

文章编号: 1001-0920(2016)04-0693-08

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.0198

无需相对速度信息的多 Euler-Lagrange 系统 自适应神经网络包含控制

孙延超, 李传江, 姚俊羽, 马广富

(哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 对含有模型非线性不确定性和外部扰动的多 Euler-Lagrange 系统的分布式协调包含控制问题进行研究. 考虑通讯拓扑为有向图, 所有领航者均为动态, 且各智能体间相对速度信息不可测情况. 首先, 选取相对速度作为辅助变量, 引入低通滤波器进行估计; 然后, 采用神经网络方法逼近并补偿非线性不确定性, 提出一种分布式自适应包含控制律, 并应用 Lyapunov 稳定性理论证明闭环系统的包含误差一致最终有界; 最后, 通过仿真算例验证了所提出的控制律的有效性.

关键词: Euler-Lagrange 系统; 多智能体系统; 包含控制; 自适应控制; 神经网络

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Adaptive neural-network containment control of multiple Euler-Lagrange systems without using relative velocity information

SUN Yan-chao, LI Chuan-jiang, YAO Jun-yu, MA Guang-fu

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: MA Guang-fu, E-mail: magf@hit.edu.cn)

Abstract: The problem of distributed coordinated containment control of multiple Euler-Lagrange systems in presence of nonlinear model uncertainties and external disturbances is investigated. The communication topology is a directed graph, the leaders are dynamic and the relative velocity information between agents is unmeasured. Firstly, the relative velocities are chosen as the auxiliary variables and estimate the auxiliary variables through the low-pass filters. Then, the neural-network method is used to approximate and compensate the nonlinear uncertainties of the systems, and the distributed adaptive containment algorithm is proposed. Based on the Lyapunov stability theory, it is proved that the containment errors between leaders and followers are uniformly ultimately bounded. Finally, a simulation example is presented to illustrate the effectiveness of the proposed control method.

Keywords: Euler-Lagrange systems; multi-agent systems; containment control; adaptive control; neural networks

0 引言

近年来, 嵌入式系统和网络通信技术的飞速发展使多智能体系统的协调控制呈现出明显的应用价值, 并在许多领域引起了广泛关注, 如多运动体编队控制^[1-2], 航天器姿态, 轨道协同控制^[3-4], 传感器网络分布式控制^[5-7]等. 随着工作环境复杂性的增加, 实际上许多任务难以由单个运动体实现, 但通过多智能体间的协调控制可以较好地完成, 并提高工作效率和可靠性. 目前, 无领航者的一致性问题是多智能体协调控制领域主要研究的课题之一. 对于无领航者系

统, 每个智能体通过与邻居交互信息来更新自己的状态, 并使整个系统达到一个共同值(通常是系统初始状态的函数). 文献[8]基于 Lyapunov 稳定性理论, 对由一阶、二阶积分模型对象构成的多智能体系统设计了一种分布式控制律, 使整个系统的状态趋于一致; 文献[9]在文献[8]的基础上设计了无需邻居相对速度信息的一致性算法, 并使系统状态趋于一致; 文献[10]在有向通讯拓扑下研究了二阶积分动力学系统的一致性, 并考虑了系统存在非线性不确定性情况. 注意到上述研究均是以一阶或二阶积分方

收稿日期: 2015-02-08; 修回日期: 2015-05-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61304005, 61174200); 高等学校博士学科点专项科研基金项目(20102302110031).

作者简介: 孙延超(1987-), 男, 博士生, 从事非线性系统协同控制、航天器控制的研究; 马广富(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 从事航天器导航、制导与控制等研究.

程作为智能体系统的动力学模型,但在实际中几乎所有系统的模型都是具有本质非线性的,因此线性多智能体系统协调控制的研究很难得到实际应用. Euler-Lagrange (EL) 方程可以用来描述大多非线性物理系统,比如机械臂、水下机器人、直升机和航天器等,因此基于 EL 动力学模型的多智能体协调控制具有更重要的研究意义.

对于一致性问题,所有智能体最后趋于的共同值通常被假设为一个常数,这也就无法适用于系统具有时变轨迹的情况,因此带有领航者的多智能体协调控制问题得到了充分的重视. 领航者独立于跟随者,但会影响跟随者,因此通过设定领航者的轨迹可以使整个智能体系统达到控制的目标,从而降低设计和控制成本. 在实际中,智能体系统的所有跟随者通常被要求跟踪某一个领航者或者到达某几个领航者围成的特殊几何区域内. 对于存在单个领航者的情况,文献[11]在假设只有部分跟随者可以获得领航者信息的条件下,对非线性系统的协调跟踪控制问题进行了研究. 对于存在多个领航者的情况,目前主要考虑领航者组成动态凸包拓扑结构,因为这种结构是领航者围成的严格封闭空间区域,具有实际的应用需求,比如动物集群、灾难营救、深空探测的安全区域等. 多领航者包含控制具有较强的系统鲁棒性和设计灵活性. 文献[12]研究了多领航者的包含控制问题,最终使所有跟随者收敛到领航者组成的动态凸包内;文献[13]同样对包含控制问题进行了研究,提出的控制算法满足严格分布式,具有有限时间特性. 但上述两篇文献考虑的都是无向通讯拓扑结构. 文献[14]对航天器编队系统的姿态包含控制问题进行了研究,但主要是基于一阶积分多智能体系统的研究思路;文献[15]考虑了多个动态领航者,对 EL 系统的包含控制问题进行了研究,但在分布式控制律设计方面同时利用了相对位置和相对速度信息.

多智能体系统构成的网络环境往往存在多种不确定因素和外部干扰. 文献[16]考虑了模型的参数不确定性,对网络 EL 系统的包含控制问题进行了研究;同样针对参数不确定性情况,文献[17]基于滑模控制提出了一种分布式控制律,使所有智能体跟踪目标轨迹. 注意到以上文献考虑的均是 EL 系统模型存在可线性化处理的参数不确定性情况,但系统的非线性不确定性问题更值得考虑. 神经网络 (NN) 对于非线性函数具有良好的逼近能力^[18],因此可用于逼近和补偿系统中存在的非线性不确定性等. 文献[19]利用 NN 补偿系统中的未知非线性设计了自适应同步控制器,使得所有跟随者一致趋近于领航者;文献[20]采用神经网络方法处理模型的结构不确定性,但针对的是

非 EL 方程系统模型情况;文献[21]针对每一个智能体设计了基于神经网络的分布式自适应控制律,但神经网络的回归向量维数较高,并且需要利用难以获得的邻居的加速度信息. 受上述文献启发,本文将采用神经网络的方法处理多 EL 系统的模型非线性不确定性问题. 文献[22]针对 EL 系统,在无需邻居相对速度信息的情况下,设计了一种基于分布式估计器的协调控制律,但考虑的是无领航者情况,而且采用的是无向通讯拓扑结构;文献[23]针对多 EL 系统,在有向通讯拓扑下研究了无需邻居相对速度信息的分布式协同包含控制问题,但系统模型考虑的是参数不确定性情况,且算法成立的前提是要求所有的领航者是静态的,因此具有一定的局限性. 考虑到在实际应用中,所有智能体都处于运动状态,且各智能体间的相对速度信息相比于相对位置信息更难测量,如果通过无线或微波通讯等方式传递,则会增大整个系统的通讯负担,因此有必要对无需相对速度信息的协调控制问题进行研究.

本文针对多 EL 系统的分布式包含控制问题进行了研究,考虑所有的领航者均为动态,系统模型具有非线性不确定性和外部扰动,通讯拓扑为有向图,且相对速度信息不可测. 首先,引入由相对速度信息构成的辅助变量,并采用低通滤波器的滤波估计值代替辅助变量来设计控制律;然后,采用神经网络方法逼近系统的非线性不确定性,在此基础上提出一种分布式自适应包含控制律,并通过构造合适的 Lyapunov 函数和理论推导证明了在分布式控制律的作用下,相对速度估计误差和包含控制误差均一致最终有界;最后,通过数值仿真验证了本文控制律的有效性.

1 数学基础和问题描述

1.1 基本数学符号

本文的基本数学符号和定义见表 1.

表 1 基本数学符号和定义

| 符号 | 定义 |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| $\mathbf{0}_{n \times m}$ | $n \times m$ 阶零矩阵 |
| $\mathbf{1}_m$ | m 维全 1 列向量 |
| I_p | p 阶单位阵 |
| $\ \cdot\ $ | 向量的 Euclidean 范数 |
| $\bar{\sigma}(\cdot)$ | 矩阵的最大奇异值 |
| $\underline{\sigma}(\cdot)$ | 矩阵的最小奇异值 |
| $\lambda_{\max}(\cdot)$ | 实对称矩阵的最大特征值 |
| $\lambda_{\min}(\cdot)$ | 实对称矩阵的最小特征值 |
| $\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ | x_1, x_2, \dots, x_n 为对角元素的对角矩阵 |
| $\text{tr}(\cdot)$ | 矩阵的迹 |

1.2 Euler-Lagrange 动力学方程

考虑多智能体系统由 m 个跟随者和 $n - m$ 个领航者组成,分别用集合 $v_F = \{1, 2, \dots, m\}$, $v_L = \{m + 1, m + 2, \dots, n\}$ 表示跟随者集合和领航者集合,第 i

个跟随者的动力学模型可由如下 EL 方程描述:

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) + \omega_i = \tau_i. \quad (1)$$

其中: $q_i \in \mathbf{R}^p$ 、 $\dot{q}_i \in \mathbf{R}^p$ 、 $\ddot{q}_i \in \mathbf{R}^p$ 分别为广义坐标、广义速度和广义加速度; $M_i(q_i) \in \mathbf{R}^{p \times p}$ 为系统惯性矩阵且对称正定; $C_i(q_i, \dot{q}_i) \in \mathbf{R}^{p \times p}$ 为 Coriolis 力/离心力矩阵; $g_i(q_i) \in \mathbf{R}^p$ 为广义有势力矢量; $\tau_i \in \mathbf{R}^p$ 为作用于跟随者 i 的广义控制力矢量; ω_i 为有界的外部扰动(包括未建模动力学、噪声、环境干扰等). 本文假设 $M_i(q_i)$ 、 $C_i(q_i, \dot{q}_i)$ 、 $g_i(q_i)$ 和 ω_i 均是未知的.

式(1)所示的动力学模型满足如下两条性质:

性质 1 有界性. 存在正常数 M_m 和 M_M , 使得 $M_m I_p \leq M_i(q_i) \leq M_M I_p$.

性质 2 反对称性. 矩阵 $\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i)$ 为反对称矩阵, 即对于任意向量 $x \in \mathbf{R}^p$, 有

$$x^T [\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i)] x = 0.$$

1.3 代数图论

本文用图 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \varepsilon, \mathcal{A})$ 描述多智能体间的通讯拓扑. 其中 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为节点集, $\varepsilon \subseteq v \times v$ 为边集, $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为邻接矩阵. 图 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \varepsilon, \mathcal{A})$ 中每条边均有两个节点 (v_i, v_j) , 对于智能体 i 和 j , 边 $(v_i, v_j) \in \varepsilon$ 表示智能体 j 可以从智能体 i 获得信息, 节点 v_i 的邻居节点集合用 $N_i = \{v_j : (v_j, v_i) \in \varepsilon\}$ 表示. 如果对于任意边 $(v_i, v_j) \in \varepsilon \Leftrightarrow (v_j, v_i) \in \varepsilon$, 则图 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \varepsilon, \mathcal{A})$ 称为无向图, 反之为有向图. 有向图的路径是一个有限的节点序列 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{is}$, 该序列满足 $(v_{ik}, v_{ik+1}) \in \varepsilon$.

邻接矩阵 \mathcal{A} 中元素 a_{ij} 具有如下性质: 1) 若 $i = j$, 则 $a_{ij} = 0$; 2) 若 $i \neq j$ 且 $(v_j, v_i) \in \varepsilon$, 则 $a_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = 0$. 特别地, 若 $(v_i, v_j) \in \varepsilon \Leftrightarrow (v_j, v_i) \in \varepsilon$, 则 $a_{ij} = a_{ji} = 1$, 即在无向图中 $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$.

图 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \varepsilon, \mathcal{A})$ 的 Laplacian 矩阵定义为

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \mathcal{D} - \mathcal{A}. \quad (2)$$

其中: $\mathcal{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$.

注 1 在无向图中, $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ 为对称矩阵, 即 $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^T$; 而在有向图中, $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ 一般为不对称矩阵, 即 $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \neq \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^T$.

下面给出本文与通讯拓扑有关的假设条件.

假设 1 多智能体系统的通讯拓扑用有向图 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \varepsilon, \mathcal{A})$ 描述, 并具有如下特性:

$$\mathcal{G}(\mathcal{V}, \varepsilon, \mathcal{A}) = \begin{cases} (v_j, v_i) \in \varepsilon \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in \varepsilon, \forall i, j \in v_F \text{ 且 } j \in N_i; \\ (v_j, v_i) \in \varepsilon, \forall i \in v_F, \forall j \in v_L \text{ 且 } j \in N_i; \\ (v_j, v_i) \in \emptyset, \forall i \in v_L, \forall j \in v_L \cup v_F. \end{cases}$$

由于假设 1 成立, 图 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \varepsilon, \mathcal{A})$ 的 Laplacian 矩阵可以进行分块, 即可以表示为

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times m} & \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

其中: $L_1 \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 且 $L_1 = L_1^T$, $L_2 \in \mathbf{R}^{m \times (n-m)}$.

假设 2 对于每一个跟随者, 在通向该跟随者的有向路径上至少存在一个领航者.

1.4 问题描述

定义 1 设 X 为实向量空间 $V \in \mathbf{R}^n$ 的子集. 用 $\text{Co}(X)$ 表示 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbf{R}^n$ 中所有点围成的凸包, 即

$$\text{Co}(X) = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x_i \mid x_i \in X, a_i \geq 0, \sum_{i=0}^n a_i = 1 \right\}.$$

引理 1^[15] 如果假设 2 成立, 则由多智能体系统 Laplacian 矩阵的分块矩阵组成的 $-L_1^{-1}L_2$ 矩阵的每个元素都是非负的, 并且其所有的行和均为 1, 即有 $-L_1^{-1}L_2 \mathbf{1}_{n-m} = \mathbf{1}_m$.

下面给出本文的其他两个关键假设.

假设 3 所有领航者的速度均有界, 且对于 $\forall i \in v_L$, 存在正常数 V_M , 使得 $\sup \|\dot{q}_i\| \leq V_M < \infty$.

假设 4 智能体间的相对速度信息不可测.

令 $q_F = [q_1^T, q_2^T, \dots, q_m^T]^T$ 为跟随者广义坐标拼成的列向量, $q_L = [q_{m+1}^T, q_{m+2}^T, \dots, q_n^T]^T$ 为领航者广义坐标拼成的列向量. 由定义 1 和引理 1 定义包含误差向量 \bar{q}_F 为

$$\bar{q}_F = q_F + (L_1^{-1}L_2 \otimes I_p)q_L, \quad (4)$$

其中 \otimes 为 Kronecker 积.

引理 2^[20] 对于方程 $\dot{x} = f(t, x)$, 如果存在正常数 α 和 β , 使得对于任意 $\xi \in (0, \beta)$, 存在 $T = T(\xi, \alpha)$, 满足当 $t \geq t_0 + T$ 时, $\|x(t_0)\| \leq \xi \Rightarrow \|x(t)\| \leq \alpha$ 成立, 则称该方程的解是一致最终有界的.

本文的控制目标是: 考虑智能体间的通讯拓扑为有向图且相对速度信息不可测情况, 在多 EL 系统模型存在非线性不确定性和外部扰动的情况下, 设计有效的分布式包含控制律, 使所有跟随者可以收敛并维持在由领航者构成的动态凸包 $\text{Co}(q_L)$ 中.

2 分布式包含控制律设计

本节研究当系统中包含非线性不确定性和外部扰动时, 设计一种分布式包含控制律. 对于 $\forall i \in v_F$, 首先引入如下辅助变量:

$$\dot{q}_{ri} = -\alpha \sum_{j \in v_F \cup v_L} a_{ij}(q_i - q_j), \quad (5)$$

$$\ddot{q}_{ri} = -\alpha \sum_{j \in v_F \cup v_L} a_{ij}(\dot{q}_i - \dot{q}_j), \quad (6)$$

其中 α 为任意正常数.

注意到辅助变量 (6) 采用了相对速度信息. 为了避免使用相对速度信息并实现控制目标, 受文献 [24] 启发, 引入低通滤波器, 即

$$\Omega_i \ddot{q}_{wi} + \dot{q}_{wi} = \dot{q}_{ri}, \quad (7)$$

其中 $\Omega_i \in \mathbf{R}^{p \times p}$ 为对称正定矩阵. 采用滤波估计值 \ddot{q}_{wi} 、 \dot{q}_{wi} 代替辅助变量 \ddot{q}_{ri} 、 \dot{q}_{ri} 完成控制律设计. 定义估计误差 q_{yi} 为

$$q_{yi} = \dot{q}_{wi} - \dot{q}_{ri}. \quad (8)$$

由于神经网络具有较强的学习能力, 并且对非线性函数具有良好的逼近能力, 采用神经网络对系统的非线性不确定性进行逼近. 对于任意连续方程 $h(Z)$, 其自变量在一个紧集 Ω_Z 内变化, 则可以通过一个神经网络对这个方程进行逼近, 且逼近误差可以达到任意精度^[18], 即

$$h(Z) = W^* \varphi(Z) + \varepsilon, \quad \forall Z \in \Omega_Z. \quad (9)$$

其中: W^* 为神经网络最优权值矩阵, $\varphi(Z)$ 为激活函数, ε 为采用最优权值矩阵 W^* 时的逼近误差. 关于神经网络有如下假设成立^[18].

假设 5 对于式 (9), 存在理想的常值矩阵 W^* , 并且对于任意的 $Z \in \Omega_Z$, 存在一个有界常数 $\varepsilon^* > 0$, 使得 $|\varepsilon| \leq \varepsilon^*$.

选取如下形式的未知非线性函数:

$$f_i = -M_i(q_i) \ddot{q}_{wi} - C_i(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_{wi} - g_i(q_i), \quad (10)$$

利用神经网络对 f_i 进行逼近, 则式 (10) 可以表示为

$$f_i(q_i, \dot{q}_{wi}, \dot{q}_i, \ddot{q}_{wi}) = W_i^T \varphi_i(q_i, \dot{q}_{wi}, \dot{q}_i, \ddot{q}_{wi}) + \vartheta_i. \quad (11)$$

其中: W_i 为最优权值矩阵, $\varphi_i(\cdot)$ 为激活函数, ϑ_i 为有界逼近误差.

激活函数 $\varphi_i(\cdot)$ 可以选取多种形式, 例如高斯函数、Sigmoid 函数等^[21]. 本文选取高斯函数作为激活函数, 并令 $v = [q_i^T, \dot{q}_{wi}^T, \dot{q}_i^T, \ddot{q}_{wi}^T]^T \in \mathbf{R}^{4p}$, 取 $\varphi_i = [\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{ir}]$, 且有

$$\varphi_{ij}(v) = \exp\left(-\frac{\|v - c_{ij}\|^2}{\sigma_{ij}^2}\right), \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (12)$$

其中 $c_{ij} \in \mathbf{R}^{4p}$ 和 σ_{ij} 分别为高斯函数的中心和宽度.

函数 f_i 的估计 \hat{f}_i 可写为如下形式:

$$\hat{f}_i = \hat{W}_i^T \varphi_i(q_i, \dot{q}_{wi}, \dot{q}_i, \ddot{q}_{wi}), \quad (13)$$

其中 \hat{W}_i 为理想权值矩阵 W_i 的估计值. 定义权值矩阵估计误差为 $\tilde{W}_i = W_i - \hat{W}_i$, 设

$$z_i = \dot{q}_i - \dot{q}_{wi}, \quad (14)$$

结合式 (1)、(10) 和 (14) 可以得到

$$M_i \dot{z}_i = -C_i z_i + \tau_i + f_i - \omega_i. \quad (15)$$

分别设计一组分布式包含控制律和权值估计自

适应律, 即

$$\tau_i = -K_i z_i - \hat{W}_i^T \varphi_i, \quad (16)$$

$$\dot{\hat{W}}_i = \gamma(\varphi_i z_i^T - v \hat{W}_i). \quad (17)$$

为了后续证明过程叙述的方便, 给出如下矩阵表达式:

$$\tau = [\tau_1^T, \tau_2^T, \dots, \tau_m^T]^T;$$

$$q_F = [q_1^T, q_2^T, \dots, q_m^T]^T, \quad \dot{q}_F = [\dot{q}_1^T, \dot{q}_2^T, \dots, \dot{q}_m^T]^T;$$

$$q_L = [q_1^T, q_2^T, \dots, q_n^T]^T, \quad \dot{q}_L = [\dot{q}_{m+1}^T, \dot{q}_{m+2}^T, \dots, \dot{q}_n^T]^T;$$

$$\dot{q}_r = [\dot{q}_{r1}^T, \dot{q}_{r2}^T, \dots, \dot{q}_{rn}^T]^T;$$

$$\dot{q}_w = [\dot{q}_{w1}^T, \dot{q}_{w2}^T, \dots, \dot{q}_{wm}^T]^T;$$

$$\dot{q}_y = [\dot{q}_{y1}^T, \dot{q}_{y2}^T, \dots, \dot{q}_{ym}^T]^T;$$

$$z_F = [z_1^T, z_2^T, \dots, z_m^T]^T;$$

$$M(q) = \text{diag}(M_1(q_1), M_2(q_2), \dots, M_m(q_m));$$

$$C(q, \dot{q}) =$$

$$\text{diag}(C_1(q_1, \dot{q}_1), C_2(q_2, \dot{q}_2), \dots, C_m(q_m, \dot{q}_m));$$

$$K = \text{diag}(K_1, K_2, \dots, K_m);$$

$$\Omega = \text{diag}(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m);$$

$$\vartheta = [\vartheta_1^T, \vartheta_2^T, \dots, \vartheta_m^T]^T;$$

$$\omega = [\omega_1^T, \omega_2^T, \dots, \omega_m^T]^T;$$

$$\varphi = [\varphi_1^T, \varphi_2^T, \dots, \varphi_m^T]^T;$$

$$W = \text{diag}(W_1, W_2, \dots, W_m),$$

$$\hat{W} = \text{diag}(\hat{W}_1, \hat{W}_2, \dots, \hat{W}_m),$$

$$\tilde{W} = \text{diag}(\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \dots, \tilde{W}_m).$$

定理 1 考虑含模型非线性不确定性和外部扰动的多 EL 系统 (1), 基于假设 1~假设 4, 在分布式自适应控制律 (16) 和 (17) 的作用下可使所有跟随者相对领航者的包含误差一致最终有界.

证明 选取如下 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2} \dot{q}_r^T \dot{q}_r + \frac{1}{2} \dot{q}_y^T \dot{q}_y + \frac{1}{2} z_F^T M z_F + \frac{1}{2\gamma} \text{tr}(\tilde{W}_i^T \tilde{W}_i). \quad (18)$$

对 V 求导, 利用辅助变量式 (6) 和估计误差式 (8) 可以得到如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \dot{q}_r^T [-\alpha(L_1 \otimes I_p) \dot{q}_F - \alpha(L_2 \otimes I_p) \dot{q}_L] + \\ & \dot{q}_y^T \dot{q}_w - \dot{q}_y^T [-\alpha(L_1 \otimes I_p) \dot{q}_F - \alpha(L_2 \otimes I_p) \dot{q}_L] + \\ & \frac{1}{2} z_F^T \dot{M} z_F + z_F^T M \dot{z}_F + \frac{1}{\gamma} \sum_{i \in \nu_F} \text{tr}(\tilde{W}_i^T \dot{\tilde{W}}_i). \end{aligned} \quad (19)$$

根据式 (7), \ddot{q}_{wi} 可以表示为

$$\ddot{q}_{wi} = \Omega_i^{-1}(\dot{q}_{ri} - \dot{q}_{wi}). \quad (20)$$

将式 (8)、(14) 和 (20) 代入 (19), 结合性质 2、分布式包含控制律 (16) 和权值估计自适应律 (17), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\alpha \dot{q}_r^T(L_1 \otimes I_p) \dot{q}_r - \alpha \dot{q}_r^T(L_1 \otimes I_p) z_F - \\ & \alpha \dot{q}_r^T(L_2 \otimes I_p) \dot{q}_L - \alpha \dot{q}_r^T(L_1 \otimes I_p) q_y - \\ & q_y^T \Omega^{-1} q_y + \alpha q_y^T(L_1 \otimes I_p) \dot{q}_r + \\ & \alpha q_y^T(L_1 \otimes I_p) z_F + \alpha q_y^T(L_1 \otimes I_p) q_y + \\ & \alpha q_y^T(L_2 \otimes I_p) \dot{q}_L - z_F^T K z_F + z_F^T W^T \varphi + \\ & z_F^T(\vartheta - \omega) - \sum_{i \in \nu_F} \text{tr}(\tilde{W}_i^T \varphi_i z_i^T) + \\ & \nu \sum_{i \in \nu_F} \text{tr}(\tilde{W}_i^T \hat{W}_i). \end{aligned} \quad (21)$$

又由于如下等式关系成立:

$$\begin{aligned} z^T \tilde{W}^T \varphi &= \text{tr}(z^T \tilde{W}^T \varphi) = \\ \text{tr}(\tilde{W}^T \varphi z^T) &= \sum_{i \in \nu_F} \text{tr}(\tilde{W}_i^T \varphi_i z_i^T), \end{aligned}$$

且有 $L_1 = L_1^T$, 则可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\alpha \dot{q}_r^T(L_1 \otimes I_p) \dot{q}_r - \alpha \dot{q}_r^T(L_1 \otimes I_p) z_F - \\ & \alpha \dot{q}_r^T(L_2 \otimes I_p) \dot{q}_L - q_y^T \Omega^{-1} q_y + \\ & \alpha q_y^T(L_1 \otimes I_p) z_F + \alpha q_y^T(L_1 \otimes I_p) q_y + \\ & \alpha q_y^T(L_2 \otimes I_p) \dot{q}_L - z_F^T K z_F + z_F^T(\vartheta - \omega) + \\ & \nu \sum_{i \in \nu_F} \text{tr}(\tilde{W}_i^T \hat{W}_i). \end{aligned} \quad (22)$$

由于如下关于迹的性质成立:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A + B) &= \text{tr}(A) + \text{tr}(B), \\ \text{tr}(BA) &= \text{tr}(AB), \\ 2\text{tr}(AB) &\leq \text{tr}(B^T B) + \text{tr}(A^T A), \end{aligned} \quad (23)$$

有

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \nu_F} \text{tr}(\tilde{W}_i^T \hat{W}_i) = \\ & \text{tr}(\tilde{W}_i^T W_i) - \text{tr}(\tilde{W}_i^T \tilde{W}_i) \leq \\ & \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{W}_i^T \tilde{W}_i) + \frac{1}{2} \text{tr}(W_i^T W_i) - \text{tr}(\tilde{W}_i^T \tilde{W}_i) = \\ & \frac{1}{2} \text{tr}(W_i^T W_i) - \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{W}_i^T \tilde{W}_i). \end{aligned} \quad (24)$$

利用范数基本性质和式(24)将式(22)进行放缩, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\alpha \sigma(L_1) \|\dot{q}_r\|^2 + \alpha \bar{\sigma}(L_1) \|\dot{q}_r\| \|z_F\| + \\ & \alpha \bar{\sigma}(L_2) \|\dot{q}_r\| \|\dot{q}_L\| - \lambda_{\max}^{-1}(\Omega) \|q_y\|^2 + \\ & \alpha \bar{\sigma}(L_1) \|q_y\| \|z_F\| + \alpha \bar{\sigma}(L_1) \|q_y\|^2 + \\ & \alpha \bar{\sigma}(L_2) \|q_y\| \|\dot{q}_L\| - z_F^T K z_F + \\ & \frac{\nu}{2} \sum_{i \in \nu_F} \text{tr}(W_i^T W_i) - \frac{\nu}{2} \sum_{i \in \nu_F} \text{tr}(\tilde{W}_i^T \tilde{W}_i) + \\ & \|z_F\| \|\vartheta - \omega\|. \end{aligned} \quad (25)$$

由于 ϑ, ω 均为有界量, 必存在正常数 δ , 使得 $\|\vartheta - \omega\| \leq \delta$ 成立. 再根据 Young 不等式, 式(25)可以进一步表示为

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\left[\alpha \sigma(L_1) - \frac{\alpha \bar{\sigma}^2(L_1)}{2\varepsilon_1} - \frac{\alpha \bar{\sigma}(L_2) V_m^2}{2\varepsilon_2}\right] \|\dot{q}_r\|^2 - \\ & \left[\lambda_{\max}^{-1}(\Omega) - \frac{\alpha \bar{\sigma}^2(L_1)}{2\varepsilon_3} - \alpha \bar{\sigma}(L_1) - \right. \\ & \left. \frac{\alpha \bar{\sigma}(L_2) V_m^2}{2\varepsilon_4}\right] \|q_y\|^2 - \left[\lambda_{\min}(K) - \frac{\alpha \varepsilon_1}{2} - \frac{\alpha \varepsilon_3}{2} - \right. \\ & \left. \frac{1}{2\varepsilon_5}\right] \|z\|^2 - \frac{\nu}{2} \sum_{i \in \nu_F} \text{tr}(\tilde{W}_i^T \tilde{W}_i) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i \in \nu_F} \text{tr}(W_i^T W_i) + \frac{\alpha(n-m)\varepsilon_2}{2} + \\ & \frac{\alpha(n-m)\varepsilon_4}{2} + \frac{\varepsilon_5}{2} \delta^2. \end{aligned} \quad (26)$$

分别选取满足如下条件的参数 $\beta, \lambda_{\min}(K), \lambda_{\max}^{-1}(\Omega)$ 和 ξ :

$$\begin{aligned} \beta &= \min \left\{ 2\alpha \sigma(L_1) - \frac{\alpha \bar{\sigma}^2(L_1)}{\varepsilon_1} - \frac{\alpha \bar{\sigma}(L_2) V_m^2}{\varepsilon_2}, \right. \\ & 2\lambda_{\max}^{-1}(\Omega) - \frac{\alpha \bar{\sigma}^2(L_1)}{\varepsilon_3} - 2\alpha \bar{\sigma}(L_1) - \frac{\alpha \bar{\sigma}(L_2) V_m^2}{\varepsilon_4}, \\ & \left. \frac{1}{M_m} \left[2\lambda_{\min}(K) - \alpha \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_3 - \frac{1}{\varepsilon_5} \right], \nu \gamma \right\}; \\ \lambda_{\max}^{-1}(\Omega) &> \frac{\alpha \bar{\sigma}(L_1)}{2\varepsilon_3} + \alpha \bar{\sigma}(L_1) - \frac{\alpha \bar{\sigma}(L_1) V_m^2}{2\varepsilon_4}; \\ \lambda_{\min}(K) &> \frac{\alpha \varepsilon_1 + \alpha \varepsilon_3}{2} + \frac{1}{2\varepsilon_5}; \\ \xi &= \frac{\alpha n \varepsilon_2}{2} + \frac{\alpha n \varepsilon_4}{2} + \frac{\nu}{2} \sum_{i \in \nu_F} \text{tr}(W_i^T W_i) + \frac{\varepsilon_5}{2} \delta^2, \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_5$ 均为正常数. 式(26)可以简写为

$$\dot{V} \leq -\beta V + \xi. \quad (27)$$

由文献[25]中对标准 Lyapunov 函数形式的拓展结论可以得出 V 一致最终有界. 结合式(18)和(27)可以获得辅助变量 \dot{q}_r 和 Lyapunov 函数 V 之间的不等式关系, 即

$$\|\dot{q}_r\| \leq \sqrt{2V(t)} \leq \sqrt{2V(0)e^{-\beta t} + \frac{2\xi}{\beta}(1 - e^{-\beta t})} = \zeta. \quad (28)$$

由式(28)可得辅助变量 \dot{q}_r 一致最终有界. 由于式(5)可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{q}_r = & -\alpha(L_1 \otimes I_p) q_F - \alpha(L_2 \otimes I_p) q_L = \\ & -\alpha(L_1 \otimes I_p)[q_F + (L_1^{-1} L_2 \otimes I_p) q_L], \end{aligned} \quad (29)$$

可以得到如下结果:

$$\|q_F + (L_1^{-1} L_2 \otimes I_p) q_L\| \leq \frac{\|\dot{q}_r\|}{\alpha \sigma(L_1)} \leq \frac{\zeta}{\alpha \sigma(L_1)}. \quad (30)$$

由此可知, 含模型非线性不确定性和外部扰动的多 EL 系统(1)在分布式自适应包含控制律(16)和(17)的作用下, 系统的包含误差一致最终有界. \square

注 2 文献[23]针对多 EL 系统的包含控制问题, 考虑了模型参数不确定性以及所有领航者为静态的情况. 受文献[23]启发, 在其基础上, 从式(10)~(13)可以看出, 本文考虑的是多 EL 系统模型存在非

线性不确定性和外部扰动的情况,从假设2和式(26)可以看出,本文考虑的是所有领航者均为动态的情况.因此,本文提出的分布式包含控制算法相对于文献[23]进行了进一步的拓展研究.

3 仿真验证

为了验证本文提出的分布式自适应包含控制律的有效性,进行如下仿真验证.

考虑一个由多个二连杆机构组成的多智能体系统,包含8个跟随者和5个领航者,分别用集合 $v_F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 和 $v_L = \{9, 10, 11, 12, 13\}$ 表示跟随者集合和领航者集合.智能体间的通讯拓扑关系如图1所示.

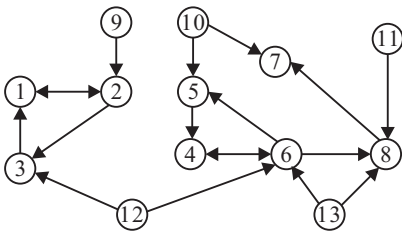


图1 8个跟随者和5个领航者的通讯拓扑

跟随者的动力学模型可由式(1)描述, $M_i(q_i)$ 、 $C_i(q_i, \dot{q}_i)$ 、 $g_i(q_i)$ 和 ω_i 的表达式如下:

$$M_i(q_i) = \begin{bmatrix} \theta_{i1} + \theta_{i2} + 2\theta_{i3} \cos q_{i2} & \theta_{i2} + \theta_{i3} \cos q_{i2} \\ \theta_{i2} + \theta_{i3} \cos q_{i2} & \theta_{i2} \end{bmatrix},$$

$$C_i(q_i, \dot{q}_i) = \begin{bmatrix} -\theta_{i3} \dot{q}_{i2} \sin q_{i2} & -\theta_{i3} (\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2}) \sin q_{i2} \\ \theta_{i3} \dot{q}_{i1} \sin q_{i2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$g_i(q_i) = \begin{bmatrix} \theta_{i4} g \cos q_{i1} + \theta_{i5} g \cos(q_{i1} + q_{i2}) \\ \theta_{i5} g \cos(q_{i1} + q_{i2}) \end{bmatrix},$$

$$\omega_i = 5\%[M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i)].$$

其中

$$\theta_{i1} = J_{i1} + m_{i2}l_{i1}^2, \theta_{i2} = 0.25m_{i2}l_{i2}^2 + J_{i2},$$

$$\theta_{i3} = 0.5m_{i2}l_{i1}l_{i2}, \theta_{i4} = (0.5m_{i1} + m_{i2})l_{i1},$$

$$\theta_{i5} = 0.5m_{i2}l_{i2}.$$

在 $\theta_{i1} \sim \theta_{i5}$ 中: m_{i1} 、 m_{i2} 为机械臂 i 的各杆质量, J_{i1} 、 J_{i2} 为机械臂 i 各杆转动惯量, l_{i1} 、 l_{i2} 为机械臂 i 各个连杆到质心的长度.其中各项动力学参数的数值选取如下:

$$m_{11} = 1.02 \text{ kg}, m_{12} = 1.12 \text{ kg},$$

$$m_{21} = 0.96 \text{ kg}, m_{22} = 1.10 \text{ kg},$$

$$m_{31} = 1.01 \text{ kg}, m_{32} = 1.07 \text{ kg},$$

$$m_{41} = 1.04 \text{ kg}, m_{42} = 1.09 \text{ kg},$$

$$m_{51} = 1.03 \text{ kg}, m_{52} = 1.10 \text{ kg},$$

$$m_{61} = 1.06 \text{ kg}, m_{62} = 1.18 \text{ kg},$$

$$m_{71} = 1.04 \text{ kg}, m_{72} = 1.16 \text{ kg},$$

$$m_{81} = 1.05 \text{ kg}, m_{82} = 1.12 \text{ kg};$$

$$J_{11} = 0.21 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_{12} = 0.42 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$J_{21} = 0.23 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_{22} = 0.39 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$J_{31} = 0.19 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_{32} = 0.40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$J_{41} = 0.21 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_{42} = 0.41 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$J_{51} = 0.24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_{52} = 0.41 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$J_{61} = 0.23 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_{62} = 0.38 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$J_{71} = 0.21 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_{72} = 0.41 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$J_{81} = 0.20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_{82} = 0.39 \text{ kg} \cdot \text{m}^2;$$

$$l_{i1} = l_{i2} = L, i = 1, 2, \dots, 8, L = 1 \text{ m}.$$

跟随者的初始位置和初始速度分别选为

$$q_{11}(0) = 4\pi/15, q_{12}(0) = 2\pi/13,$$

$$q_{21}(0) = 4\pi/15, q_{22}(0) = 5\pi/16,$$

$$q_{31}(0) = 8\pi/17, q_{32}(0) = 4\pi/11,$$

$$q_{41}(0) = 7\pi/18, q_{42}(0) = 4\pi/13,$$

$$q_{51}(0) = 8\pi/19, q_{52}(0) = 5\pi/14,$$

$$q_{61}(0) = \pi/13, q_{62}(0) = 4\pi/19,$$

$$q_{71}(0) = 3\pi/25, q_{72}(0) = 6\pi/35,$$

$$q_{81}(0) = 7\pi/29, q_{82}(0) = 2\pi/19;$$

$$\dot{q}_{11}(0) = \dot{q}_{12}(0) = 0.2,$$

$$\dot{q}_{21}(0) = \dot{q}_{22}(0) = 0.1,$$

$$\dot{q}_{31}(0) = 0.2, \dot{q}_{32}(0) = 0.1,$$

$$\dot{q}_{41}(0) = 0.3, \dot{q}_{42}(0) = 0.1,$$

$$\dot{q}_{51}(0) = 0.2, \dot{q}_{52}(0) = 0.3,$$

$$\dot{q}_{61}(0) = 0.2, \dot{q}_{62}(0) = 0.1,$$

$$\dot{q}_{71}(0) = 0.1, \dot{q}_{72}(0) = 0.3,$$

$$\dot{q}_{81}(0) = 0.1, \dot{q}_{82}(0) = 0.2.$$

各领航者运动轨迹分别选为

$$q_{91} = \frac{\pi}{20} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \frac{\pi}{6},$$

$$q_{92} = \frac{\pi}{15} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \frac{\pi}{5},$$

$$q_{101} = \frac{\pi}{20} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \frac{\pi}{5},$$

$$q_{102} = \frac{\pi}{15} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \frac{\pi}{4},$$

$$q_{111} = \frac{\pi}{20} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \frac{\pi}{3},$$

$$q_{112} = \frac{\pi}{15} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \frac{\pi}{4},$$

$$q_{121} = \frac{\pi}{20} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \frac{2\pi}{5},$$

$$q_{122} = \frac{\pi}{20} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \frac{\pi}{6},$$

$$q_{131} = \frac{\pi}{20} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \frac{\pi}{3},$$

$$q_{132} = \frac{\pi}{15} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \frac{\pi}{21}.$$

低通滤波器初始值取为 $\dot{q}_{wi}(0) = [0, 0]^T$; 对于系统模型不确定性 f_i 的处理和神经网络自适应估计器设计方面完全按照式(9)~(13)的步骤展开. 其中: 神经网络权值矩阵估计的初始值为 $\hat{W}_i = 0_{6 \times 2}$; 神经网络激活函数, 即高斯函数中宽度和中心值选为 $\sigma_{ij} = 2, c_{ij} = [-5, 5]^4 \times [-0.5, 0.5]^4, i \in v_F, j = 1, 2, \dots, 6$; 控制器参数为 $\alpha = 30, \Omega_i = 0.001 I_2 (i \in v_F), K_i = 36 I_2$. 在不同时刻跟随者与领航者的位置关系如图2~图5所示.

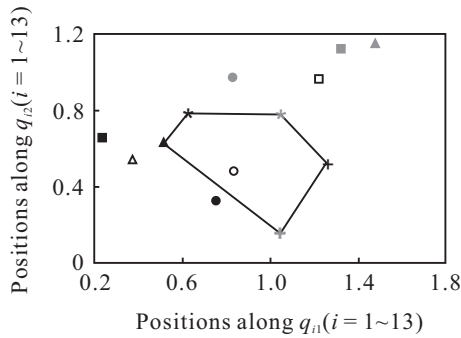


图2 $t = 0\text{s}$ 时跟随者与领航者的位置关系

在图2~图5中: 黑色空心圆为 q_1 , 灰色实心圆为 q_2 , 黑色实心圆为 q_3 , 黑色空心正方形为 q_4 , 灰色实心正方形为 q_5 , 黑色实心正方形为 q_6 , 黑色空心三角形为 q_7 , 灰色实心三角形为 q_8 , 黑色实心三角形为 q_9 , 黑色星形为 q_{10} , 灰色星形为 q_{11} , 黑色十字为 q_{12} , 灰色十字为 q_{13} .

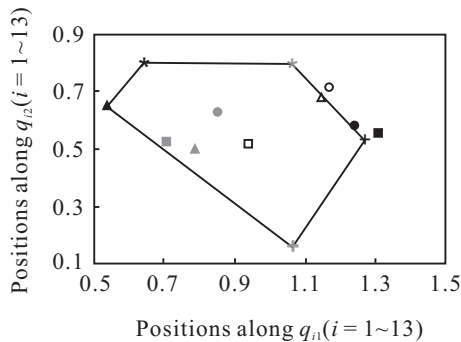


图3 $t = 0.2\text{s}$ 时跟随者与领航者的位置关系

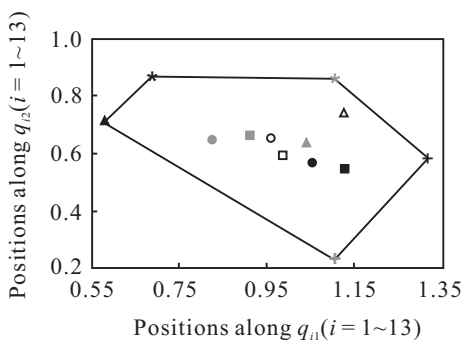


图4 $t = 0.5\text{s}$ 时跟随者与领航者的位置关系

由图2可以看出, 在初始时刻各跟随者大多分散于领航者形成的动态凸包外.

图3和图4显示了跟随者收敛进领航者形成的凸包的过渡过程, 在大约0.5s以后, 所有的跟随者可以收敛到领航者形成的凸包内.

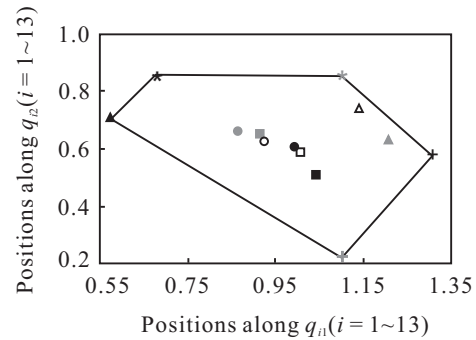


图5 $t = 1.5\text{s}$ 时跟随者与领航者的位置关系

由图5可以看出, 所有跟随者可以保持在领航者形成的动态凸包内, 因此实现了包含控制的目标.

仿真结果验证了本文提出的分布式包含控制律的有效性.

4 结 论

本文考虑系统模型存在非线性不确定性和外部扰动, 以及相对速度信息不可测的情况, 研究了有向通讯拓扑下的多EL系统的分布式包含控制问题. 首先, 引入由相对速度误差构成的辅助变量并设计低通滤波器, 用滤波估计值代替辅助变量进行控制律设计; 然后, 应用神经网络方法逼近系统的非线性不确定性, 并设计了相应的分布式自适应包含控制律; 最后, 基于Lyapunov方法证明了在所提出的控制律的作用下, 辅助变量估计误差和包含控制误差均一致最终有界. 仿真结果验证了本文控制律的有效性.

参考文献(References)

- [1] Fax J, Murray R. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1465-1476.
- [2] Smith R S, Hadaegh F Y. Distributed estimation, communication and control for deep space formations[J]. IET Control Theory & Applications, 2007, 1(2): 445-451.
- [3] Min H B, Wang S C, Sun F C, et al. Decentralized adaptive attitude synchronization of spacecraft formation[J]. Systems and Control Letters, 2012, 61(1): 238-246.
- [4] 刘付成, 梅杰, 马广富. 带未知干扰的模块化航天器系统相对轨道的队形控制[J]. 控制与决策, 2014, 29(6): 985-990.

(Liu F C, Mei J, Ma G F. Formation control for relative translation of modular spacecraft with unknown

- disturbances[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(6): 985-990.)
- [5] Olfati S R, Shamma J S. Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion[C]. *Proc of the 44th IEEE Conf on Decision and Control, and the European Conf. Spain: IEEE Press, 2005: 6698-6703.*
- [6] Yu W, Chen G R, Dong Z, et al. Distributed consensus filtering in sensor networks[J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2009, 39(6): 1568-1577.
- [7] Hong Y, Chen G R, Bushnell L. Distributed observers design for leader following control of multi-agent networks[J]. *Automatica*, 2008, 44(3): 846-850.
- [8] Zheng Y, Zhu Y, Wang L. Consensus of heterogeneous multi-agent systems[J]. *IET Control Theory & Application*, 2011, 5(16): 1881-1888.
- [9] Zheng Y, Wang L. Consensus of heterogeneous multi-agent systems without velocity measurements[J]. *Int J of Control*, 2012, 85(7): 200-206.
- [10] Yu W, Chen G R, Cao M, et al. Second-order consensus for multiagent systems with directed topologies and nonlinear dynamics[J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2010, 40(3): 881-891.
- [11] 马广富, 梅杰. 有向网络下非线性多智能体系统的协调跟踪[J]. *控制与决策*, 2011, 26(12): 1861-1864.
(Ma G F, Mei J. Coordinated tracking for nonlinear multi-agent systems under directed networks[J]. *Control and Decision*, 2011, 26(12): 1861-1864.)
- [12] Dimarogonas D V, Tsiotras P, Kyriakopoulos K J. Leader-follower cooperative attitude control of multiple rigid bodies[J]. *Systems and Control Letters*, 2009, 58(6): 429-435.
- [13] Meng Z, Ren W, You Z. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies[J]. *Automatica*, 2010, 46(12): 2092-2099.
- [14] Dimarogonas D V, Tsiotras P, Kyriakopoulos K J. Leader-follower cooperative attitude control of multiple rigid bodies[J]. *Systems and Control Letters*, 2009, 58(6): 429-435.
- [15] Mei J, Ren W, Ma G. Distributed containment control for Lagrangian networks with parametric uncertainties under a directed graph[J]. *Automatica*, 2012, 48(4): 653-659.
- [16] Meng Z, Ren W, You Z. Distributed finite-time containment control for multiple Lagrangian systems[C]. *American Control Conf. Baltimore: IEEE Press, 2010: 2885-2890.*
- [17] Cao Y, Ren W, Meng Z. Decentralized finite-time sliding mode estimators and their applications in decentralized finite-time formation tracking[J]. *Systems and Control Letters*, 2010, 59(9): 522-529.
- [18] Ge S S, Wang C. Adaptive NN control of uncertain nonlinear pure-feedback systems[J]. *Automatica*, 2002, 38(4): 671-682.
- [19] Das A, Lewis F L. Distributed adaptive control for synchronization of unknown nonlinear networked systems[J]. *Automatica*, 2010, 46(12): 2014-2021.
- [20] Zhang H, Lewis F L. Adaptive cooperative tracking control for high-order nonlinear systems with unknown nonlinearities[J]. *Automatica*, 2012, 48(7): 1432-1439.
- [21] Chen G, Lewis F L. Distributed adaptive tracking control for synchronization of unknown networked Lagrangian systems[J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2011, 41(3): 805-816.
- [22] Ren W. Distributed leaderless consensus algorithms for networked Euler-Lagrange systems[J]. *Int J of Control*, 2009, 82(11): 2137-2149.
- [23] Mei J, Ren W, Chen J, et al. Distributed adaptive coordination for multiple Lagrangian systems under a directed graph without using neighbors' velocity information[J]. *Automatica*, 2013, 49(6): 1723-1731.
- [24] Chen G, Yue Y. Coordinated motion control of networked mechanical systems[C]. *The 24th Chinese Control and Decision Conf. Taiyuan: IEEE Press, 2012: 2478-2483.*
- [25] Lewis F L, Abdallah C T, Dawson D M. *Control of robot manipulators*[M]. New York: Macmillan, 1993.

(责任编辑: 闫 妍)