

文章编号: 1001-0920(2016)05-0783-07

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.0223

# 一类未知 MIMO 非线性离散系统的 改进自适应准滑模解耦控制

何大阔, 高飞雪, 杨 乐, 武 玮

(东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004)

**摘 要:** 针对一类带有外部扰动的未知 MIMO 非线性离散系统, 提出一种新型自适应准滑模控制算法. 该算法基于非参数动态线性化技术, 运用高阶滑模控制的思想实现带有扰动系统的二阶准滑模控制. 同时, 利用扰动解耦技术, 在控制器的设计中引入离散扩张状态观测器 (DESO) 对系统各回路间的耦合以及数据模型的未建模动态进行补偿, 以进一步实现多变量系统的解耦, 提升控制品质. 理论分析和仿真结果说明了所提出方法的有效性和可行性.

**关键词:** 未知非线性离散系统; 二阶准滑模控制; 扰动; 离散扩张状态观测器; 解耦

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## Improved adaptive quasi-sliding mode decoupling control for a class of unknown MIMO nonlinear discrete-time systems

HE Da-kuo, GAO Fei-xue, YANG Le, WU Wei

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: HE Da-kuo, E-mail: hedakuo@mail.neu.edu.cn)

**Abstract:** A novel adaptive quasi-sliding mode control approach is proposed for a class of unknown MIMO nonlinear discrete-time systems with external disturbance. The nonparametric dynamic linearization technique is utilized in the controller design. By applying the high order sliding mode control strategy, the second order quasi-sliding mode control for this disturbance system is realized. Furthermore, according to the disturbance decoupling technique, a discrete extended state observer (DESO) is introduced into the controller design to compensate the couplings and unmodelled dynamics of the established data model, and then to realize the decoupling control and improve the control performance. Finally, theoretical analysis and simulation results show the feasibility and effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** unknown nonlinear discrete-time system; second order quasi-sliding mode control; disturbance; discrete extended state observer; decoupling

## 0 引 言

滑模变结构控制方法产生于 20 世纪 60 年代, 且由于对系统不确定性以及扰动等具有不变性而得到了广泛的发展<sup>[1-6]</sup>. 然而这种优越的不变性只有在理想的连续滑模控制系统中才能得以实现, 加之计算机技术已得到飞速发展和广泛使用, 因此研究离散滑模控制技术具有十分重要的理论意义和实践意义. 与连续滑模控制方法相比, 离散滑模控制系统采样频率的限制只能产生准滑动模态. 已有的滑模控制方法大多是在已知被控对象的数学模型的情况下设计的, 且所建模型的精度在很大程度上决定了控制律的抖振情

况<sup>[7]</sup>. 然而, 实际工业过程大多具有复杂的非线性等特性, 使得系统的数学模型很难获取<sup>[8]</sup>, 从而限制了离散滑模控制方法在实际系统中的应用.

近年来, 为了将传统滑模控制技术扩展到模型未知的非线性离散系统, 基于非参数动态线性化的滑模控制方法取得了一定的研究成果. 文献 [9] 针对一类非线性离散系统, 运用非参数动态线性化技术, 提出了一种基于数据驱动的准滑模控制方法; 文献 [10] 进一步运用 RBF 神经网络补偿被控系统的扰动和不确定性, 以提升其控制品质; 文献 [11] 进一步将该方法由 SISO 系统推广到了 MIMO 系统. 然而上述这些方

收稿日期: 2015-02-15; 修回日期: 2015-07-27.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(61374147, 61004083).

作者简介: 何大阔(1975—), 男, 教授, 从事复杂工业过程建模、控制与优化等研究; 高飞雪(1988—), 女, 硕士生, 从事复杂工业过程建模、控制与优化的研究.

法仍然面临着控制系统抖振的问题,并且文献[11]并没有考虑系统带有扰动的情形.同时,神经网络的应用仍然存在着参数多,随机选取,容易不稳定的问题.

为了进一步减小滑模控制系统的抖振问题,文献[12]提出了高阶滑模控制方法.该方法运用高阶微分的思维,使得滑平面函数及其高阶导数均为零,进而使得滑模控制律中的不连续项经过积分后变得更加平滑,同时不连续项的幅值得以进一步地减小.因此,该方法进一步减小了滑模控制系统的抖振现象,同时保持了其固有的优良控制品质.可见,如何将高阶滑模的思维引入到自适应准滑模控制方法中,以进一步提升其控制性能,将具有十分重要的意义.

与此同时,系统间的耦合也影响着控制性能的进一步提高,解决方法之一便是运用扰动解耦技术<sup>[11,13-15]</sup>.离散扩张状态观测器(DES0)作为一种特殊的扰动解耦技术,由于采用扩张状态的策略对系统的未知动态进行估计,避免了对系统精确数学模型的依赖,受到了广泛的关注和研究.文献[16-17]从ESO离散化的角度对DES0的设计方法和稳定性进行了分析;文献[18-19]将DES0直接应用于各种复杂系统,对系统的未建模动态和未知扰动等进行在线观测,以实现复杂系统的抗扰动控制.可见,利用DES0实现模型未知MIMO被控系统的解耦控制是可行的.

针对一类模型未知并带有外部扰动的MIMO非线性离散系统,为了进一步提升自适应准滑模控制方法的控制性能,本文引入高阶滑模控制的思维,提出新型自适应二阶准滑模控制方法(简称SQSMDC).该方法的创新性在于:1)提出了基于高阶滑模控制策略的准滑模控制算法,使得系统的抖振得以进一步减缓;2)结合DES0,给出了更简洁、高效的解耦控制器,同时避免了文献[10-11]中神经网络参数多,随机选取,容易不稳定的问题.最后,通过理论分析和仿真说明了所提出方法的有效性.

## 1 问题描述

考虑如下的非仿射非线性离散MIMO系统:

$$\begin{aligned} y(k+1) = & \\ & f(y(k), y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k), \\ & u(k-1), \dots, u(k-n_u)) + d(k). \end{aligned} \quad (1)$$

其中:系统的输入和输出分别为 $u(k) = [u_1(k), u_2(k), \dots, u_n(k)]^T \in R^n$ 和 $y(k) = [y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k)]^T \in R^n$ ;映射 $f(\cdot) = [f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots, f_n(\cdot)]^T \in R^n$ 表示一类广义未知非线性函数; $n_u$ 和 $n_y$ 分别表示系统的未知阶次; $d(k) = [d_1(k), d_2(k), \dots, d_n(k)]^T \in R^n$ 表示系统的广义扰动,包括系统的不可测扰动以及其他可分离性的不确定性,同时假设 $d(k)$ 是有界的,即

$\|d(k)\| \leq d_0, d_0 > 0$ 是一个正常数.

对于上述的系统(1),作如下假设.

**假设1** 系统(1)的输入输出可观可控,即对某一有界的期望给定信号 $y_r(k+1) = [y_{r1}(k+1), y_{r2}(k+1), \dots, y_{rn}(k+1)]^T \in R^n$ ,在广义扰动 $d(k)$ 存在的情况下,存在某一有界的控制输入信号 $u(k)$ ,使得在控制输入信号 $u(k)$ 的驱动下,系统的输出等于期望给定信号.

**假设2** 函数 $f(\cdot)$ 对控制系统当前输入 $u(k)$ 的偏导数是连续的.

**假设3** 系统(1)对 $\Delta u(k)$ 是广义Lipschitz的,即对于任意的 $k, \Delta u(k) \neq 0$ 时,系统(3)满足

$$|\Delta y(k+1)| \leq L|\Delta u(k)|. \quad (2)$$

其中: $\Delta y(k+1) = y(k+1) - y(k)$ ,  $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ .

**假设4** 系统(1)具有一个全局渐近稳定的零动态.

**注1** 本文针对系统(1)所作的4点假设,从实际观点上看是合理并可以接受的,读者可以参阅文献[9,20]作进一步的了解.

**引理1**<sup>[20]</sup> 对于系统(1),若满足上述4个假设,则 $|\Delta u(k)| \neq 0$ 时,一定存在伪偏导数 $\Phi(k)$ ,使得

$$\Delta y(k+1) = \Phi(k)\Delta u(k), \quad (3)$$

并且 $\|\Phi(k)\| \leq L$ .其中

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(k) & \phi_{12}(k) & \cdots & \phi_{1n}(k) \\ \phi_{21}(k) & \phi_{22}(k) & \cdots & \phi_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1}(k) & \phi_{n2}(k) & \cdots & \phi_{nn}(k) \end{bmatrix},$$

$L$ 是相应的正常数, $\Delta y(k+1)$ 和 $\Delta u(k)$ 的定义同上.

**证明** 由非线性离散系统(1),得

$$\begin{aligned} \Delta y(k+1) = & \\ & f(y(k), \dots, y(k-n_y), u(k), \dots, u(k-n_u)) - \\ & f(y(k-1), \dots, y(k-n_y-1), u(k-1), \dots, \\ & u(k-n_u-1)) + \Delta d(k) = \\ & f(y(k), \dots, y(k-n_y), u(k), \dots, u(k-n_u)) - \\ & f(y(k), \dots, y(k-n_y), u(k-1), u(k-1), \dots, \\ & u(k-n_u)) + f(y(k), \dots, y(k-n_y), u(k-1), \\ & u(k-1), \dots, u(k-n_u)) - f(y(k-1), \dots, \\ & y(k-n_y-1), u(k-1), \dots, u(k-n_u-1)) + \Delta d(k). \end{aligned} \quad (4)$$

根据假设2、假设3和微分中值定理,由式(4)得

$$\Delta y(k+1) = \frac{\partial f^*}{\partial u(k)}(u(k) - u(k-1)) + \xi(k). \quad (5)$$

其中

$$\frac{\partial f^*}{\partial u(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^*}{\partial u_1(k)} & \frac{\partial f_1^*}{\partial u_2(k)} & \cdots & \frac{\partial f_1^*}{\partial u_n(k)} \\ \frac{\partial f_2^*}{\partial u_1(k)} & \frac{\partial f_2^*}{\partial u_2(k)} & \cdots & \frac{\partial f_2^*}{\partial u_n(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n^*}{\partial u_1(k)} & \frac{\partial f_n^*}{\partial u_2(k)} & \cdots & \frac{\partial f_n^*}{\partial u_n(k)} \end{bmatrix},$$

$\frac{\partial f_i^*}{\partial u_j(k)}$  表示  $f_i(\cdot)$  关于  $u_j(k)$  的偏导数在  $[u_j(k-1), u_j(k)]$  中某一点的值,

$$\begin{aligned} \xi(k) = & f(y(k), \dots, y(k-n_y), u(k-1), \\ & u(k-1), \dots, u(k-n_u)) - \\ & f((k-1), \dots, y(k-n_y-1), \\ & u(k-1), \dots, u(k-n_u-1)) + \Delta d(k). \end{aligned} \quad (6)$$

因为  $\|\Delta u(k)\| \neq 0$ , 所以一定存在  $\eta(k)$ , 使得下述等式成立:

$$\xi(k) = \eta(k)\Delta u(k). \quad (7)$$

因此, 方程(1)可以写为

$$\Delta y(k+1) = \Phi(k)\Delta u(k), \quad (8)$$

其中

$$\Phi(k) = \frac{\partial f^*}{\partial u(k)} + \eta(k). \quad (9)$$

引理1成立.  $\square$

根据引理1, 可以将系统(1)等效成如下形式:

$$y_i(k+1) = \phi_{ii}(k)\Delta u_i(k) + y_i(k) + \Delta d'_{NLi}(k). \quad (10)$$

其中  $\Delta d'_{NLi}(k) = \sum_{j=1}^n \phi_{ij}(k)\Delta u_j(k) - \phi_{ii}(k)\Delta u_i(k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 即系统间的耦合作用也被视作扰动.

**注2** 由引理1可知, 非参数动态线性化技术同样适用于带有广义扰动的非线性MIMO离散系统, 并从理论上说明了文献[9, 20]中采用带有扰动的系统作为仿真模型的可行性.

## 2 滑模控制器设计

考虑系统(1), 定义平面函数

$$S(k+1) = C^T E(k+1). \quad (11)$$

其中:  $C^T = [I, c_0]$ ,  $I \in R^{n \times n}$  为单位矩阵,  $c_0 = \text{diag}\{c_{01}, c_{02}, \dots, c_{0n}\}$ ,  $c_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为大于0的常数;  $E^T(k) = [e(k), e(k-1)]$ ,  $e(k) = y(k) - y_r(k)$  为跟踪误差.

根据文献[3], 结合滑平面函数(11)即可得离散准滑模控制律

$$\frac{S(k+1) - S(k)}{T} + qS(k) = -\varepsilon \text{sgn}(S(k)). \quad (12)$$

**注3** 显然, 根据式(10)和(12)即可求出准滑模控制律. 然而, 由于不连续项  $-\varepsilon \text{sgn}(S(k))$  的引入, 使得准滑模控制律具有较大的抖振. 文献[12]结合高阶

滑模控制策略, 给出了连续二阶滑平面函数

$$\sigma(t) = \dot{S}(t) + \alpha S(t), \quad (13)$$

对其进行离散化可得

$$\sigma(k) = \frac{S(k+1) - S(k)}{T} + \alpha S(k). \quad (14)$$

因此, 本文引入高阶滑模控制的策略, 并结合式(12)和(14), 给出如下二阶离散滑平面函数

$$\bar{S}(k) = \alpha(S(k) - S(k-1)) + \beta S(k-1). \quad (15)$$

其中:  $\alpha = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ,  $\beta = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ ,  $0 < \beta_i < \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**注4** 根据滑模控制方法的基本原理, 二阶滑平面(15)旨在驱使一阶滑平面  $S(k)$  及其变化率趋向于零. 可见, 滑平面(15)的提出是结合了二阶滑平面(13)的设计思维和离散准滑模控制律(12)的特点, 并且避免了不连续项  $-\varepsilon \text{sgn}(S(k))$  的直接引入, 同时, 一阶滑平面(11)的收敛速度可由  $\beta_i$  与  $\alpha_i$  的比值  $\beta_i/\alpha_i$  设定.

类似连续高阶滑模控制律的情况, 滑平面(15)的等效控制律可由下式获得:

$$\bar{S}(k+1) = \bar{S}(k) = 0. \quad (16)$$

根据式(11), 可以得出

$$C^T E(k+1) = e(k+1) + c_0 e(k) = S(k+1), \quad (17)$$

结合式(15)和(16)可得

$$y(k+1) - y_r(k+1) = (1 - \alpha^{-1}\beta)S(k) - c_0 e(k), \quad (18)$$

进而, 由式(10)可得

$$\begin{aligned} \Xi(k)\Delta u_{\text{eq}}(k) = & y_r(k+1) - y(k) - c_0 e(k) + \\ & (I - \alpha^{-1}\beta)S(k) - \Delta d'_{NL}(k). \end{aligned} \quad (19)$$

其中:  $\Xi(k) = \text{diag}\{\phi_{11}(k), \phi_{22}(k), \dots, \phi_{nn}(k)\}$ ,  $\Delta d'_{NL}(k) = [\Delta d'_{NL1}(k), \Delta d'_{NL2}(k), \dots, \Delta d'_{NLn}(k)]^T$ . 因此

$$\begin{aligned} \Delta u_{\text{eq}}(k) = & (\Xi(k) + \delta)^{-1} [y_r(k+1) - y(k) - \\ & c_0 e(k) + (I - \alpha^{-1}\beta)S(k) - \Delta d'_{NL}(k)], \end{aligned} \quad (20)$$

其中  $\delta = \text{diag}\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ ,  $\delta_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**注5** 考虑到  $\phi(k)$  是时变的, 因此为了保证控制输入能够在合理的区间内变化, 本文在式(20)中引入了正数  $\delta_i$ .

结合文献[21-22], 为了增加控制系统的鲁棒性, 减缓被控系统的抖振现象, 附加不连续控制项

$$\begin{aligned} \Delta u_{\text{dis}}(k) = & (\Xi(k) + \delta)^{-1} [(\Xi(k-1) + \delta) \\ & \Delta u_{\text{dis}}(k-1) - \varepsilon \text{sign}(\bar{S}(k))]. \end{aligned} \quad (21)$$

因此, 最后的控制输入为

$$\Delta u(k) = \Delta u_{\text{eq}}(k) + \Delta u_{\text{dis}}(k). \quad (22)$$

**注 6** 对于式 (12), 令  $\frac{1}{T} = \alpha, q = \beta$ , 则相应的自适应准滑模控制律为

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = & (\Xi(k) + \delta)^{-1} [y_r(k+1) - \Delta d'_{NL}(k) + \\ & (I - \alpha^{-1}\beta)S(k) - y(k) - c_0 e(k) - \varepsilon \text{sgn}(S(k))], \quad (23) \end{aligned}$$

其中  $\delta = \text{diag}\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ ,  $\delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ . 对比式 (20)~(23) 可知, 本文所提出的二阶自适应准滑模控制律与文献 [15] 中的自适应准滑模控制律具有相似的结构. 同时, 由于高阶滑模控制思维的引入, 使得控制律中不连续项以差分的形式给出, 进一步减缓了系统的抖振现象.

### 3 基于数据驱动自适应律的解耦控制器

由上文可知, 控制律 (20) 和 (21) 中含有未知项  $\Xi(k)$  和  $\Delta d'_{NL}(k)$ , 因此本小结采用 DESO 对其进行估计, 进而实现多变量系统的解耦.

由引理 1 和文献 [20], 本文可以相应给出如下伪偏导数矩阵的递推求解公式:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}^T(k) = & \hat{\Phi}^T(k-1) + \frac{\eta \Delta u(k-1)}{\mu + \|\Delta u(k-1)\|^2} [\Delta y^T(k) - \\ & \Delta u^T(k-1) \hat{\Phi}^T(k-1)], \quad (24) \end{aligned}$$

其中

$$\hat{\Phi}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{11}(k) & \hat{\phi}_{12}(k) & \cdots & \hat{\phi}_{1n}(k) \\ \hat{\phi}_{21}(k) & \hat{\phi}_{22}(k) & \cdots & \hat{\phi}_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\phi}_{n1}(k) & \hat{\phi}_{n2}(k) & \cdots & \hat{\phi}_{nn}(k) \end{bmatrix}.$$

因此,  $\Xi(k)$  的估计值  $\hat{\Xi}(k)$  可以定义为

$$\hat{\Xi}(k) = \text{diag}\{\hat{\phi}_{11}(k), \hat{\phi}_{22}(k), \dots, \hat{\phi}_{nn}(k)\}. \quad (25)$$

定义伪偏导数的参数估计误差  $\tilde{\Xi}(k) = \hat{\Xi}(k) - \Xi(k)$ , 结合上文的分析, 对于被控系统 (10), 可以进行如下转换:

$$y(k+1) = y(k) + (\hat{\Xi}(k) + \delta) \Delta u(k) + \Delta d_{NL}(k), \quad (26)$$

其中  $\Delta d_{NL}(k) = \Delta d'_{NL}(k) - (\tilde{\Xi}(k) + \delta) \Delta u(k)$ , 即包括了系统的未建模动态.

针对系统 (26) 中的未知项  $\Delta d_{NL}(k)$ , 结合控制律 (22), 可以设计如下的线性离散扩张状态观测器:

$$\begin{cases} z(k+1) = z(k) + (\hat{\Xi}(k) + \delta) \Delta u(k) + \xi(k) + \\ \quad L_1(y(k) - z(k)), \\ \xi(k+1) = \xi(k) + L_2(y(k) - z(k)). \end{cases} \quad (27)$$

其中:  $L_1 = \text{diag}\{L_{11}, L_{12}, \dots, L_{1n}\}$ ,  $L_2 = \text{diag}\{L_{21}, L_{22}, \dots, L_{2n}\}$ ,  $L_{ij} > 0, i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, n$ .

**注 7** 借助于式 (27), 显然可以实现对未知项

$\Delta d_{NL}(k)$  进行在线预估. 然而, 考虑到在  $k$  时刻系统的状态  $z(k)$  是已知的, 可见采用式 (27) 所示的观测器对其进行预估时存在较大的误差. 因此本文将式 (27) 进行如下的转换:

$$\begin{cases} z(k+1) = y(k) + (\hat{\Xi}(k) + \delta) \Delta u(k) + \xi(k), \\ \xi(k+1) = \xi(k) + L(y(k) - z(k)). \end{cases} \quad (28)$$

其中:  $L = \text{diag}\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ ,  $L_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ .

由以上的分析可以得到如下的引理.

**引理 2** 考虑非线性离散系统 (1), 并且假设 1~假设 3 成立, 则控制律 (22) 中的未知参数  $\Xi(k)$  和  $\Delta d'_{NL}(k)$  可以采用如下的公式进行计算:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}^T(k) = & \hat{\Phi}^T(k-1) + \frac{\eta \Delta u(k-1)}{\mu + \|\Delta u(k-1)\|^2} [\Delta y^T(k) - \\ & \Delta u^T(k-1) \hat{\Phi}^T(k-1)], \quad (29) \end{aligned}$$

$$\xi(k+1) = \xi(k) + L(y(k) - z(k)). \quad (30)$$

其中:  $\hat{\Phi}(k)$  中的对角元素即是  $\Xi(k)$  的估计值,  $\xi(k)$  表示  $\Delta d'_{NL}(k)$  的估计值,  $z(k) = y(k-1) + \xi(k-1) + (\hat{\Xi}(k-1) + \delta) \Delta u(k-1)$ . 因此, 最终的控制律为

$$\begin{aligned} \Delta u_{\text{eq}}(k) = & (\hat{\Xi}(k) + \delta)^{-1} [y_r(k+1) - y(k) - \\ & c_0 e(k) + (I - \alpha^{-1}\beta)S(k) - \xi(k)], \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{\text{dis}}(k) = & (\hat{\Xi}(k) + \delta)^{-1} [(\hat{\Xi}(k-1) + \\ & \sigma) \Delta u_{\text{dis}}(k-1) - \varepsilon \text{sign}(\bar{S}(k))], \quad (32) \end{aligned}$$

$$\Delta u(k) = \Delta u_{\text{eq}}(k) + \Delta u_{\text{dis}}(k). \quad (33)$$

**注 8** 本文采用 DESO 对系统各回路间的耦合, 以及数据模型的未建模动态进行在线预估, 以削弱系统各回路间的相互影响, 因此本文所提的算法具有一定的解耦效果. 同时, DESO 的引入对于整个闭环系统的稳定性也十分重要, 本文将在下一小节具体讨论.

### 4 稳定性分析

本文分两步证明整个闭环系统的稳定性, 首先证明引理 2 中迭代参数的有界性, 其次证明所提算法的收敛性.

**定理 1** 考虑非线性离散系统 (1), 定义矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -L & I \end{bmatrix} \in R^{2n \times 2n}$ , 若矩阵中所有特征值的模均小于 1, 则控制律 (22) 中的未知参数  $\Xi(k)$  和  $\Delta d'_{NL}(k)$  在采用引理 2 进行迭代时是有界的.

**证明** 由文献 [20] 可知, 当采用式 (29) 对  $\Phi(k)$  进行估计时,  $\hat{\Phi}(k)$  是有界的.

定义  $e(k) = y(k) - z(k)$ ,  $\eta(k) = \Delta d_{NL}(k) - \xi(k)$ , 结合式 (26) 和 (28) 可以得到系统的扩张状态估计误

差方程

$$X(k+1) = AX(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta M(k) \end{bmatrix}. \quad (34)$$

其中:  $X(k+1) = [e(k+1)\eta(k+1)]^T$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -L & I \end{bmatrix}$ ,

$$\Delta M(k) = \Delta d_{NL}(k+1) - \Delta d_{NL}(k).$$

由上文的假设和分析可知, 存在一个正数  $\gamma_0$  使得

$$\|\Delta M(k)\| < \gamma_0. \quad (35)$$

由于矩阵  $A$  的特征值的模均小于 1, 结合式 (35) 可知,  $X(k)$  是收敛的.

$\eta(k)$  包含于  $X(k)$  中, 因此  $\eta(k)$  也是收敛的, 并且存在一个正数  $\tau$  使得

$$\|\eta(k)\| < \tau. \quad (36)$$

可见, 对于式 (26) 中的未知项  $\Delta d_{NL}(k)$ , 采用引理 2 所示的迭代公式对其进行预估时, 系统的输出估计误差是收敛的, 并使得  $\eta(k)$  满足  $\|\eta(k)\| < \tau$ . 同时, 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\eta(k)$  收敛到一个有限的边界.  $\square$

为了证明整个闭环系统的稳定性, 需要对系统 (1) 作出如下几点合理假设.

**假设 5** 如果矩阵  $A$  的特征值的模均小于 1, 则根据上述的分析, 它能够保证估计误差在一定范围内, 即

$$\max \|\Delta d'_{NL}(k) - \xi(k)\| \leq \tau, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (37)$$

**注 9** 由上述分析可知,  $\xi(k)$  是有界的. 由于  $\Delta d'_{NL}(k)$  也是有界的, 假设 5 是成立的.

**假设 6** 令  $\bar{d}(k) = \Delta d'_{NL}(k) - \xi(k)$ , 对于任意时刻  $k$ ,  $\|\bar{d}(k) - \bar{d}(k-1)\|$  是有界的, 也即

$$\|\bar{d}(k) - \bar{d}(k-1)\| < \bar{d}_0. \quad (38)$$

**注 10** 由假设 5 可知, 显然假设 6 也是合理的.

**定理 2** 如果满足假设 1~假设 6, 被控系统 (1) 采用控制律 (33), 时变参数  $\Xi(k)$  和  $\Delta d'_{NL}(k)$  采用引理 2 中的公式进行预估, 矩阵  $A$  中所有特征值的模均小于 1,  $y_r(k+1)$  有界,  $\varepsilon$  满足

$$\varepsilon > \bar{d}_0, \quad (39)$$

则被控对象的输出将最终收敛到期望的轨迹.

**证明** 根据上面的分析, 结合方程 (26) 形式的转换以及控制律 (31)、(33), 可以对系统 (1) 进行如下推导:

$$y(k+1) = y(k) + (\hat{\Xi}(k) + \delta)(\Delta u_{eq}(k) + \Delta u_{dis}(k)) + \Delta d_{NL}(k). \quad (40)$$

将控制律 (31)、(32) 代入 (40) 可得

$$y(k+1) = y_r(k+1) + (I - \alpha^{-1}\beta)S(k) - \xi(k) - c_0 e(k) + \Delta d_{NL}(k) - \varepsilon \text{sign}(\bar{S}(k)) + (\hat{\Xi}(k-1) + \delta)\Delta u_{dis}(k-1). \quad (41)$$

因此, 结合式 (11) 可得

$$S(k+1) = C^T E(k+1) = -\xi(k) + (I - \alpha^{-1}\beta)S(k) + \Delta d_{NL}(k) + (\hat{\Xi}(k-1) + \delta)\Delta u_{dis}(k-1) - \varepsilon \text{sign}(\bar{S}(k)), \quad (42)$$

即

$$S(k+1) = C^T E(k+1) = \bar{d}(k) + (I - \alpha^{-1}\beta)S(k) + (\hat{\Xi}(k-1) + \delta)\Delta u_{dis}(k-1) - \varepsilon \text{sign}(\bar{S}(k)). \quad (43)$$

同理可得

$$S(k) = C^T E(k) = \bar{d}(k-1) + (I - \alpha^{-1}\beta)S(k-1) + (\hat{\Xi}(k-1) + \delta)\Delta u_{dis}(k-1). \quad (44)$$

于是, 由式 (43) 和 (44) 可以得出

$$S(k+1) - S(k) = (I - \alpha^{-1}\beta)(S(k) - S(k-1)) + (\bar{d}(k) - \bar{d}(k-1)) - \varepsilon \text{sign}(\bar{S}(k)). \quad (45)$$

所以

$$\alpha(S(k+1) - S(k)) + \beta S(k) = \alpha(S(k) - S(k-1)) + \beta S(k-1) + \alpha[(\bar{d}(k) - \bar{d}(k-1)) - \varepsilon \text{sign}(\bar{S}(k))]. \quad (46)$$

即, 上式可以转换成如下形式:

$$\bar{S}(k+1) = \bar{S}(k) + \alpha[(\bar{d}(k) - \bar{d}(k-1)) - \varepsilon \text{sign}(\bar{S}(k))]. \quad (47)$$

由式 (39)、(47) 及文献 [21] 可知, 在控制律 (31)~(33) 的作用下系统的二阶滑模面将进入准滑动模态<sup>[23]</sup>. 结合式 (15), 由  $\bar{S}(k+1) = 0$  可得

$$S(k+1) = \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)S(k). \quad (48)$$

由于  $0 < \beta_i < \alpha_i$ ,  $(1 - \beta_i/\alpha_i) \in (0, 1)$ , 可见, 当二阶滑模面进入准滑动模态后, 被控对象的输出将最终收敛到期望的轨迹.  $\square$

## 5 仿真分析

许多实际工业过程中的系统大多具有非线性、耦合、不确定性以及扰动等特性, 因此针对本文所提方法, 本小节选取一类带有外部扰动和不确定性的非线性离散 MIMO 系统进行仿真验证. 显然, 该类系统的数学模型很难获得, 只能产生仿真所需的输入输出数据. 具体的数学仿真模型如下所示:

$$\begin{cases} y_1(k+1) = -0.8 \sin(y_1(k)) + u_1(k) - \\ \quad (0.16 + a(k)) \cos(y_1(k-1)) + \\ \quad 1.7u_1(k-1) + 0.3u_2(k-1) - \\ \quad 0.3u_3(k-1) + c(k), \\ y_2(k+1) = -0.8y_2(k) + u_2(k) - \\ \quad (0.16 - b(k)) \sin(y_2(k-1)) + \\ \quad 0.3u_1(k-1) + 0.5u_2(k-1) + \\ \quad 0.4u_3(k-1) + f(k), \\ y_3(k+1) = -0.8y_3(k) - 0.2y_3(k-1) + \\ \quad 1.2u_3(k-1) + g(k) + \\ \quad 0.8u_1(k) + 0.3u_2(k-1). \end{cases} \quad (49)$$

期望给定信号

$$\begin{cases} y_{r1}(k+1) = 1 - 0.02 \bmod(k, 100), \\ y_{r2}(k+1) = \sin(k\pi/100), \\ y_{r3}(k+1) = 0.5(-1)^{\text{round}(k/200)}. \end{cases}$$

扰动信号

$$\begin{cases} a(k) = 0.2 \sin(k\pi/25), \\ b(k) = 0.2 \sin(k\pi/25), \\ c(k) = 0.2 \cos(k\pi/65), \\ f(k) = 0.2 \sin(k\pi/20), \\ g(k) = 0.1 \sin(k\pi/20). \end{cases}$$

为了验证本文所提出方法的有效性, 针对未知 MIMO 非线性离散系统 (49), 这里将本文所提出的方法 (SQSMDC) 与文献 [11] 中的方法 (NN-QSMDC) 分别应用于其中, 并进行仿真对比分析. NN-QSMDC 的仿真参数为:  $\hat{\Phi}(1) = \hat{\Phi}(2) = \hat{\Phi}(3) = \hat{\Phi}(4) = [4, 0, 0; 0, 2, 0; 0, 0, 3]$ ,  $q_1 = 0.6$ ,  $q_2 = 0.9$ ,  $q_3 = 0.6$ ,  $\delta_1 = 3$ ,  $\delta_2 = 3$ ,  $\delta_3 = 0.5$ ,  $c_{01} = c_{02} = c_{03} = 0.3$ ,  $\varepsilon_1 = 0.03$ ,  $\varepsilon_2 = 0.08$ ,  $\varepsilon_3 = 0.03$ ,  $\mu = 0.75$ ,  $\eta = 0.3$ , 神经网络的初始参数均取随机数. SQSMDC 的仿真参数为:  $\delta_1 = 3$ ,  $\delta_2 = 3$ ,  $\delta_3 = 0.5$ ,  $\alpha_1 = 1.5$ ,  $\alpha_2 = 1.5$ ,  $\alpha_3 = 1.5$ ,  $\beta_1 = 0.6$ ,  $\beta_2 = 0.9$ ,  $\beta_3 = 0.6$ ,  $\varepsilon_1 = 0.01$ ,  $\varepsilon_2 = 0.05$ ,  $\varepsilon_3 = 0.01$ ,  $L_1 = 0.001$ ,  $L_2 = 0.001$ , 其余仿真参数同 NN-QSMDC. 两种方法所对应的仿真结果见图 1~图 3.

图 1~图 3 分别是采用 SQSMDC 和 NN-QSMDC 两种方法时系统输入、输出的二维曲线. 从仿真结果可以看出, 本文所提出的方法继承了文献 [11] 中 NN-QSMDC 方法的优越性. 同时, 由于高阶滑模控制方法固有的优于准滑模控制 (QSMC) 方法的特性, 使得系统的抖振得到了减缓; DESO 的运用使得控制系统的解耦机制更加简洁, 不仅达到了解耦的效果, 而且避开了 NN-QSMDC 方法中参数多、随机给定、容易不稳定问题.

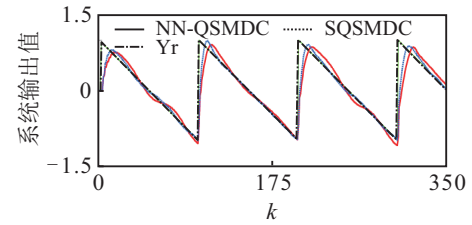


图 1 两种方法作用下的响应曲线 ( $y_1, u_1$ )

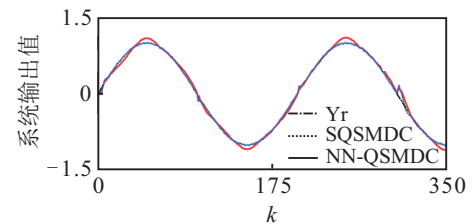


图 2 两种方法作用下的响应曲线 ( $y_2, u_2$ )

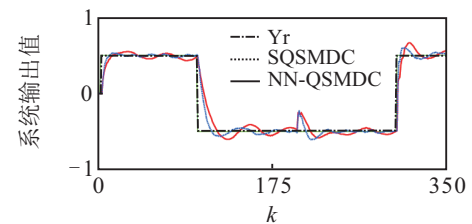


图 3 两种方法作用下的响应曲线 ( $y_3, u_3$ )

## 6 结 论

本文针对一类带有外部扰动的未知 MIMO 非线性离散系统, 在自适应准滑模控制的框架下, 提出了改进的自适应准滑模控制方法. 该方法运用高阶滑模控制的思维, 结合扰动解耦技术, 不仅进一步降低了控制系统的抖振现象, 而且减缓了多变量系统下各回路间的相互影响, 并避开了 NN-QSMDC 方法中参数多、随机给定、容易不稳定问题. 最后的理论证明和仿真结果验证了所提出方法的有效性.

## 参考文献(References)

- [1] Zhao D, Zou T, Li S, et al. Adaptive backstepping sliding mode control for leader-follower multi-agent systems[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2012, 6(8): 1109-1117.
- [2] Jackson M E, Shtessel Y B. Sliding mode thermal control system for space station furnace facility[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 1998, 6(5): 612-622.
- [3] Gao W, Wang Y, Homaifa A. Discrete-time variable structure control systems[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 1995, 42(2): 117-122.
- [4] Hu Q, Du C, Xie L, et al. Discrete-time sliding mode control with time-varying surface for hard disk drives[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2009, 17(1): 175-183.
- [5] Qu S, Xia X, Zhang J. Dynamical behaviours of an euler discretized sliding mode control systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2014, 59(9): 2525-2529.
- [6] Li S, Du H, Yu X. Discrete-time terminal sliding mode control systems based on Euler's discretization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2014, 59(2): 546-552.
- [7] Khandekar A A, Malwatkar G M, Patre B M. Discrete sliding mode control for robust tracking of higher order delay time systems with experimental application[J]. *ISA Trans*, 2013, 52(1): 36-44.
- [8] Hou Z S, Wang Z. From model-based control to data-driven control: Survey, classification and perspective[J]. *Information Sciences*, 2013, 235(20): 3-35.
- [9] Wang W H, Hou Z S. New adaptive quasi-sliding mode control for nonlinear discrete-time systems[J]. *J of Systems Engineering and Electronics*, 2008, 19(1): 154-160.
- [10] 侯忠生, 王卫红, 金尚泰. 一类非线性离散系统自适应准滑模控制[J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(5): 505-509. (Hou Z S, Wang W H, Jin S T. Adaptive quasi-sliding-mode control for a class of nonlinear discrete-time systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(5): 505-509.)
- [11] 王卫红. 无模型自适应控制理论几类问题的研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2008. (Wang W H. Issues on model-free adaptive control theory[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2008.)
- [12] Levant A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control[J]. *Int J of Control*, 1993, 58(6): 1247-1263.
- [13] Zheng Q, Chen Z Z, Gao Z Q. A practical approach to disturbance decoupling control[J]. *Control Engineering Practice*, 2009, 17(9): 1016-1025.
- [14] 刘倩, 谭文, 李东海. 一种多变量自抗扰控制结构的设计研究[J]. *华北电力大学学报*, 2014, 41(6): 97-103. (Liu Q, Tan W, Li D H. Study on a multivariable active disturbance rejection control structure[J]. *J of North China Electric Power University*, 2014, 41(6): 97-103.)
- [15] 楼冠男, 谭文, 郑勤玲. 汽包锅炉单元机组协调系统的线性自抗扰控制[J]. *中国电机工程学报*, 2011, 31(23): 94-100. (Lou G N, Tan W, Zheng Q L. Linear active disturbance rejection control for the coordinated system of drum boiler-turbine units[J]. *Proc of the CSEE*, 2011, 31(23): 94-100.)
- [16] 邵立伟, 廖晓钟, 夏元清, 等. 三阶离散扩张状态观测器的稳定性分析及其综合[J]. *信息与控制*, 2008, 37(2): 135-139. (Shao L W, Liao X Z, Xia Y Q, et al. Stability analysis and synthesis of third order discrete extended state observer[J]. *Information and Control*, 2008, 37(2): 135-139.)
- [17] Miklosovich R, Radke A, Gao Z. Discrete implementation and generalization of the extended state observer[C]. *American Control Conf. Minneapolis: IEEE*, 2006: 2209-2214.
- [18] Wu D, Chen K, Wang X. Tracking control and active disturbance rejection with application to noncircular machining[J]. *Int J of Machine Tools and Manufacture*, 2007, 47(15): 2207-2217.
- [19] Su Y, Zheng C, Duan B. Automatic disturbances rejection controller for precise motion control of permanent-magnet synchronous motors[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2005, 52(3): 814-823.
- [20] Hou Z, Jin S. Model free adaptive control: Theory and applications[M]. *CRC Press*, 2013: 47-52.
- [21] Mihoub M, Nouri A S, Ben Abdenour R. Multimodel discrete second order sliding mode control: Stability analysis and real time application on a chemical reactor[M]. *Bartoszewicz A. Sliding Mode Control, Rijeka, Croatia: InTech*, 2011: 473-490.
- [22] 翁永鹏, 高宪文, 刘昕明. 非仿射非线性离散系统的数据驱动二阶滑模解耦控制[J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(3): 309-318. (Weng Y P, Gao X W, Liu X M. Data-driven second-order sliding-mode decoupling control for non-affine nonlinear discrete-time system[J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(3): 309-318.)
- [23] Bartoszewicz A. Discrete-time quasi-sliding mode control strategies[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 1998, 45(4): 633-637.