

## 二阶有向多智能体网络的可控包含控制

陈世明, 王培, 赖强, 裴惠琴

(华东交通大学 电气与电子工程学院, 南昌 330013)

**摘要:** 研究随机给定拓扑结构的二阶有向多智能体网络的可控包含控制问题. 针对当前包含控制研究成果大多没有考虑多智能体网络领导者和跟随者的可控配置问题, 结合复杂网络可控性理论和二分图最大匹配算法给出满足网络可控的领导者和跟随者集合, 并为跟随者智能体设计相应的控制协议, 驱使跟随者能够渐近收敛到由多个领导者构成的静态凸包中, 从而实现网络的可控包含控制. 仿真结果验证了理论分析的正确性.

**关键词:** 有向网络拓扑; 复杂网络可控性; 最大匹配; 包含控制

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Controllable containment control of second order directed multi-agent networks

CHEN Shi-ming, WANG Pei, LAI Qiang, PEI Hui-qin

(School of Electrical and Electronic Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China.

Correspondent: CHEN Shi-ming, E-mail: c1977318@hotmail.com)

**Abstract:** The controllable containment control for second-order directed multi-agent networks under given topologies is investigated. For the problem that the controllable configuration issues have not been considered between leaders and followers for most of the results of containment control, the complex network controllability theory and the maximum bipartite graph matching algorithm are combined to determine the leader and follower set meeting the network controllable. By using the designed corresponding control protocol for followers, all followers are driven to converge to the stationary convex hull with the leaders in order to achieve the controllability containment control of the networks. Simulation results show the correctness of the theoretical analysis.

**Keywords:** directed topologies; controllability of complex network; maximum matching; containment control

### 0 引言

近年来, 随着现代科技的飞速发展和复杂性科学的深入探索, 多智能体网络协调控制已成为控制领域新兴的研究热点, 其研究范畴涉及一致性、编队控制、协调跟踪等实际应用. 最早关于一致性算法的研究可追溯到文献 [1]. 针对无向网络, Vicsek 模型和经典一致性算法的提出最早实现了多智能体的一致性<sup>[2-3]</sup>. 此后, Ren 等<sup>[4]</sup>利用矩阵理论研究了更为一般的通信拓扑, 针对一阶有向网络, 提出在网络拓扑具有生成树情况下的所有节点的状态一致性分析. 针对无领导者或单领导者的一致性相继出现了大量优秀的研究成果<sup>[5-8]</sup>.

在多智能体应用中经常会遇到有多个领导者个

体的情况, 包含控制作为一种特殊的多领导者协同控制, 在近年来受到了学者们的广泛关注. 所谓包含控制是指一组跟随者在多个领导者的引领下, 实现并保持在由领导者所围成的最小几何空间(凸包)中运动. 譬如, 在多智能体机器人协同作战网络中, 只需对个别机器人下达指令或配备传感器来探测危险障碍物, 这些机器人被指定为领导者, 其余机器人则为跟随者. 可以让领导者形成一个安全的移动凸包, 其他机器人根据领导者传来的信息移动到领导者组成的安全凸包中行军运输. 文献 [9] 针对存在非线性干扰的有向网络研究了其包含控制问题, 采用齐次理论和滑模方法设计了非光滑控制协议, 使跟随者在有限时间内收敛于领导者组成的凸包中; 文献 [10-11] 针对有

**收稿日期:** 2015-02-01; **修回日期:** 2015-05-13.

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(61364017); 江西省高校科技落地计划项目(KJLD12068); 江西省“井冈之星”青年科学家培养计划项目(20122BCB23010); 江西省自然科学基金项目(20132BAB201039).

**作者简介:** 陈世明(1977—), 男, 教授, 博士, 从事复杂网络理论、多智能体系统、优化算法等研究; 王培(1990—), 男, 硕士生, 从事多智能体一致性的研究.

向网络,分别讨论了二阶和高阶系统的包含控制问题,提出了当领导者静止和运动时相应的控制协议;文献[12]研究了带有未知参数的拉格朗日系统包含控制问题,提出了基于神经网络的相对位置和速度矢量的自适应包含控制协议;文献[13]针对二阶有向网络存在的有界扰动等,通过非奇异终端滑模方案设计了非线性包含控制协议来实现其包含控制。

鉴于当前多智能体包含控制研究成果大多没有考虑领导者个体的选取和数目问题(领导者和跟随者的配置问题),本文结合可控性理论,对有向多智能体网络的包含控制问题进行研究.首先,针对任意给定拓扑结构的有向多智能体网络,应用复杂网络可控性理论和图论中二分图最大匹配算法确定网络中的最小驱动节点集,给出满足网络可控的领导者集合确定方案;然后,基于相对局部位置信息设计分布式包含控制协议,驱使跟随者渐近收敛到由领导者构成的凸包中.与文献[9-13]相比,将控制的相关理论引入到包含控制中,提出可控包含控制概念,研究任意给定拓扑结构的网络如何有效选取领导者的问题,实现网络的有效可控包含,更具实际意义。

## 1 问题描述

### 1.1 复杂网络可控性理论

在现代控制理论中,系统可控性是反映输入对系统状态的控制能力的一般概念.给定一个线性定常控制系统

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x \in R^N, \quad u \in R^M, \quad (1)$$

其中  $A = (a_{ij})_{N \times N}$  和  $B = (b_{ij})_{N \times M}$  ( $M \leq N$ ) 分别为系统矩阵和输入矩阵.如果对于任意给定的初态  $x(0) = x_0$  和终态  $x_f$ ,都存在控制输入  $u$  和有限时刻  $T$ ,使得  $x(T) = x_f$ ,则称系统(1)是可控的.可控性的一个经典的充要判据是其对应的可控性矩阵满秩,表示为

$$\text{rank} Q_c \triangleq \text{rank}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = N. \quad (2)$$

对于复杂网络系统而言,网络的可控性一般是指:通过对若干选取的控制节点(即驱动节点)施加控制信号,使得整个网络可控并能达到预期状态。

现将系统(1)视为由  $N$  个节点组成的有向网络  $G$  的状态方程.其中:  $N$  阶矩阵  $A = \{a_{ij} | i, j \in [1, N]\}$  为网络中节点的邻接关系,如果节点  $i$  能够接受到  $j$  的信息,则  $a_{ij} > 0$ ;  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$  为  $N$  个节点在时刻  $t$  的状态;  $N \times M$  矩阵  $B = \{b_{ij} | i \in [1, N], j \in [1, M]\}$  为节点与外部控制信号的连接关系;  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_M(t))^T$  为  $t$  时刻  $M$  个节点的输入控制信号,  $b_{ij} = 1$  表示节点  $i$  上施加信号

$u_j(t)$ ; 有向图  $G$  所对应的 Laplacian 矩阵定义为  $L = D - A$ , 矩阵  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_N)$  为入度矩阵.对于由  $N$  个智能体组成的网络,设有  $m$  个跟随者和  $N - m$  个领导者,若领导者之间无通信,则为了表示方便,图  $G$  的 Laplacian 矩阵可以写为

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ 0_{(N-m) \times m} & 0_{(N-m) \times (N-m)} \end{bmatrix}.$$

其中:  $L_1 \in R^{m \times m}$  描述跟随者之间的通信情况,  $L_2 \in R^{m \times (N-m)}$  描述领导者与跟随者之间的通信情况。

### 1.2 相关定义引理

**假设 1** 网络拓扑结构中含有一棵联合生成树.即在任意时刻,任意智能体都能通过有向路径与至少一个其他智能体有通信连接。

**定义 1** 对于有向多智能体网络,在对领导者个体施加控制作用时,若任意跟随者均可通过有向路径获取控制信号,且领导者的状态不受跟随者影响,即领导者与跟随者之间是单向通信的,则网络可控,否则网络不可控。

**定义 2** 对于由  $N$  个智能体组成的有向网络,采用二分图最大匹配算法找出网络可控的驱动节点集.找出的驱动节点即为该网络中的领导者,其个数记为  $N - m$  ( $m < N$ ); 非驱动节点为网络中的跟随者,其个数记为  $m$ .分别用  $L$  和  $F$  代表领导者和跟随者的集合。

**定义 3** 令  $C$  为实向量空间  $V \subseteq R^N$  的集合,如果对于任何  $z \in [0, 1]$  和集合  $C$  中的任意  $x, y$ , 都有点  $(1-z)x + zy$  在集合  $C$  中,则  $V$  中  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  的凸包是指包含  $X$  中所有点的最小凸集,用  $\text{Co}\{X\}$  表示,即

$$\text{Co}\{X\} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i \mid x_i \in X, a_i \in R, a_i \geq 0, \sum_{i=1}^n a_i = 1 \right\}.$$

**引理 1**<sup>[7]</sup> 在假设 1 成立的前提下,  $L_1$  矩阵是非奇异矩阵且  $L_1$  矩阵的特征值的实部均大于 0, 另外,矩阵  $-L_1^{-1}L_2$  是行和为 1 的正定阵。

**引理 2**<sup>[4]</sup> 有向网络满足结构可控所需的驱动节点取决于网络中的最大匹配。

**引理 3** (Barbalat 引理)<sup>[15]</sup> 设  $x : [0, \infty) \rightarrow R$  一阶连续可导,且当  $t \rightarrow \infty$  时存在极限,如果  $\dot{x}(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$  一致连续,则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0. \quad (3)$$

## 2 二阶有向网络可控包含控制

### 2.1 二分图最大匹配算法确定领导者集合

由引理 2 可知,有向网络的结构可控性问题取决

于网络中的最大匹配. 所谓最大匹配是: 给定一个二分图  $G(A)$ ,  $M'$  为图  $G(A)$  边集的一个子集, 如果  $M'$  满足其中的任意两条边都不依附于同一个顶点, 则称  $M'$  是一个匹配, 图中包含边数最多的匹配称为图的最大匹配. 这里应用二分图最大匹配算法来求取网络中的最大匹配, 将有向图  $G(A)$  转换为二分图  $H(A)$ , 且有

$$H(A) = (V_A^+, V_A^-, \Gamma).$$

其中:  $V_A^+ = \{x_1^+, x_2^+, \dots, x_N^+\}$  和  $V_A^- = \{x_1^-, x_2^-, \dots, x_N^-\}$  分别为二分图各列的节点集合;  $\Gamma = \{(x_i, x_j) | a_{ij} \neq 0\}$  为边集.

由二分图最大匹配算法可以得出网络中的最大匹配节点集. 对于一个非匹配节点数不为0的网络, 驱动节点即为非匹配节点.

图1以一个有向网络为例描述了二分图最大匹配算法求取驱动节点的过程.

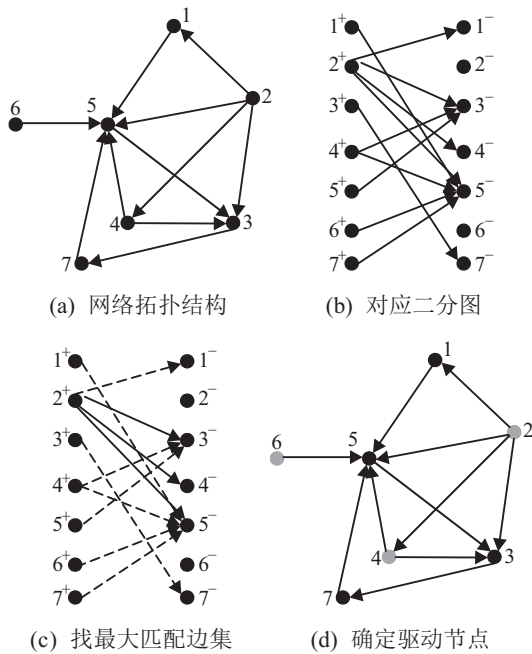


图1 二分图最大匹配算法求驱动节点

图1(a)为网络拓扑结构图, 将图1(a)转化为图1(b)所示的二分图形式, 采用最大匹配算法求取此二分图的最大匹配边, 其最大匹配边集如图1(c)的虚线所示, 可以看出其最大匹配边集有两组: 1)  $1^+ \rightarrow 5^-, 2^+ \rightarrow 1^-, 3^+ \rightarrow 7^-, 4^+ \rightarrow 3^-, 5^+ \rightarrow 3^-, 6^+ \rightarrow 5^-, 7^+ \rightarrow 5^-$ ; 2)  $1^+ \rightarrow 5^-, 2^+ \rightarrow 4^-, 3^+ \rightarrow 7^-, 4^+ \rightarrow 3^-, 5^+ \rightarrow 3^-, 6^+ \rightarrow 5^-, 7^+ \rightarrow 5^-$ . 第1组中, 节点1、3、5、7为匹配节点, 2、4、6为非匹配节点; 第2组中, 节点3、4、5、7为匹配节点, 1、2、6为非匹配节点. 由此可知, 网络的驱动节点集有两组, 即2、4、6节点或者1、2、6节点, 图1(d)为其中一组, 节点2、4、6即为驱动节点.

### 2.2 可控包含控制

根据定义2对一个具有  $N$  个智能体的有向拓扑网络应用第2.1节所述的二分图最大匹配算法来确定网络中的跟随者集合和领导者集合, 两种集合分别表示如下:

$$F = \{x_1, x_2, \dots, x_m\},$$

$$L = \{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_N\}.$$

跟随者的二阶动力学模型如下:

$$\dot{x}_i(t) = v_i(t), \dot{v}_i(t) = u_i(t), i = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

考虑到领导者都是静止的, 故对于任意的  $i \in L$ ,  $x_i(t)$  为常值, 即  $\dot{x}_i(t) = 0$ .

对于每一个跟随者智能体  $i \in F$ , 设计分布式控制协议如下:

$$u_i(t) = -\beta v_i(t) - \sum_{j \in F \cup L} a_{ij}(t) [\gamma(x_i(t) - x_j(t))]. \quad (5)$$

其中:  $0 < \gamma < 1; 0 < \beta; \sum_{j \in F \cup L} a_{ij}(t) [\gamma(x_i(t) - x_j(t))]$

用于驱动跟随者位置, 能够不断趋近领导者来实现最终的包含行为;  $\beta v_i(t)$  为智能体的速度自检项. 这里, 将网络的位置误差函数定义为

$$e_x = x_F - L_1^{-1} L_2 x_L,$$

其中  $e_x = [e_{x1}, e_{x2}, \dots, e_{xm}]^T$  为跟随者的位置误差.

**定理1** 考虑由动力学系统(4)所组成的二阶有向积分器网络, 应用二分图最大匹配算法确定网络中领导者和跟随者集合, 若网络满足假设1, 则在控制协议(5)的作用下所有跟随者都能够渐近收敛到由领导者构成的凸包中.

**证明** 有向网络在控制协议(5)的作用下能够实现包含, 只需证明对于所有跟随者智能体  $i \in F$ , 当  $t \rightarrow \infty$  时, 满足: 1)  $\dot{x}_i(t) \rightarrow 0$ ; 2)  $x_i \rightarrow x_j, j \in F \cup L$ ; 3)  $\min_{j \in L} x_j \leq x_i \leq \max_{j \in L} x_j$ .

现构造 Lyapunov 函数如下:

$$H(x, v) = \frac{1}{2} \sum_{i \in F} v_i^2 + \sum_{i \in F} \sum_{j \in F \cup L} Q_{ij}, \quad (6)$$

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} a_{ij} \|x_i - x_j\|^2. \quad (7)$$

其中:  $Q_{ij}$  为引入的正定辅助函数, 易得到

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial x_i} = a_{ij} \dot{x}_i (x_i - x_j). \quad (8)$$

对所得的 Lyapunov 函数求导, 可得

$$\dot{H} =$$

$$\sum_{i \in F} \dot{x}_i \left( -\beta v_i - \sum_{j \in F \cup L} a_{ij} \{ \gamma [x_i(t) - x_j(t)] \} \right) +$$

$$\sum_{i \in F} \dot{x}_i \left( \sum_{j \in F} a_{ij} (x_i - x_j) \right) +$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in F} \dot{x}_i \left( \sum_{j \in L} a_{ij} (x_i - x_j) \right) = \\ \sum_{i=1}^m v_i \left( -\beta v_i - k \sum_{j=1}^n a_{ij} [\gamma (x_i - x_j)] \right) + \\ \sum_{i=1}^m \dot{x}_i \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} (x_i - x_j) \right) + \\ \sum_{i=1}^m \dot{x}_i \left( \sum_{j=m+1}^n a_{ij} (x_i - x_j) \right). \end{aligned}$$

由于领导者都是静止的, 有  $\dot{x}_i(t) = 0, i \in L$ , 对于任意的  $i \in F, \dot{x}_i(t) = v(t)$ , 且  $0 < \gamma < 1$ , 故上式可以化简为

$$\dot{H} \leq \sum_{i=1}^m -\beta v_i^2 \leq 0.$$

由上式推导可以得出, 对于任意的  $v \neq 0, \dot{H} < 0$ , 智能体系统是渐近稳定的. 由式(5)和李雅普诺夫函数(6)的构造可知, 当系统稳定时, 对于跟随者个体有  $x_i \rightarrow x_j, j \in F \cup L$ . 由于  $x_i$  一阶连续可导且存在极限和  $\dot{x}_i$  一致连续, 结合 Barbalat 引理可知, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $v_i(t) \rightarrow 0, i \in F$ .

综上可知, 系统稳定时有  $x_i \rightarrow x_j, j \in F \cup L$ , 结合引理 1 和位置误差函数  $e_x = x_F - L_1^{-1} L_2 x_L$ , 当系统稳定时, 有跟随者个体  $x_i \rightarrow x_j, j \in L$ . 对于与领导者个体有通信的跟随者而言, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $\min_{j \in L} x_j \leq x_i \leq \max_{j \in L} x_j$ ; 对于与领导者个体无直接通信的跟随者而言, 由假设 1 可知, 其至少存在一个直接或间接的邻居个体与领导者个体有通信, 故  $t \rightarrow \infty$ , 亦有  $\min_{j \in L} x_j \leq x_i \leq \max_{j \in L} x_j$ .

综上可知, 对于跟随者智能体  $i \in F$ , 当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $\min_{j \in L} x_j \leq x_i \leq \max_{j \in L} x_j$ . 因此, 所有跟随者个体最终都会收敛于领导者个体组成的凸包中.  $\square$

### 3 仿真实验

本节考虑图 1 中 7 个智能体组成的有向网络, 其网络拓扑结构如图 1(a) 所示.

#### 3.1 驱动节点为领导者的仿真实验

由上述内容可知, 满足网络可控的领导者集合有两组: 1) 2、4、6 节点为领导者集合; 2) 1、2、6 节点为领导者集合. 由于领导者是静态的, 不考虑领导者之间的通信关系. 以 2、4、6 节点为领导者集合和以 1、2、6 节点为领导者集合的包含控制分别如图 2 和图 3 所示, 其中图 2(a)、图 3(a) 为相应的网络拓扑结构图, 图 2(b)、图 3(b) 为相应的节点运动轨迹.

在图 2 ~ 图 5 中, 黑色圆代表领导者, 三角形虚线代表领导者组成的凸包.

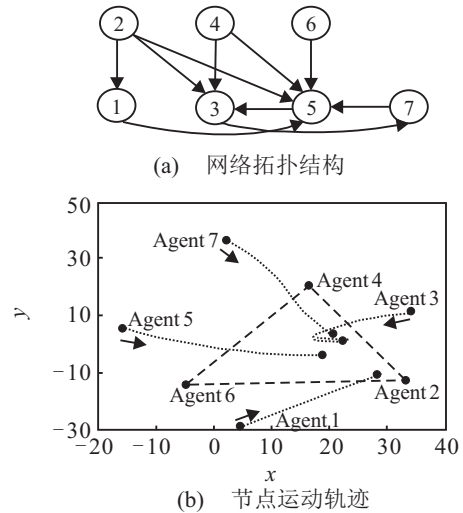


图 2 当 2、4、6 为领导者时的包含控制

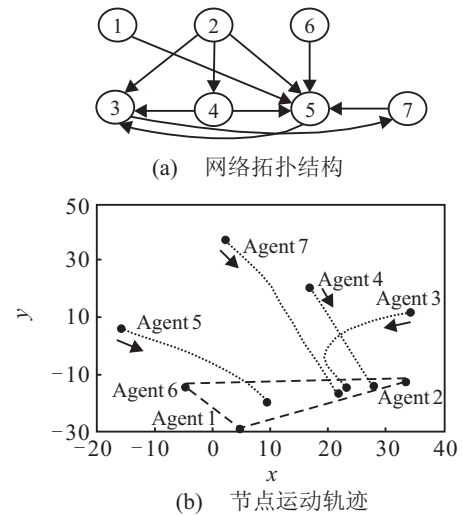


图 3 当 1、2、6 为领导者时的包含控制

#### 3.2 任选节点为领导者的仿真实验

在本节中, 任选网络拓扑中的节点作为领导者智能体, 仿真观察其包含控制过程. 这里选择 2 组智能体作为仿真对象: 1) 2、4、5 智能体作为领导者; 2) 1、3、6 智能体作为领导者. 包含控制如图 4 和图 5 所示.

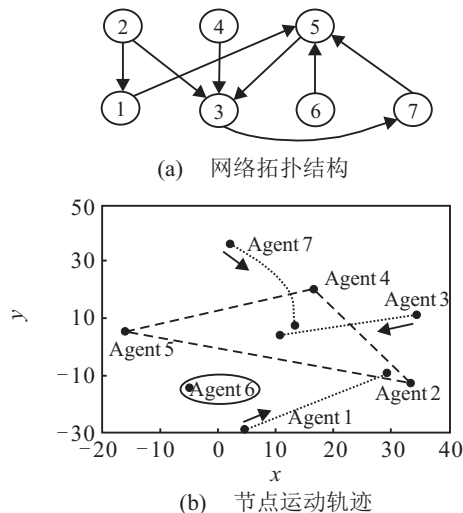


图 4 当 2、4、5 为领导者时的包含控制

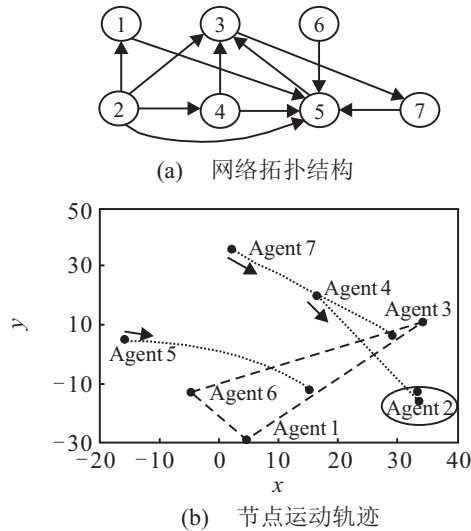


图5 当1、3、6为领导者时的包含控制

由图4(b)和图5(b)可知,在最终时态图4(b)中智能体6和图5(b)中智能体2未能到达领导者组成的凸包;由图5(b)可知,智能体4由于受到智能体2的通信影响,最终位置向智能体2移动;由拓扑结构图4(a)可知,跟随者智能体6不受领导者智能体影响;由拓扑结构图5(a)可知,智能体2、4不受领导者智能体影响.通过对领导者施加控制信号输入使得对该智能体不可达,故这两个网络包含控制不可控.

#### 4 结 论

本文针对随机给定拓扑结构的二阶有向网络,引入可控性理论,研究网络中领导者和跟随者的配置问题,提出了可控包含控制概念.应用复杂网络可控性理论和二分图最大匹配算法求取了网络中的最小驱动节点集,进一步确定了满足网络可控的领导者和跟随者集合.根据局部位置信息为跟随者智能体设计了相应的控制协议,驱使跟随者能够渐近收敛于由多个领导者构成的静态凸包中,从而实现了网络的可控包含控制.仿真结果对比验证了理论方案的正确性.

#### 参考文献(References)

[1] Winkler R L. The consensus of subjective probability distributions[J]. *Manage Science*, 1968, 15(2): 61-75.

[2] Bertsekas D P, Tsitsiklis J N. *Parallel and distributed computation: Numerical methods*[M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989: 72-89.

[3] Olfati-saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520-1533.

[4] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655-661.

[5] Khoo S, Xie L H, Man Z H. Robust finite-time consensus tracking algorithm for multi-robot systems[J]. *IEEE Trans on Mechatronics*, 2009, 14(2): 219-228.

[6] Moore K L, Lucarelli D. Decentralized adaptive scheduling using consensus variables[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(10): 921-940.

[7] Cao Y C, Ren W, Li Y. Distributed discrete-time coordinated tracking with a time-varying reference state and limited communication[J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1299-1305.

[8] Li Z, Liu X, Ren W. Distributed tracking control for linear multiagent systems with a leader of bounded unknown input[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2013, 58(2): 518-523.

[9] 于镛, 伍清河. 二阶有向网络的鲁棒有限时间包容控制[J]. *控制与决策*, 2012, 27(10): 1465-1470.  
(Yu Z, Wu Q H. Finite time robust containment control of second order directed networks[J]. *Control and Decision*, 2012, 27(10): 1465-1470.)

[10] Cao Y C, Stuat D, Ren W. Distributed containment for multiple autonomous veicles with double-integrator dynamic: Algorithms and experiments[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2011, 19(4): 929-938.

[11] 王寅秋, 伍清河, 王焱. 高阶有向积分器网络的包含控制[J]. *控制与决策*, 2013, 28(8): 1195-1120.  
(Wang Y Q, Wu Q H, Wang Y. Containment control for high-order multi-agent systems under dircted topologies[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(8): 1195-1120.)

[12] Mei J, Ren W, Li B. Containment control for networked unknown Lagrangian systems with multiple dynamic leaders under a directed graph[C]. *American Control Conf. Washington: IEEE Press*, 2013: 522-527.

[13] He X Y, Wang Q Y. Finite-time containment control for second-order multiagent systems under directed topology[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 2014, 61(8): 619-623.

[14] Liu Y Y, Slotine J J, Barabási A L. Controllability of complex networks[J]. *Nature*, 2011, 473(7346): 167-173.

[15] Slotine J J E, Li W. *Applied nonlinear control*[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1991: 123-125.