control input is only affected by the control signal of the leader. By employing the model transformation method, the matrix theory and the Lyapunov stability theory, some sufficient conditions for the leader-following consensus of second-order multi-agent systems are given. Finally, simulation results show the effectiveness and feasibility of the theoretical results.

**Keywords:** multi-agent systems; leader-following; event-triggered control; consensus

### 0 引言

多智能体系统是由多个可计算的智能体组成的系统, 通过智能体之间的交互通讯、协调合作代替昂贵的单个系统, 用以解决大型、复杂的现实问题<sup>[1-2]</sup>. 作为分布式人工智能的一个重要分支, 多智能体系统在编队飞行、集聚控制、传感器网络、分布式预测等领域得到了广泛应用<sup>[3-4]</sup>. 近年来, 多智能体协调控制引起了大量研究者的关注, 一致性问题作为多智能体协调控制的基础, 已成为如今控制学界的一个研究热点.

在实际的多智能体系统中, 智能体之间通过通信网络进行信息通讯, 因此, 有限的信道带宽给多智能体协调控制带来很大的制约. 此外, 每个智能体的通

信能力和计算能力都是有限的, 一旦智能体自身的能量不足以支撑它完成相应的动作, 那么多智能体系统将无法完成所指定的任务. 基于上述限制, 在对多智能体协调控制设计控制律时还必须充分考虑系统网络资源利用和智能体自身能量问题, 这使得多智能体协调控制的研究更具挑战性<sup>[5]</sup>. 利用传统的采样控制, 即周期采样控制方式<sup>[6]</sup>, 可以减少智能体之间的信息通讯次数, 从而节省计算资源. 从系统分析和设计的角度看, 周期采样方式易于接受, 但从网络资源利用的角度看, 当系统在一种理想的状况下运行时, 若还是周期地执行控制任务, 则会造成不必要的资源浪费<sup>[7]</sup>. 为了克服周期采样控制的局限性, 文献 [8-9] 提出了一种新的事件触发控制方法. 所谓事件触发控

**收稿日期:** 2015-01-30; **修回日期:** 2015-09-17.

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(61134002); 西南交通大学博士创新基金项目.

**作者简介:** 黄红伟(1987—), 女, 博士生, 从事多智能体系统协调控制、最优控制的研究; 黄天民(1958—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、优化与决策等研究.

制方法就是在保证闭环系统具有一定性能(如稳定性)的情况下,如果预先设定好的事件触发条件成立,则控制任务随即被执行,即事件触发控制就是控制任务“按需”执行同时保证系统具有一定的性能<sup>[7,10]</sup>.目前,基于事件触发控制的多智能体系统一致性问题的研究已取得较多成果<sup>[11-18]</sup>,主要是从有向/无向拓扑结构、集中/分布式触发机制、有/无时滞、固定/切换拓扑和线性/非线性系统等方面进行的研究.多智能体系统领导跟随一致性问题作为一类重要的一致性问題,也受到越来越多的学者们的关注<sup>[19-23]</sup>.在此类多智能体系统中,领导者是一个特殊的智能体,其运动不受其他智能体的影响,而其他智能体都尽可能地跟随该智能体.文献[22-23]分别针对一阶、二阶领导跟随多智能体系统提出了基于事件触发控制的一致性算法,其中文献[22]从有/无时滞两方面进行了分析,文献[23]从集中/分布式触发机制方面进行了研究.然而,根据文献[22-23]设计的一致性算法,跟随者智能体在自身事件触发时刻及其邻居智能体事件触发时刻都要更新控制信号,加快了控制输入更新频率,造成资源浪费.

本文研究二阶多智能体系统的领导跟随一致性问題.区别于文献[23],本文跟随者智能体仅在自身事件触发时刻更新控制信号,不需考虑其邻居智能体的触发时刻.同时,在设计一致性算法时,视领导者为独立自由的个体,在设计控制律时使用实时状态,而非采样状态.由于所研究的是二阶系统,本文采用一阶保持器来逼近跟随者的位置.最后,采用模型变换方法将系统的领导跟随一致性问題转化为求闭环系统的稳定性问題,并利用矩阵理论和Lyapunov稳定性理论给出了系统达到领导跟随一致性的充分条件.

## 1 预备知识及问題描述

### 1.1 代数图论

通常,多智能体系统中智能体之间的通讯拓扑用有向图进行描述,记 $\bar{\mathcal{G}}(\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{A}})$ 为含有 $n$ 个跟随者和一个领导者组成的系统通讯拓扑图.其中: $\bar{\mathcal{V}} = (1, 2, \dots, n, 0)$ 为非空有限的节点集合, $\bar{\mathcal{E}} \subseteq \bar{\mathcal{V}} \times \bar{\mathcal{V}}$ 为有向边集合, $\bar{\mathcal{A}} = (a_{ij}) \in R^{(n+1) \times (n+1)}$ 为非负加权邻接矩阵.同时,记 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 为仅由跟随者组成的系统通讯拓扑图.图 $\bar{\mathcal{G}}$ 中的一条有向边 $e_{ij} \in \bar{\mathcal{E}}$ 表示有序节点对 $(i, j)$ , $i$ 为始发节点, $j$ 为目标节点,表示节点 $i$ 可以接收到节点 $j$ 的信息.邻接矩阵 $\bar{\mathcal{A}}$ 中的元素与边相关, $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow e_{ij} \in \bar{\mathcal{E}}$ ,且 $a_{ii} = 0$ .对于跟随者节点 $i$ ,定义其邻居节点集为 $\mathcal{N}_i = \{j | (i, j) \in \mathcal{E}\}$ ,入度为 $d_{in}(i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ . $D = \text{diag}\{d_{in}(i)\}$ 表示入度矩阵,

图 $\mathcal{G}$ 的拉普拉斯矩阵可表示为 $L = D - \mathcal{A}$ .图 $\bar{\mathcal{G}}$ 中的一条有向路径是指从节点 $i$ 到节点 $j$ 的一个有序边序列,即 $(i, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_m, j) \in \bar{\mathcal{E}}$ ,其中 $i, j, i_p \in \bar{\mathcal{V}}$ , $p = 1, 2, \dots, m$ .如果图中某个节点到其他各节点均存在一条有向路径,则称该节点为全局可达的.称图中包含有向生成树当且仅当该图至少存在一个根节点是全局可达的.

**引理 1**<sup>[4]</sup>  $0$ 是矩阵 $L$ 的一个特征值, $\mathbf{1}$ 是其对应的特征向量,满足 $L\mathbf{1} = 0$ .

**引理 2**(Schur 补)<sup>[15]</sup> 对于对称阵

$$S = S^T = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix},$$

以下 3 个条件等价(其中 $S_{11}$ 、 $S_{22}$ 均为方阵):

- 1)  $S > 0$ ;
- 2)  $S_{11} > 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} > 0$ ;
- 3)  $S_{22} > 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T > 0$ .

**引理 3**<sup>[23]</sup> 矩阵 $A_{m \times m}$ 和 $B_{m \times m}$ 均为 Hermitian 阵,则如下不等式成立:

- 1)  $\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\min}(B) \leq \lambda_{\min}(A + B)$ ;
- 2)  $\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(B) \geq \lambda_{\max}(A + B)$ .

### 1.2 二阶多智能体系统的领导跟随一致性

在含有 $n$ 个跟随者和 1 个领导者的二阶多智能体系统中,跟随者 $i$ 的动力学方程描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x_i(t) \in R^m$ 、 $v_i(t) \in R^m$ 和 $u_i(t) \in R^m$ 分别为智能体 $i$ 在 $t$ 时刻的位置、速度和控制输入(即一致性协议).

对于领导者 $0$ ,其动力学方程描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = v_0(t), \\ \dot{v}_0(t) = u_0(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $x_0(t) \in R^m$ 、 $v_0(t) \in R^m$ 和 $u_0(t) \in R^m$ 分别为领导者 $0$ 在 $t$ 时刻的位置、速度和控制输入.

**定义 1** 对于所有的跟随者智能体 $i \in \mathcal{V}$ ,如果存在控制协议 $u_i(t)$ 使得系统在任何初始状态下都满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_0(t)\| = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_i(t) - v_0(t)\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则称系统(1)和(2)解决了领导跟随一致性问題.

## 2 主要结果

### 2.1 一致性协议

本节考虑多智能体系统(1)和(2)在固定有向拓扑下的领导跟随一致性问題.假设领导者 $0$ 是全局可达的,类似于文献[23],给出如下一致性协议:

$$\begin{aligned}
 u_i(t) = & \\
 u_0(t) - k_1 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} [x_i(t) - x_j(t) + v_i(t) - v_j(t)] - & \\
 k_2 a_{i0} [x_i(t) - x_0(t) + v_i(t) - v_0(t)], & \\
 i = 1, 2, \dots, n, & \quad (3)
 \end{aligned}$$

其中  $k_1, k_2$  为需要设计的反馈增益。

在基于事件触发控制的一致性算法中, 针对每个跟随者智能体  $i \in \mathcal{V}$ , 设计触发函数  $f_i$  (具体形式在本文给出), 并根据触发函数对每个跟随者智能体定义一个单调递增的时间点列  $t_k^i (k = 0, 1, \dots)$ 。

$$\hat{x}_i(t) = x_i(t_k^i), \quad \hat{v}_i(t) = v_i(t_k^i),$$

$$\hat{x}_{ij}(t) = x_j(t_k^i), \quad \hat{v}_{ij}(t) = v_j(t_k^i), \quad t \in [t_k^i, t_{k+1}^i)$$

分别表示智能体  $i, j$  在此时间段内的采样位置和采样速度, 其中  $t_k^i$  为智能体  $i$  的第  $k$  个触发时刻, 数值上取为使得  $f_i = 0$  的时间点值。根据上述定义, 式(3)改写为

$$\begin{aligned}
 u_i(t) = & \\
 u_0(t) - k_1 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} [\hat{x}_i(t) + (t - t_k^i) \hat{v}_i(t) - \hat{x}_{ij}(t) - & \\
 (t - t_k^i) \hat{v}_{ij}(t) + \hat{v}_i(t) - \hat{v}_{ij}(t)] - k_2 a_{i0} [\hat{x}_i(t) + & \\
 (t - t_k^i) \hat{v}_i(t) - x_0(t) + \hat{v}_i(t) - v_0(t)]. & \quad (4)
 \end{aligned}$$

式(4)即为基于事件触发控制的一致性协议。由式(4)可见, 跟随者智能体之间只有在事件触发时刻才进行信息通讯, 在两个相邻事件触发时刻之间, 控制输入只与领导者的控制信号有关, 从而减少了不必要的资源浪费。

## 2.2 一致性分析

本节分析多智能体系统(1)和(2)在控制协议(4)的作用下, 领导跟随一致性的收敛问题。

令

$$e_{xi}(t) = \hat{x}_i(t) + (t - t_k^i) \hat{v}_i(t) - x_i(t),$$

$$e_{vi}(t) = \hat{v}_i(t) - v_i(t),$$

$$e_{xij}(t) = \hat{x}_{ij}(t) + (t - t_k^i) \hat{v}_{ij}(t) - x_j(t),$$

$$e_{vij}(t) = \hat{v}_{ij}(t) - v_j(t)$$

分别表示智能体  $i, j$  在  $[t_k^i, t_{k+1}^i)$  内的位置误差和速度误差, 代入式(4)可得

$$\begin{aligned}
 u_i(t) = & \\
 u_0(t) - k_1 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} [x_i(t) - x_j(t) + v_i(t) - & \\
 v_j(t) + e_{xi}(t) - e_{xij}(t) + e_{vi}(t) - e_{vij}(t)] - & \\
 k_2 a_{i0} [x_i(t) - x_0(t) + v_i(t) - v_0(t) + e_{xi}(t) + e_{vi}(t)]. & \quad (5)
 \end{aligned}$$

整个闭环系统可以描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = u_0 \mathbf{1} - (k_1 L + k_2 B) \otimes I_m (x + v) - \\ k_1 \tilde{L} \otimes I_m (e'_x + e'_v) - k_2 B \otimes I_m (e_x + e_v) + \\ k_2 B \otimes I_m \mathbf{1} (x_0 + v_0). \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n,$$

$$v = \text{col}(v_1, v_2, \dots, v_n) \in R^n,$$

$$e_x = \text{col}(e_{x1}, e_{x2}, \dots, e_{xn}) \in R^n,$$

$$e_v = \text{col}(e_{v1}, e_{v2}, \dots, e_{vn}) \in R^n$$

分别为  $n$  个跟随者智能体的整体位置、速度、位置误差和速度误差;  $\mathbf{1}$  表示元素全为 1 的列向量;  $L$  为图  $\mathcal{G}$  的拉普拉斯矩阵;  $B = \text{diag}\{a_{i0}\} (i = 1, 2, \dots, n)$  为系统的领导跟随邻接矩阵;  $\tilde{L} = \text{diag}\{L_i\} (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $L_i$  为矩阵  $L$  的第  $i$  行;  $e'_x = \text{col}(e_{x1}, e_{x12}, \dots, e_{x1n}, \dots, e_{xn1}, e_{xn2}, \dots, e_{xnn}) \in R^{n^2}$ ,  $e'_v = \text{col}(e_{v1}, e_{v12}, \dots, e_{v1n}, \dots, e_{vn1}, e_{vn2}, \dots, e_{vnn}) \in R^{n^2}$ 。

令  $\bar{x}(t) = x(t) - x_0(t) \mathbf{1}$ ,  $\bar{v}(t) = v(t) - v_0(t) \mathbf{1}$ , 由引理 1 可知

$$-(L \otimes I_m)x = -(L \otimes I_m)\bar{x},$$

$$-(L \otimes I_m)v = -(L \otimes I_m)\bar{v}.$$

进而将式(6)改写为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{v}, \\ \dot{\bar{v}} = -(k_1 L + k_2 B) \otimes I_m (\bar{x} + \bar{v}) - \\ k_1 \tilde{L} \otimes I_m (e'_x + e'_v) - k_2 B \otimes I_m (e_x + e_v). \end{cases} \quad (7)$$

于是, 研究系统(1)和(2)的领导跟随一致性问题在此转化为讨论系统(7)的稳定性问题。

下面利用 Lyapunov 稳定性理论分析系统(7)的输入-状态 (ISS) 稳定性。

**定理 1** 对于多智能体系统(1)和(2), 假设图  $\bar{\mathcal{G}}$  含有一颗生成树, 且领导者 0 为根节点, 若如下条件成立:

$$\lambda_{\min}(k_1 \hat{L} + k_2 B) > 1, \quad (8)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} (k_1 |N_i| a_{ij} + k_2 a_{i0}) (\|e_{xi}\|^2 + \|e_{vij}\|^2 + \|e_{xij}\|^2 + \|e_{vi}\|^2) \leq$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_i \alpha |N_i| [\lambda_{\min}(k_1 \hat{L} + k_2 B) - \\ \alpha (2k_1 |N_i| + a_{i0} k_2) - 1] (\|\bar{x}_i\|^2 + \|\bar{v}_i\|^2). \quad (9)
 \end{aligned}$$

其中:  $\hat{L} = (L + L^T)/2$ ,  $\sigma_i, \alpha$  为控制参数。则在控制协议(4)的作用下, 系统可以解决领导跟随一致性问题。

**证明** 令  $\varepsilon(t) = \text{col}(\bar{x}(t), \bar{v}(t))$ , 构造 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}\varepsilon^T(P \otimes I_m)\varepsilon, \quad (10)$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} k_1(L + L^T) + 2k_2B & I_n \\ I_n & I_n \end{bmatrix}.$$

由引理 2、引理 3 和式 (8) 可知,  $P$  为对称正定阵. 对式 (10) 求偏导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \varepsilon^T(P \otimes I_m)\varepsilon = \\ &\bar{x}^T(k_1(L + L^T) + 2k_2B) \otimes I_m \bar{v} + \bar{v}^T \bar{v} + \\ &\bar{x}^T \dot{\bar{v}} + \bar{v}^T \dot{\bar{v}} = \\ &\bar{x}^T(k_1(L + L^T) + 2k_2B) \otimes I_m \bar{v} + \bar{v}^T \bar{v} - \bar{x}^T(k_1L + \\ &k_2B) \otimes I_m(\bar{x} + \bar{v}) - \bar{v}^T(k_1L + k_2B) \otimes I_m(\bar{x} + \bar{v}) - \\ &(\bar{x} + \bar{v})k_1\tilde{L} \otimes I_m(e'_x + e'_v) - \\ &(\bar{x} + \bar{v})k_2B \otimes I_m(e_x + e_v) = \\ &-\bar{x}^T(k_1L + k_2B) \otimes I_m\bar{x} + \bar{v}^T\bar{v} - \bar{v}^T(k_1L + k_2B) \otimes \\ &I_m\bar{v} - (\bar{x} + \bar{v})k_1\tilde{L} \otimes I_m(e'_x + e'_v) - \\ &(\bar{x} + \bar{v})k_2B \otimes I_m(e_x + e_v) = \\ &-\bar{x}^T(k_1\hat{L} + k_2B) \otimes I_m\bar{x} + \bar{v}^T\bar{v} - \bar{v}^T(k_1\hat{L} + k_2B) \otimes \\ &I_m\bar{v} - (\bar{x} + \bar{v})k_1\tilde{L} \otimes I_m(e'_x + e'_v) - \\ &(\bar{x} + \bar{v})k_2B \otimes I_m(e_x + e_v) \leq \\ &\lambda_{\min}(k_1\hat{L} + k_2B)(\|\bar{x}\|^2 + \|\bar{v}\|^2) + \|\bar{v}\|^2 - \\ &(\bar{x} + \bar{v})k_1\tilde{L} \otimes I_m(e'_x + e'_v) - \\ &(\bar{x} + \bar{v})k_2B \otimes I_m(e_x + e_v) = \\ &-\lambda_{\min}(k_1\hat{L} + k_2B) \sum_{j=1}^n (\|\bar{x}_i\|^2 + \|\bar{v}_i\|^2) + \\ &\sum_{j=1}^n \|\bar{v}_i\|^2 - (\bar{x} + \bar{v})k_1\tilde{L} \otimes I_m(e'_x + e'_v) - \\ &(\bar{x} + \bar{v})k_2B \otimes I_m(e_x + e_v). \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} &-(\bar{x} + \bar{v})k_1\tilde{L} \otimes I_m(e'_x + e'_v) = \\ &-\sum_{i=1}^n (\bar{x}_i^T + \bar{v}_i^T) \\ &\bar{v}_i^T \left[ k_1 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(e_{xi} + e_{vi} - e_{xij} - e_{vij}) \right] = \\ &-k_1 \sum_{i=1}^n |N_i| (\bar{x}_i^T + \bar{v}_i^T)(e_{xi} + e_{vi}) + \\ &\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\bar{x}_i^T + \bar{v}_i^T)(e_{xij} + e_{vij}) \right), \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} &-(\bar{x} + \bar{v})k_2B \otimes I_m(e_x + e_v) = \\ &-\sum_{i=1}^n (\bar{x}_i^T + \bar{v}_i^T)k_2a_{i0}(e_{xi} + e_{vi}), \end{aligned}$$

利用不等式性质  $|xy| \leq \frac{a}{2}x^2 + \frac{1}{2a}y^2$  可得

$$\begin{aligned} &-k_1 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\bar{x}_i^T + \bar{v}_i^T)(e_{xi} + e_{vi} - e_{xij} - e_{vij}) \right) \leq \\ &2\alpha k_1 \sum_{i=1}^n |N_i| (\|\bar{x}_i\|^2 + \|\bar{v}_i\|^2) + \\ &\frac{k_1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\|e_{xi}\|^2 + \|e_{vi}\|^2 + \|e_{xij}\|^2 + \|e_{vij}\|^2) \right), \\ &-k_2 \sum_{i=1}^n a_{i0}(\bar{x}_i^T + \bar{v}_i^T)(e_{xi} + e_{vi}) \leq \\ &\alpha \sum_{i=1}^n k_2 a_{i0} (\|\bar{x}_i\|^2 + \|\bar{v}_i\|^2) + \\ &\frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n k_2 a_{i0} (\|e_{xi}\|^2 + \|e_{vi}\|^2). \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \\ &-\lambda_{\min}(k_1\hat{L} + k_2B) \sum_{i=1}^n (\|\bar{x}_i\|^2 + \|\bar{v}_i\|^2) + \\ &2\alpha k_1 \sum_{i=1}^n |N_i| (\|\bar{x}_i\|^2 + \alpha \sum_{j=1}^n k_2 a_{i0} (\|\bar{x}_i\|^2 + \|\bar{v}_i\|^2) + \\ &\frac{k_1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\|e_{xi}\|^2 + \|e_{vi}\|^2 + \|e_{xij}\|^2 + \|e_{vij}\|^2) \right) + \\ &\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n k_2 a_{i0} (\|e_{xi}\|^2 + \|e_{vi}\|^2) + \sum_{i=1}^n \|\bar{v}_i\|^2 \leq \\ &\sum_{i=1}^n \left\{ [\lambda_{\min}(k_1\hat{L} + k_2B) + \alpha(2k_1|N_i| + k_2a_{i0} + \right. \\ &1)] (\|\bar{x}_i\|^2 + \|\bar{v}_i\|^2) + \frac{k_1}{\alpha} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left( k_1 a_{ij} + \frac{k_2 a_{i0}}{|N_i|} \right) \times \\ &\left. (\|e_{xi}\|^2 + \|e_{vi}\|^2 + \|e_{xij}\|^2 + \|e_{vij}\|^2) \right\}, \end{aligned}$$

其中

$$0 < \alpha < \frac{\lambda_{\min}(k_1\hat{L} + k_2B) - 1}{2k_1|N_i| + k_2a_{i0}}.$$

结合式 (9), 当

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in \mathcal{N}_i} (k_1|N_i|a_{ij} + k_2a_{i0})(\|e_{xi}\|^2 + \\ &\|e_{vi}\|^2 + \|e_{xij}\|^2 + \|e_{vij}\|^2) \leq \\ &\sigma_i \alpha |N_i| [\lambda_{\min}(k_1\hat{L} + k_2B) - \\ &\alpha(2k_1|N_i| + a_{i0}k_2) - 1] (\|\bar{x}_i\|^2 + \|\bar{v}_i\|^2) \end{aligned}$$

时, 有

$$\dot{V} \leq - \sum_{i=1}^n (1 - \sigma_i) [\lambda_{\min}(k_1 \hat{L} + k_2 B) - \alpha(2k_1 |N_i| + a_{i0} k_2) - 1] (\|\bar{x}_i\|^2 + \|\bar{v}_i\|^2) < 0,$$

其中  $0 < \sigma_i < 1$ .

将触发函数  $f_i$  定义为

$$f_i(e_{xi}, e_{vi}, \{e_{xij}, e_{vij} | j \in N_i\}) = \sum_{j \in N_i} (k_1 |N_i| a_{ij} + k_2 a_{i0}) (\|e_{xi}\|^2 + \|e_{vi}\|^2 + \|e_{xij}\|^2 + \|e_{vij}\|^2) - \sigma_i \alpha |N_i| [\lambda_{\min}(k_1 \hat{L} + k_2 B) - \alpha(2k_1 |N_i| + a_{i0} k_2) - 1] (\|\bar{x}_i\|^2 + \|\bar{v}_i\|^2).$$

对于跟随者智能体  $i$ , 其第  $k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) 个事件触发当且仅当  $f_i(e_{xi}, e_{vi}, \{e_{xij}, e_{vij} | j \in N_i\}) = 0$ .

由 Lyapunov 稳定性理论可知, 对于任意的初始状态  $\bar{x}(0), \bar{v}(0)$ , 状态方程 (7) 的解都满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{x}(t)\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{v}(t)\| = 0,$$

即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0(t)\mathbf{1}\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|v(t) - v_0(t)\mathbf{1}\| = 0.$$

由定义 1, 系统解决了领导跟随一致性问题.  $\square$

为了表明在整个事件触发控制过程中不会产生 Zeno 现象 (指在有限时间区间内发生无穷多次采样, 即采样时间间隔趋于零), 给出如下定理.

**定理 2** 考虑多智能体系统 (1) 和 (2) 在一致性协议 (4) 的作用下, 假设图  $\bar{\mathcal{G}}$  含有一颗有向生成树, 且领导者 0 为根节点, 若式 (8) 和 (9) 满足, 则至少存在一个智能体  $p$ , 其任意两个连续事件触发时刻之间的间隔  $t_{k+1}^p - t_k^p$  不小于

$$\tau_p = \frac{1}{(\sqrt{2m}\|k_1 L + k_2 B\| + \sqrt{mn})(\sqrt{2n}\|A\| + M_p)}.$$

其中:  $A = \text{diag}\{A_i\} (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $A_i$  为矩阵  $D + A$  的第  $i$  行, 且

$$M_p = \left[ \sigma_p \alpha |N_p| \frac{\lambda_{\min}(k_1 \hat{L} + k_2 B) - \alpha(2k_1 |N_p| + k_2 a_{p0}) - 1}{k_1 |N_p| + k_2 a_{p0}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

**证明** 令  $A = \text{diag}\{A_i\} (i = 1, 2, \dots, n)$ , 其中  $A_i$  为矩阵  $D + A$  的第  $i$  行. 容易发现,  $\sum_{j \in N_i} (|e_{xi}| + |e_{vi}| + |e_{xij}| + |e_{vij}|)$  是  $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \|e'\|$  的第  $i$  个分量, 于是有

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j \in N_i} (e_{xi}^2 + e_{vi}^2 + e_{xij}^2 + e_{vij}^2) \right) \leq \left\| \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \|e'\| \right\|^2 \leq \left\| \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \right\|^2 \|e'\|^2.$$

令  $p = \arg \max_{i \in \mathcal{V}} (\|\bar{x}_i\|^2 + \|\bar{v}_i\|^2)$ , 则有

$$\frac{\sum_{j \in N_p} (\|e_{xp}\|^2 + \|e_{vp}\|^2 + \|e_{xpj}\|^2 + \|e_{vpj}\|^2)}{n(\|\bar{x}_p\|^2 + \|\bar{v}_p\|^2)} \leq$$

$$\frac{2\|A\|^2 \|e'\|^2}{\|e\|^2}.$$

类似于文献 [23], 有

$$\sqrt{2n}\|A\| \frac{(\sqrt{2m}\|k_1 L + k_2 B\| + \sqrt{mn})\tau_p}{1 - (\sqrt{2m}\|k_1 L + k_2 B\| + \sqrt{mn})\tau_p} = \left[ \sigma_p \alpha |N_p| \times \frac{\lambda_{\min}(k_1 \hat{L} + k_2 B) - \alpha(2k_1 |N_p| + k_2 a_{p0}) - 1}{k_1 |N_p| + k_2 a_{p0}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

解得

$$\tau_p = \frac{1}{(\sqrt{2m}\|k_1 L + k_2 B\| + \sqrt{mn})(\sqrt{2n}\|A\| + M_p)},$$

其中

$$M_p = \left[ \sigma_p \alpha |N_p| \times \frac{\lambda_{\min}(k_1 \hat{L} + k_2 B) - \alpha(2k_1 |N_p| + k_2 a_{p0}) - 1}{k_1 |N_p| + k_2 a_{p0}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

### 3 仿真实验

利用 Matlab 仿真实验验证理论方案的有效性和正确性. 考虑由 4 个跟随者和 1 个领导者组成的多智能体系统, 其通信拓扑结构如图 1 所示. 为了便于实验操作, 仅考虑  $m = 1$  的情况. 容易得到图  $\mathcal{G}$  的拉普拉斯矩阵和领导跟随邻接矩阵分别为

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \text{diag}\{1, 0, 0, 1\}.$$

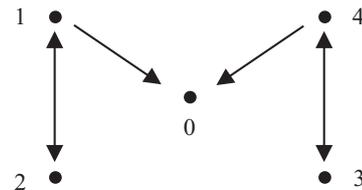


图 1 通信拓扑图

根据式 (8), 选取  $k_1 = 5, k_2 = 9$ , 求得

$$\lambda_{\min}(k_1 \hat{L} + k_2 B) = 2.7732 > 1, \quad 0 < \alpha < 0.093.$$

选取  $\alpha = 0.05$ , 同时为便于计算, 选取  $\sigma_i = 0.99, i = 1, 2, 3, 4$ . 仿真实验中, 假设领导者智能体的控制输入为  $u_0(t) = t \sin t$ . 图 2 和图 3 分别给出了多智能体

系统的领导跟随位置轨迹和速度轨迹, 图 4 和图 5 分别给出了多智能体系统的领导跟随位置和速度差  $\bar{x}_i$ 、 $\bar{v}_i$  的变化趋势。

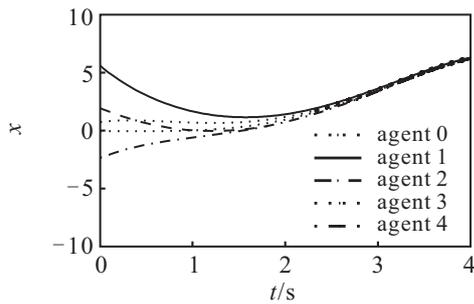


图 2 多智能体系统的领导跟随位置轨迹

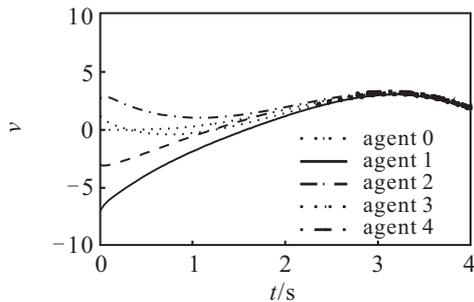


图 3 多智能体系统的领导跟随速度轨迹

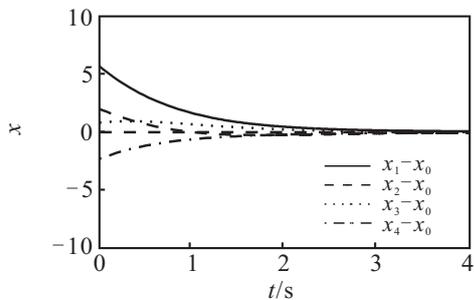


图 4 多智能体系统的领导跟随位置差变化趋势

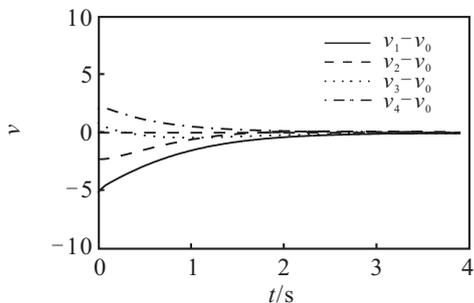


图 5 多智能体系统的领导跟随速度差变化趋势

由图 2~图 5 可见, 跟随者智能体和领导者智能体的状态最终达到了一致. 为了表明在基于事件触发控制的一致性算法中, 跟随者智能体之间只有在“特定”的时间点上进行信息通讯, 选取智能体 3 作为代表进行误差分析. 由图 1 可知, 智能体 3 的邻居智能体只有 4, 可通过计算  $\|e_{x3}\|^2 + \|e_{v3}\|^2 + \|e_{x34}\|^2 + \|e_{v34}\|^2$  判断智能体 3 的事件触发时刻, 由式 (9) 可知

$$(\|e_{x3}\|^2 + \|e_{v3}\|^2 + \|e_{x34}\|^2 + \|e_{v34}\|^2)_{\max} =$$

$$\frac{\sigma_3 \alpha}{k_1 + k_2} \times \frac{[\lambda_{\min}(k_1 \hat{L} + k_2 B) - \alpha(2k_1 + k_2) - 1](\|\bar{x}_3\|^2 + \|\bar{v}_3\|^2)}{k_1 + k_2}$$

变化趋势如图 6 所示. 实线表示  $\|e_{x3}\|^2 + \|e_{v3}\|^2 + \|e_{x34}\|^2 + \|e_{v34}\|^2$ , 虚线表示  $(\|e_{x3}\|^2 + \|e_{v3}\|^2 + \|e_{x34}\|^2 + \|e_{v34}\|^2)_{\max}$ .

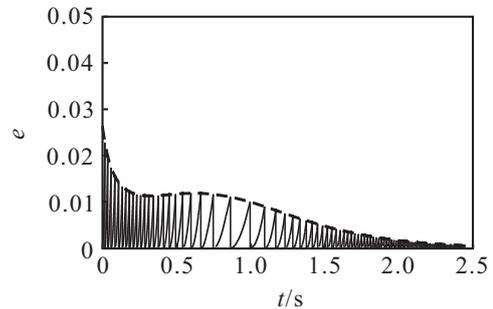


图 6 跟随者智能体 3 的误差变化趋势

由图 6 可见, 跟随者智能体只有在状态误差到达某个特定值时才触发事件, 相比于文献 [23], 本文的触发时刻完全受状态误差限制。

### 4 结 论

本文研究了二阶多智能体系统在固定有向拓扑下的领导跟随一致性问题. 假设每个跟随者智能体只与其邻居智能体进行信息通讯, 领导者智能体是全局可达的, 且仅向与其直接相连的智能体发送信号. 为了减少不必要的资源浪费, 在设计控制律时使每个跟随者智能体仅在自身事件触发时刻更新控制输入. 通过理论分析, 证明了多智能体系统在该控制算法下可以达到领导跟随一致性. 最后, 通过仿真实例验证了理论方案的可行性和有效性. 下面的工作将进一步研究在切换拓扑及带有外部干扰情况下的多智能体系统的一致性问题。

### 参考文献(References)

[1] Zhang Z Q, Hao F, Zhang L, et al. Consensus of linear multi-agent systems via event-triggered control[J]. Int J of Control, 2014, 87(6): 1243-1251.

[2] 宋莉, 伍清河. 具有多时变时滞的多智能体系统在切换拓扑下的平均一致性[J]. 控制与决策, 2013, 28(12): 1811-1816.

(Song L, Wu Q H. Average consensus of multi-agent systems with multiple time-varying delays and switching topologies[J]. Control and Decision, 2013, 28(12): 1811-1816.)

[3] Gao Y, Wang W. Sampled-data based consensus of continuous-time multi-agent systems with time-varying topology[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(5): 1226-1231.

- [4] Liu Z, Guan Z, Shen X, et al. Consensus of multi-agent networks with aperiodic sampled communication via impulsive algorithms using position-only measurements[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2012, 57(10): 2639-2643.
- [5] 丁磊. 不同数据触发机制下的多智能体系统一致性及  $H_\infty$  滤波[D]. 大连: 大连海事大学信息科学技术学院, 2014.  
(Ding L. Consensus and  $H_\infty$  filtering of multi-agent systems based on various data-triggering mechanisms [D]. Dalian: Department of Information Science and Technology, Dalian Maritime University, 2014.)
- [6] Yu W, Zheng W, Chen G, et al. Second-order consensus in multi-agent dynamical systems with sampled position data[J]. Automatica, 2011, 47(7): 1496-1503.
- [7] 胡松林. 基于事件触发机制的网络化控制系统的分析和综合[D]. 武汉: 华中科技大学自动化学院, 2012.  
(Hu S L. Analysis and synthesis of networked control systems with event-triggering scheme[D]. Wuhan: Department of Automation, Huazhong University of Science and Technology, 2012.)
- [8] Arzen K E. A simple event-based PID controller[C]. Proc of the 14th IFAC World Congress. Cape Town: International Federation of Automatic Control, 1999: 423-428.
- [9] Tabuada P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(9): 1680-1685.
- [10] Fan Y, Feng G, Wang Y, et al. Distributed event-triggered control of multi-agent systems with combinational measurements[J]. Automatica, 2013, 49(2): 671-675.
- [11] Dimarogonas D V, Johansson K H. Event-triggered control for multi-agent systems[C]. Proc of Joint 48th IEEE Conf on Decision and Control. Piscataway: IEEE, 2009: 7131-7136.
- [12] Dimarogonas D V, Frazzoli E. Distributed event-triggered control strategies for multi-agent systems[C]. Proc of the 47th Allerton Conf on Communications. New York: IEEE, 2009: 906-910.
- [13] Dimarogonas D V, Frazzoli E, Johansson K H. Distributed event-triggered control for multi-agent systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2012, 57(5): 1291-1297.
- [14] Seyboth G S, Dimarogonas D V, Johansson K H. Event-based broadcasting for multi-agent average consensus[J]. Automatica, 2013, 49(1): 245-252.
- [15] Li H J, Ming C, Shen S G, et al. Event-triggered control for multi-agent systems with randomly occurring nonlinear dynamics and time-varying delay[J]. J of the Franklin Institute, 2014, 351(5): 2582-2599.
- [16] Wang X F, Lemmon M D. Event-triggering in distributed networked control systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(3): 586-601.
- [17] Zhu W, Jiang Z P, Feng G. Event-based consensus of multi-agent systems with general linear models[J]. Automatica, 2014, 50(2): 552-558.
- [18] Mazo M J, Tabuada P. Decentralized event-triggered control over wireless sensor/actuator networks[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(10): 2456-2461.
- [19] Fan M C, Chen Z Y, Zhang H T. Semi-global consensus of nonlinear second-order multi-agent systems with measurement output feedback[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2014, 59(8): 2222-2227.
- [20] Su H, Chen M Z Q, Lam J, et al. Semi-global leader-following consensus of linear multi-agent systems with input saturation via low gain feedback[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 2013, 60(7): 1881-1889.
- [21] Qin W, Liu Z, Chen Z. A novel observer-based formation for nonlinear multi-agent systems with time delay and intermittent communication[J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 79(3): 1651-1664.
- [22] Hu J P, Chen G R, Li H X. Distributed event-triggered tracking control of leader-follower multi-agent systems with communication delays[J]. Kybernetika, 2011, 47(4): 630-643.
- [23] Xie D S, Yuan D M, Lu J W, et al. Consensus control of second-order leader-follower multi-agent systems with event-triggered strategy[J]. Trans of the Institute of Measurement and Control, 2013, 35(4): 426-436.

(责任编辑: 郑晓蕾)