

文章编号: 1001-0920(2016)05-0823-06

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.0261

## 执行器故障重复过程的鲁棒迭代学习容错控制方法及应用

陶洪峰, 邹伟, 杨慧中

(江南大学 教育部轻工过程先进控制重点实验室, 江苏 无锡 214122)

**摘要:** 针对具有执行器故障和外界扰动的线性重复过程, 给出一种鲁棒迭代学习容错控制策略. 首先, 基于二维(2D)系统理论, 设计鲁棒迭代学习容错控制器, 将迭代学习控制系统等效转化为2D模型; 然后, 利用线性矩阵不等式(LMI)技术, 分析和优化控制系统在时间和迭代方向上的容错性能以及对干扰的抑制性能, 同时给出系统满足这些性能的充分条件, 并进一步通过求解LMI凸优化问题获得控制器参数; 最后, 通过对旋转控制系统的仿真结果验证了所提出算法的有效性.

**关键词:** 执行器故障; 线性重复过程; 迭代学习容错控制; 二维模型; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## Robust iterative learning fault-tolerant control method and application for repetitive process with actuator fault

TAO Hong-feng, ZOU Wei, YANG Hui-zhong

(Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry of Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China. Correspondent: TAO Hong-feng, E-mail: taohongfeng@hotmail.com)

**Abstract:** A robust iterative learning fault-tolerant control scheme is proposed for linear processes with actuator faults and external disturbances. Firstly, the robust iterative learning fault-tolerant controller is designed based on the two dimension(2D) system theory, and the iterative learning control system is transformed to an equivalent two dimensional model. Then the fault-tolerant performance along both time and cycle directions and disturbance rejection performance of the controlled system is analyzed and optimized by using linear matrix inequality(LMI) technique. Meanwhile, the sufficient conditions for the system to satisfy these performances are given, and the controller parameters are derived from the LMI convex optimization problems further. Finally, the simulation results of the rotational control system show the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** actuator faults; linear repetitive processes; iterative learning fault-tolerant control; two-dimension model; linear matrix inequality

### 0 引言

迭代学习控制利用系统先前较少的控制经验和输出误差来修正当前控制信息, 以实现重复运行系统在有限时间区间上对期望轨迹的任意精度跟踪<sup>[1-2]</sup>. 重复过程的迭代学习控制系统通常可视作时间轴和批次轴上的二维(2D)重复过程. 近年来, 基于2D系统理论的迭代学习控制分析和设计受到了广泛关注<sup>[3-6]</sup>. 文献[3]基于2D方法对线性连续重复系统设计了PD型迭代学习控制算法, 并得到了系统精确跟踪控制的充分条件; 文献[4]结合离散过程的稳定性

理论, 设计了迭代学习控制器, 使得系统的输出误差单调收敛且批次轴方向上的性能随重复过程逐渐提高; 为了使重复系统在时间和批次方向上的性能同时得到优化, 文献[5-6]针对不确定性2D系统设计了很好的控制架构, 提出了鲁棒迭代学习的平衡优化算法, 实现了重复系统在两个方向上的稳定鲁棒性.

然而, 不可忽视的是由于重复系统的执行器在迭代学习控制过程中通常是高频往复动作, 极易产生执行器机械疲劳和损耗, 导致执行器故障影响控制性能和安全. 因此, 设计容错控制器对故障系统采取有

收稿日期: 2015-03-05; 修回日期: 2015-05-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273070, 61203092); 高等学校学科创新引智计划项目(B12018); 江苏高校优势学科建设工程项目.

作者简介: 陶洪峰(1979—), 男, 副教授, 从事故障检测与容错控制等研究; 邹伟(1989—), 男, 硕士生, 从事迭代学习控制理论及应用的研究.

效的校正措施显得尤为必要. 文献[7-8]针对线性重复过程的执行器故障, 将2D系统转化二维F-M模型, 设计了迭代学习容错控制律以保证系统在正常或故障情形下的控制性能. 但是, 该容错控制律设计并未同时考虑系统输入和输出端的扰动影响. 此外, 优化2D系统的控制效果需要同时考虑时间轴和批次轴上的容错性能, 以进一步提高系统的跟踪性能.

本文针对受执行器故障和外界扰动影响的线性重复过程, 基于2D Roesser系统理论设计相应的批次容错控制器, 以LMI的形式给出确保系统在时间轴和批次轴两个方向上单调收敛, 并满足未知扰动 $H_\infty$ 鲁棒性能的充分条件, 平衡优化了系统的鲁棒容错性能. 最后通过对旋转控制系统的仿真实验验证了本文算法的有效性.

## 1 问题描述

考虑如下线性重复过程:

$$\begin{cases} x(t+1, k) = Ax(t, k) + Bu(t, k) + Ew(t, k), \\ y(t, k) = Cx(t, k) + F\eta(t, k), \\ x(0, k) = x_{0,k}, \end{cases} \quad (1)$$

$$t = 0, 1, \dots, T, k = 1, 2, \dots$$

其中:  $k$  为迭代批次;  $x(t, k) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$ ,  $y(t) \in R^l$  分别表示系统在第  $k$  次第  $t$  时刻的状态、输入和输出;  $x_{0,k}$  表示系统在第  $k$  次的初始条件;  $w(t, k)$  和  $\eta(t, k)$  为系统状态端和输出端的未知扰动;  $A, B, C, E$  和  $F$  为相应维数的已知常数矩阵.

对于控制输入  $u_i(t, k)$ , 令  $u_i^F(t, k)$  表示执行器故障的输出信号, 定义执行器故障模型<sup>[9]</sup>

$$u_i^F(t, k) = \Gamma_i u_i(t, k), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

其中  $\Gamma_i$  未知, 满足

$$0 \leq \underline{\Gamma}_i \leq \Gamma_i \leq \bar{\Gamma}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

若  $\Gamma_i = 1$ , 则执行器正常,  $u_i^F = u_i$ ; 若  $\Gamma_i = 0$ , 则为完全失效故障; 若  $0 < \Gamma_i < 1$ , 则为部分失效故障. 记

$$\begin{aligned} u^F &= \text{diag} \{u_1^F, u_2^F, \dots, u_m^F\}, \\ \bar{\Gamma} &= \text{diag} \{\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2, \dots, \bar{\Gamma}_m\}, \\ \underline{\Gamma} &= \text{diag} \{\underline{\Gamma}_1, \underline{\Gamma}_2, \dots, \underline{\Gamma}_m\}, \\ \Gamma &= \text{diag} \{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m\}. \end{aligned} \quad (4)$$

同时定义

$$\begin{aligned} q &= \text{diag} \{q_1, q_2, \dots, q_m\}, \\ q_0 &= \text{diag} \{q_{10}, q_{20}, \dots, q_{m0}\}, \\ q_i &= \frac{(\bar{\Gamma}_i + \underline{\Gamma}_i)}{2}, \\ q_{i0} &= \frac{\bar{\Gamma}_i - \underline{\Gamma}_i}{\bar{\Gamma}_i + \underline{\Gamma}_i}. \end{aligned} \quad (5)$$

因此对于未知矩阵  $\Gamma_0, \Gamma$  可进一步表示为

$$\Gamma = (I + \Gamma_0)q, \quad (6)$$

并且

$$|\Gamma_0| \leq q_0 \leq I. \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \text{diag} \{\Gamma_{01}, \Gamma_{02}, \dots, \Gamma_{0m}\}, \\ |\Gamma_0| &= \text{diag} \{|\Gamma_{01}|, |\Gamma_{02}|, \dots, |\Gamma_{0m}|\}, \\ \Gamma_{0i} &= (\Gamma_i - q_i)/q_i. \end{aligned}$$

进而, 执行器故障线性重复过程可描述如下:

$$\begin{cases} x(t+1, k) = Ax(t, k) + B\Gamma u(t, k) + Ew(t, k), \\ y(t, k) = Cx(t, k) + F\eta(t, k), \\ x(0, k) = x_{0,k}, \end{cases} \quad (8)$$

$$t = 0, 1, \dots, T, k = 1, 2, \dots$$

因此, 本文的控制目标为执行器故障系统(8)在容错控制作用下, 使各个批次的系统输出  $y(t, k)$  能够跟踪上期望轨迹  $y_d(t)$ , 并通过鲁棒技术有效抑制外部扰动的影响.

## 2 鲁棒迭代学习容错控制

### 2.1 等价二维模型

基于系统(8), 定义跟踪误差  $e(t, k) = y_d(t) - y(t, k)$ , 设计鲁棒迭代学习容错控制律

$$\begin{aligned} u(t, k+1) &= u(t, k) + K_1(x(t, k+1) - x(t, k)) + \\ &K_2 e(t+1, k), \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $K_1$  和  $K_2$  为待定增益矩阵.

在批次轴上定义算子

$$\delta f(t, k) = f(t, k) - f(t, k-1), \quad f \in \{x, y, u, w, \eta\}, \quad (10)$$

可得系统(8)的2D模型为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta x(t+1, k) \\ e(t+1, k) \end{bmatrix} &= (\bar{A} + \bar{B}\Gamma K) \begin{bmatrix} \delta x(t, k) \\ e(t+1, k-1) \end{bmatrix} + \\ &D\delta W(t, k), \\ z(t, k) &= G \begin{bmatrix} \delta x(t, k) \\ e(t+1, k-1) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -CA & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ -CB \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} E & 0 \\ -CE & -F \end{bmatrix}, \quad W(t, k) = \begin{bmatrix} w(t, k) \\ \eta(t+1, k) \end{bmatrix}, \\ K &= [K_1 \quad K_2], \quad G = [0 \quad I]. \end{aligned}$$

### 2.2 2D容错性能

设

$$x(i, j) = \begin{bmatrix} x_T(i+1, j) \\ x_K(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x(t+1, k) \\ e(t+1, k) \end{bmatrix},$$

即系统状态变量在时间和批次两个轴( $T$ 轴和 $K$ 轴)方向上演化, 边界条件 $x_T(0, j)$ 和 $x_K(i, 0)$ 分别称为 $T$ -界和 $K$ -界, 在此基础上定义以下二维系统容错性能<sup>[6,8]</sup>.

**定义 1** 对于标量 $\gamma > 0$ , 如果2D系统(11)鲁棒稳定, 并且对于零界条件和任意非零外部扰动 $\delta W \in \ell_{2e}$ , 即

$$\|\delta W\|_{2e} = \sqrt{\sum_{t=0}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} \|\delta W(t, k)\|^2} < \infty,$$

系统被控输出满足

$$\|z\|_{2e} < \gamma \|\delta W\|_{2e}, \quad (12)$$

则称该系统具有 $H_\infty$ 鲁棒性能,  $\gamma$ 表示输出对干扰的敏感界,  $\gamma$ 的值越小, 表明系统的抗干扰性越强.

**定义 2** 如果存在函数 $V(\cdot)$ 和标量 $0 < \rho < 1$ 满足:

- 1) 对于 $\forall x \in R^n$ , 有 $V(x) \geq 0$ , 并且 $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- 2) 当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $V(x) \rightarrow \infty$ ;
- 3) 对于任意有界的边界条件和任意可容许的执行器故障, 有

$$\sum_{\substack{i+j=I_0+J_0+k+1, \\ I_0 \leq i \leq I_0+i, \\ J_0 \leq j \leq J_0+i}} V(x(i, j)) < \rho \sum_{\substack{i+j=I_0+J_0+k, \\ I_0 \leq i \leq I_0+i, \\ J_0 \leq j \leq J_0+i}} V(x(i, j)). \quad (13)$$

则满足式(13)最小的 $\rho$ 为系统(11)的二维收敛指标(2D-CI).

**定义 3** 如果存在函数 $V(\cdot)$ 和标量 $0 < \alpha < 1$ 满足:

- 1) 对于 $\forall x \in R^n$ , 有 $V(x) \geq 0$ , 并且 $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- 2) 当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $V(x) \rightarrow \infty$ ;
- 3) 假设 $K$ -界条件 $x_K(i, 0)$ 为零, 对于任意 $T$ -界条件 $x_T(0, j)$ , 任意整数 $k > 0$ 和任意可容许执行器故障, 有

$$\sum_{j=0}^k V(x_T(i+1, j)) < \alpha \sum_{j=0}^k V(x_T(i, j)), \quad \forall i > 0. \quad (14)$$

则满足式(14)的最小 $\alpha$ 为系统(11)的 $T$ 容错指标( $T$ -CI).

**定义 4** 如果存在函数 $V(\cdot)$ 和标量 $0 < \beta < 1$ 满足:

- 1) 对于 $\forall x \in R^n$ , 有 $V(x) \geq 0$ , 并且 $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;

2) 当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $V(x) \rightarrow \infty$ ;

3) 假设 $T$ -界条件 $x_T(0, j)$ 为零, 对于任意 $K$ -界条件 $x_K(i, 0)$ , 任意整数 $k > 0$ 和任意可容许执行器故障下, 有

$$\sum_{i=0}^k V(x_K(i, j+1)) < \beta \sum_{i=0}^k V(x_K(i, j)), \quad \forall j > 0. \quad (15)$$

则满足式(15)的最小 $\beta$ 为系统(11)的 $K$ 容错指标( $K$ -CI).

### 2.3 容错控制器设计

**引理 1**<sup>[10]</sup> 假设 $W, L$ 和 $V$ 为给定适维矩阵, 且 $W$ 和 $V$ 为正定矩阵, 则 $L^T V L - W < 0$ 等价于

$$\begin{bmatrix} -W & L^T \\ L & -V^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

或者

$$\begin{bmatrix} -V^{-1} & L \\ L^T & -W \end{bmatrix} < 0. \quad (17)$$

**引理 2**<sup>[11]</sup> 给定合适维数的矩阵 $Q = Q^T$ ,  $X$ 和 $Y$ 对于任意满足 $\Delta^T \Delta \leq I$ 的矩阵

$$Q + X \Delta Y + Y^T \Delta^T X^T < 0 \quad (18)$$

成立的充分必要条件是: 存在 $\varepsilon > 0$ , 使得

$$Q + \varepsilon X X^T + \varepsilon^{-1} Y^T Y < 0. \quad (19)$$

**定理 1** 对于任意标量 $\gamma > 0, \varepsilon > 0$ 和 $0 < \alpha, \beta < 1$ , 如果存在正定矩阵 $Q$ 和矩阵 $R$ 使线性矩阵不等式

$$\Phi = \begin{bmatrix} -Q(\alpha, \beta) & * & * & * & * \\ 0 & -\gamma I & * & * & * \\ H & D & -Q & * & * \\ M & 0 & 0 & -\gamma I & * \\ N_1 & 0 & N_2 & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0$$

成立. 其中

$$Q(\alpha, \beta) = \text{diag}\{\alpha Q_T, \beta Q_K\},$$

$$M = [0 \quad Q_K], \quad R = [R_1 \quad R_2] = [K_1 Q_T \quad K_2 Q_K],$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ qR \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon q_0 B^T & -\varepsilon q_0 (CB)^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} A Q_T + B q R_1 & B q R_2 \\ -C A Q_T - C B q R_1 & Q_K - C B q R_2 \end{bmatrix}.$$

则可得容错控制器增益 $K = R^{-1} Q$ 使闭环2D系统(11)稳定, 且容错性能指标 $T\text{-CI} \leq \alpha, K\text{-CI} \leq \beta, 2D\text{-CI} \leq \rho = \max\{\alpha, \beta\}$ , 且 $H_\infty$ 鲁棒性能指标不大于 $\gamma$ .

**证明** 对于系统(11), 假设存在正定矩阵 $P$ , 在

满足定义 1~定义 4 的条件下,有

$$\Theta = \begin{bmatrix} (\bar{A} + \bar{B}\Gamma K)^T \\ D^T \end{bmatrix} P[\bar{A} + \bar{B}\Gamma K \quad D] - \begin{bmatrix} P(\alpha, \beta) - \gamma^{-1}G^T G & 0 \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (20)$$

文献[5]在闭环 2D 模型中给出了正常系统的鲁棒稳定性和在两个方向上的稳定性条件. 因此, 下面将针对执行器故障闭环系统(11)讨论其容错稳定性以及容错性能指标  $\rho$ 、 $\alpha$  和  $\beta$  的优化. 若定理不等式  $\Phi < 0$  成立, 则式(20)也成立, 进而结合引理 1 可得

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha, \beta) & * & * & * \\ 0 & -\gamma I & * & * \\ \bar{A} + \bar{B}\Gamma K & D & -P^{-1} & * \\ G & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (21)$$

定义  $Q = P^{-1}$ , 将式(21)的左边矩阵前后都乘以  $\text{diag}\{Q, I, I, I\}$ , 结合式(6)可得

$$A + X\Gamma_0 Y + (X\Gamma_0 Y)^T < 0. \quad (22)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -Q(\alpha, \beta) & * & * & * \\ 0 & -\gamma I & * & * \\ \bar{A}Q + \bar{B}qR & D & -Q & * \\ GQ & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix},$$

$$X = [0 \quad 0 \quad \bar{B}^T \quad 0]^T, Y = [qR \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

由引理 2 可知, 若不等式(22)成立, 当且仅当存在标量  $\varepsilon > 0$  使得

$$A + [\varepsilon^{\frac{1}{2}}q_0 X \quad \varepsilon^{-\frac{1}{2}}Y^T] \begin{bmatrix} \varepsilon^{\frac{1}{2}}q_0 X^T \\ \varepsilon^{-\frac{1}{2}}Y \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

则运用引理 1, 在所得矩阵的前后都乘以  $\text{diag}\{I, I, I, I, \varepsilon^{\frac{1}{2}}I, \varepsilon^{\frac{1}{2}}I\}$  即可得  $\Phi$  的形式.

下面证明系统的鲁棒  $H_\infty$  性能指标  $\gamma$ . 定义

$$J(t, k) = \Delta V(t, k) + \gamma^{-1} \|z(t, k)\|^2 - \gamma \|\delta W(t, k)\|^2, \quad (24)$$

其中

$$\Delta V(t, k) = \left\| \begin{bmatrix} \delta x(t+1, k) \\ e(t+1, k) \end{bmatrix} \right\|_P - \left\| \begin{bmatrix} \delta x(t, k) \\ e(t+1, k-1) \end{bmatrix} \right\|_{P(\alpha, \beta)}. \quad (25)$$

由式(11)可得

$$J(t, k) = \left\| \begin{bmatrix} \delta x(t, k) \\ e(t+1, k-1) \\ \delta W(t, k) \end{bmatrix} \right\|_{\Theta} < 0. \quad (26)$$

对于任意整数  $N_1, N_2 > 0$ , 当所有界条件为零时, 有

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} \Delta V(t, k) &= \\ \sum_{t=0}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} ((1-\alpha) \|\delta x(t, k)\|_{Q_T^{-1}}) &+ \\ \sum_{t=1}^{N_1+1} \sum_{k=1}^{N_2-1} ((1-\beta) \|e(t, k)\|_{Q_K^{-1}}) &+ \\ \sum_{t=1}^{N_1+1} (\|e(t, N_2)\|_{Q_K^{-1}}) &+ \sum_{k=1}^{N_2} (\|\delta x(N_1+1, k)\|_{Q_T^{-1}}) \geq 0. \end{aligned} \quad (27)$$

因此有

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} (\gamma^{-1} \|z(t, k)\|^2 - \gamma \|\delta W(t, k)\|^2) &\leq \\ \sum_{t=0}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} (\Delta V(t, k) + \gamma^{-1} \|z(t, k)\|^2 - \gamma \|\delta W(t, k)\|^2) &= \\ \sum_{t=0}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} J(t, k) < 0, \end{aligned} \quad (28)$$

也就是  $\|z\|_{2e} < \gamma \|W\|_{2e}$ , 即在迭代学习容错控制律(9)作用下 2D 系统的鲁棒性能指标为  $\gamma$ .

2D-CI 量化了 2D 模型(11)的二维容错性能, 2D-CI 的值越小, 相应 2D 闭环系统的收敛速度就越快. 同理,  $T$ -CI 和  $K$ -CI 分别沿  $T$  轴和  $K$  轴方向量化二维系统的容错性能, 其值越小, 相应的容错性越好, 收敛速度也越快<sup>[8]</sup>. 两个收敛指标  $\alpha$  和  $\beta$  相互影响, 为了确保时间和批次两个方向的控制性能,  $\alpha$  和  $\beta$  都应当最小化, 此时  $\Phi < 0$  变成了非线性优化问题, 引入加权因子  $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$  和  $\theta$ , 有  $\alpha = 1 - \lambda + \lambda\theta$ ,  $\beta = \lambda + (1 - \lambda)\theta$ , 其中加权因子  $\lambda$  用以调节和平衡两方向的容错性能. 当然在设计过程中也可选择性地强化某一个指标的要求, 以符合实际控制工程的需求.  $\lambda$  越大, 越注重  $T$ -容错;  $\lambda$  越小, 越强调  $K$ -容错.  $\gamma > 0$  为  $H_\infty$  鲁棒性能指标的上界, 当给定加权因子  $\lambda$  后, 用 LMI 工具箱<sup>[12]</sup>对  $\theta$  进行优化, 闭环 2D 系统(11)的各性能指标可通过求解以下特征值问题(EVP)获得:

$$\text{Minimize } \theta, \quad (29)$$

$$Q, R, \varepsilon, \gamma$$

由此定理 1 得证.  $\square$

**定理 2** 当  $\delta w(t, k) = 0$ ,  $\delta \eta(t, k) = 0$  时, 对于任意  $\varepsilon > 0$  和  $0 < \alpha, \beta < 1$ , 如果存在正定矩阵  $Q$  和矩阵  $R$  使得线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -Q(\alpha, \beta) & * & * \\ N_1 & -Q & * \\ N_2 & N_3 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

成立. 其中

$$Q(\alpha, \beta) = \text{diag}\{\alpha Q_T, \beta Q_K\},$$

$$R = [R_1 \ R_2] = KQ = [K_1 Q_T \ K_2 Q_K],$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} A Q_T + B q R_1 & B q R_2 \\ -C A Q_T - C B q R_1 & Q_K - C B q R_2 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q R_1 & q R_2 \end{bmatrix}, \quad N_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon q_0 B^T & -\varepsilon q_0 (C B)^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

则故障闭环2D系统(11)在控制器(9)作用下稳定, 容错性能指标  $T\text{-CI} \leq \alpha$ ,  $K\text{-CI} \leq \beta$ ,  $2D\text{-CI} \leq \rho = \max\{\alpha, \beta\}$ .

**注1** 当  $\delta w(t, k) = 0$ ,  $\delta \eta(t, k) = 0$  时, 可通过令式(1)中的  $E = 0$ ,  $F = 0$ , 此时定理1中的  $D = 0$ , 这样便可直接得到系统扰动为重复性扰动时的控制结论, 两个结论等价.

定理2的证明过程同定理1, 此处不再给出.

### 3 仿真实验

将鲁棒容错算法应用于旋转控制系统的转速控制, 其系统由两台直流电机组成, 一台为被控对象, 另一台是干扰发生器, 两电机的转轴用弹簧耦合在一起, 不断执行重复旋转动作. 系统状态方程<sup>[13-14]</sup>如下:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t), \\ y(t) = C_c x(t). \end{cases} \quad (31)$$

旋转系统的参数矩阵为

$$A_c = \begin{bmatrix} -31.31 & 0 & -28.330 \\ 0 & -10.25 & 8.001 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 28.06 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_c = [1 \ 0 \ 0].$$

旋转系统以100s为一个周期运行时间, 以  $T_s = 0.01$  s的采样时间将系统离散化, 并考虑状态和输出端的扰动, 可得旋转系统如式(1)形式的离散状态空间模型的矩阵参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} -0.1144 & 0.9155 & -120.0595 \\ 0.2541 & 0.628 & 38.6704 \\ 0.0042 & -0.0048 & -0.2381 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.1450 \\ 0.0281 \\ 0.0009 \end{bmatrix}, \quad C = C_c = [1 \ 0 \ 0],$$

$$E = [0.1 \ 0 \ 0], \quad F = 0.2,$$

假设旋转系统的执行器故障满足约束条件  $0.6 = \underline{\Gamma} \leq \Gamma \leq \bar{\Gamma} = 1$ , 由式(7)可得  $q = 0.8$ ,  $q_0 = 0.25$ , 控制系统的参考信号取为

$$y_d(t) = \sin(\pi t) + 0.5 \sin(2\pi t) + 0.5 \sin(3\pi t). \quad (32)$$

为了评价跟踪性能, 引入均方根误差

$$H(k) = \sqrt{\frac{1}{100} \sum_{t=1}^{100} e^2(t, k)}. \quad (33)$$

$H(k)$  越小, 表明批次  $k$  的跟踪效果越好. 在所有仿真过程中, 假设执行器故障从重复过程的第16批次开始发生.  $\Gamma = 0.8 + 0.2 \sin t$  为时变故障,  $w(t, k)$  和  $\eta(t, k)$  为均匀分布在区间  $[-1, 1]$  上的随机变量, 取  $\lambda = 0.5$ , 采用LMI优化工具箱求解问题(29)可得

$$\theta^* = 0.95, \quad \gamma = 16.15, \quad \rho = \alpha = \beta = 0.97,$$

$$K = [-1.6816 \ -1.736 \ 773.3734 \ 2.0133].$$

仿真结果如图1~图4所示. 即使是非重复扰动, 故障发生前系统前15个批次的跟踪误差也随时间快速收敛到稳定状态, 且跟踪性能在批次方向上不断提高, 如图1所示; 在第16批次过程故障发生后, 系统的跟踪性能较第15批次有所下降, 然而经过几个批次迭代之后, 跟踪性能再次达到一个理想的水平, 如图2所示. 该结论在图3和图4中有体现, 图3显示了不同批次的  $H$  值, 图4用3维图表示了系统的跟踪误差.

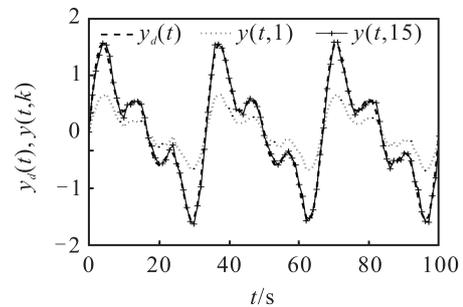


图1 期望输出与正常系统实际跟踪曲线

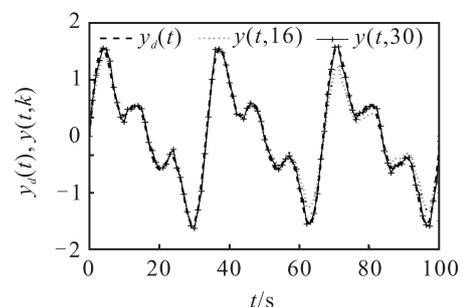


图2 期望输出与故障系统实际跟踪曲线

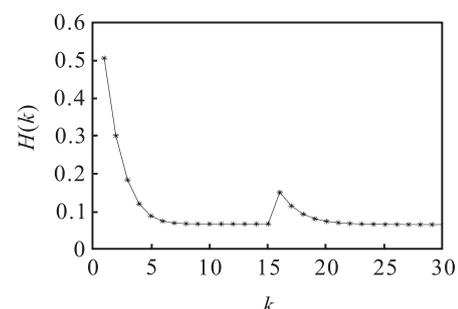


图3 均方根误差随迭代次数变化曲线

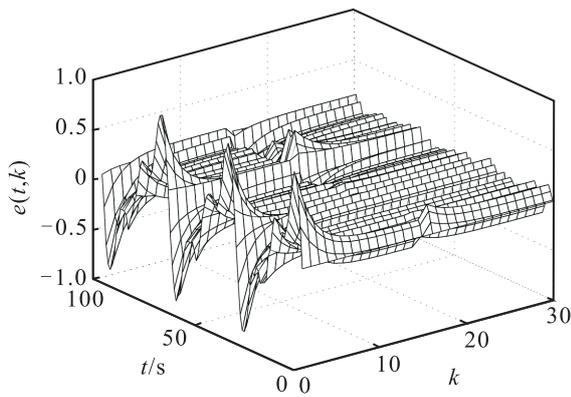


图4 跟踪误差随采样点和迭代次数变化曲面

图1~图4表明,在时变故障和非重复性扰动作用下,所提出的算法在正常情景和故障情景下都能在批次和时间两个方向上保障系统单调收敛,且渐近稳定,所设计的控制器同时具有 $T$ 容错和 $K$ 容错两种性能,并且对非重复性外界干扰具有鲁棒抑制作用。

#### 4 结论

本文以受外界扰动影响的线性重复过程为研究对象,讨论了系统的被动容错控制问题,基于2D系统理论设计了鲁棒迭代学习容错控制算法,进而利用LMI技术分析了系统的稳定性和在未知扰动下 $H_\infty$ 鲁棒性能的充分条件,并通过凸优化问题求出使系统在时间和批次两个方向性能最优的控制器参数。最后通过旋转控制系统的应用仿真实验表明了所提出算法的有效性。

#### 参考文献(References)

- [1] 谢胜利,田森平,谢振东. 迭代学习控制的理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 208-221.  
(Xie S L, Tian S P, Xie Z D. The theory of iterative learning control and its application[M]. Beijing: Science Press, 2005: 208-221.)
- [2] 李致富,胡跃明,郭琪伟,等. 不确定离散线性系统的鲁棒单调反馈-前馈迭代学习控制[J]. 控制理论与应用, 2014, 31(4): 485-492.  
(Li Z F, Hu Y M, Guo Q W, et al. Robust monotonically convergent feedback-forward iterative learning control for uncertain linear discrete systems[J]. Control Theory & Applications, 2014, 31(4): 485-492.)
- [3] Guan W, Zhu Q, Wang X D, et al. Iterative learning control of linear continuous systems with variable initial states based on 2-D system theory[C]. Proc of the 33rd Chinese Control Conf. Nanjing: IEEE Press, 2014: 8812-8815.
- [4] Hladowski L, Galkowski K, Cai Z L, et al. Experimentally supported 2D systems based iterative learning control law design for error convergence and performance[J]. Control Engineering Practice, 2010, 18(4): 339-348.
- [5] Shi J, Gao F R. Integrated design and structure analysis of robust iterative learning control system based on a two-dimensional model[J]. Industrial and Engineering Chemistry Research, 2005, 44(21): 8095-8105.
- [6] Shi J, Gao F R, Wu T J. Robust iterative learning control design for batch processes with uncertain perturbations and initialization[J]. AIChE J, 2006, 52(6): 2171-2187.
- [7] Wang Y Q, Shi J, Zhou D H, et al. Iterative learning fault-tolerant control for batch processes[J]. Industrial and Engineering Chemistry Research, 2006, 45(26): 9050-9060.
- [8] Wang L M, Mo S Y, Zhou D H, et al. Robust delay dependent iterative learning fault-tolerant control for batch processes with state delay and actuator failures[J]. J of Process Control, 2012, 22(7): 1273-1286.
- [9] Yu L. An LMI approach to reliable guaranteed cost control of discrete-time systems with actuator failure[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 162(3): 1325-1331.
- [10] Du C L, Xie L H, Zhang C S.  $H_\infty$  control and robust stabilization of two-dimensional systems in Roesser models[J]. Automatica, 2001, 37(2): 205-211.
- [11] Xie L H. Output feedback  $H_\infty$  control of systems with parameter uncertainty[J]. Int J of Control, 1996, 63(4): 741-750.
- [12] Gahinet P, Nemirovskii A, Laub A J, et al. The LMI control toolbox[C]. Proc of the 33rd Conf on Decision and Control. Florida: IEEE Press, 1994: 2038-2041.
- [13] She J H, Fang M X, Ohyama Y, et al. Improving disturbance-rejection performance based on an equivalent-input-disturbance approach[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2008, 55(1): 380-389.
- [14] Zhou L, She J H, Wu M, et al. Design of robust modified repetitive-control system for linear periodic plants[J]. J of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2012, 134(1): 1-7.

(责任编辑: 滕蓉)