

多项式非线性系统的并行分布辨识

王建宏, 熊朝华, 许 莺, 徐 欣

(中国电子科技集团公司第二十八研究所 信息系统工程重点实验室, 南京 210007)

摘要: 在状态空间方程中引入输入和状态的多项式函数, 以此多项式函数表示非线性因素. 为了辨识多项式非线性系统中的各系统矩阵, 对于矢量化各系统矩阵组成的未知参数矢量, 分别在无约束和有约束条件下采用两并行分布算法求解. 在以状态方程等式为约束条件时, 将各状态瞬时时刻值与由系统矩阵组成的未知参数矢量合并为一个新的优化矢量. 对于优化矢量的辨识, 给出了并行分布算法的求解过程和迭代式. 最后, 通过仿真算例验证了所提出方法的有效性.

关键词: 系统辨识; 多项式非线性系统; 状态空间模型; 并行分布算法

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Parallel distributed identification of polynomial nonlinear systems

WANG Jian-hong, XIONG Zhao-hua, XU Ying, XU Xin

(Science and Technology on Information Systems Engineering Laboratory, The 28th Research Institute of China Electronics Technology Group Corporation, Nanjing 210007, China. Correspondent: WANG Jian-hong, E-mail: wangjianhong3624@163.com)

Abstract: Polynomial functions about inputs or states are added in the state space model, and the polynomial functions are used to denote the nonlinear factors. To identify every system matrix in the polynomial nonlinear state space model, each system matrix is vectorized as an unknown parameter vector, and two parallel distribution algorithms are applied in unconstrained or constrained conditions respectively. When some state equation equalities are deemed as the constrained conditions, the new optimization variables include the state instants and the unknown parameter vector which is consisted by all system matrices. These optimization variables are identified by using the parallel distribution algorithm, and the whole process about the parallel distribution algorithm are given explicitly. Finally, the simulation example is used to illustrate the effectiveness of the proposed parallel distribution algorithm.

Keywords: system identification; polynomial nonlinear system; state space model; parallel distribution algorithm

0 引言

系统辨识按照对象特征可分为线性系统和非线性系统辨识. 由于线性系统辨识的输入-输出观测数据间存在线性关系, 可简化整个辨识过程. 但线性关系是一种理想化形式, 自然界和工程界存在的任何系统和现象都呈现出非线性形式, 其行为特征可用线性形式来近似表示, 而这种线性近似仅仅在某给定的输入范围内才成立. 为了将线性系统的若干辨识方法、渐近性分析和最优输入设计等成熟过程应用于非线性系统辨识中, 近几年人们已展开对非线性系统辨识的研究.

目前, 线性系统辨识理论已日趋成熟. 文献[1]从

时域角度分析了线性系统的辨识统计方法以及渐近性、收敛性的问题; 文献[2]从频域角度分析了线性系统的辨识方法, 指出了怎样避免作傅里叶变换而产生的混叠效应; 文献[3]从算法运行速度和计算复杂度的角度阐述了通过相互迭代来更新下一时刻的参数估计值. 目前, 还没有一种通用的辨识方法可适用于任何形式的非线性系统, 仅仅是针对某些特殊的非线性系统展开研究. 文献[4]研究了线性参数变化系统的辅助变量辨识; 文献[5]研究了切换线性回归系统的范数规范和辨识; 文献[6]研究了双线性块形式下非线性系统的状态空间辨识; 文献[7]提出了Wiener系统的频率加权极大似然辨识法; 文献[8]提

收稿日期: 2015-03-10; **修回日期:** 2015-07-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61402426).

作者简介: 王建宏(1980—), 男, 副教授, 博士后, 从事系统辨识与优化等研究; 熊朝华(1965—), 男, 研究员, 博士, 从事雷达信息融合等研究.

出了 Hammerstein 系统的实时鲁棒集员估计法. 对非线性系统的辨识还存在很大的研究空间, 迫切需要对问题的深入研究. 文献[9]提出了在状态空间方程中分别引入关于输入和状态的多项式函数, 以此多项式函数来表示非线性因素的存在; 文献[10]针对此多项式状态空间模型中的各个矩阵, 提出了内点迭代算法, 并设计了各初始估计值的合适选取.

对于多项式非线性状态空间模型中各个系统矩阵的辨识问题, 矢量化各系统矩阵组成的未知参数矢量, 分别在考虑无约束和有约束条件下采用两个并行分布算法来求解. 在考虑某些以状态方程为主的等式作为约束条件时, 应将各个状态瞬时值与由系统矩阵组成的未知参数矢量合并成为一个新的优化参数矢量. 采用并行分布算法的优越性在于可将超大规模的优化问题逐渐退化成为较小阶次下的优化问题, 可大大减小运算的存储度, 加快迭代算法的运行速度.

1 多项式非线性系统描述

设 n_u 和 n_y 分别表示输入和输出信号的维数, 离散时间下非线性状态空间模型的一般形式为

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t)), \\ y(t) = g(x(t), u(t)). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $u(t) \in R^{n_u}$ 表示输入信号, $y(t) \in R^{n_y}$ 表示输出信号, $t = 1, 2, \dots, N$ 表示离散时刻, N 表示离散时刻总个数, $x(t) \in R^n$ 表示状态, n 表示模型阶数, f 和 g 表示两非线性函数.

当选用一族多项式基函数时, 可得到多项式非线性状态空间模型为

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + E\xi(x(t), u(t)), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + F\eta(x(t), u(t)). \end{cases} \quad (2)$$

其中: 多项式非线性状态空间模型增加了两个非线性项 $E\xi$ 和 $F\eta$; 状态方程中线性项 $x(t)$ 和 $u(t)$ 的系数矩阵分别为 $A \in R^{n \times n}$ 和 $B \in R^{n \times n_u}$; 输出方程中线性项 $x(t)$ 和 $u(t)$ 的系数矩阵分别为 $C \in R^{n_y \times n}$ 和 $D \in R^{n_y \times n_u}$; 矢量 $\xi(t) \in R^{n_\xi}$ 和 $\eta(t) \in R^{n_\eta}$ 包含 $x(t)$ 和 $u(t)$ 从 2 阶到 d 阶的非线性函数项; 非线性函数项对应的系数矩阵分别为 $E \in R^{n \times n_\xi}$ 和 $F \in R^{n_y \times n_\eta}$. 两个非线性函数项可选择为 $x(t)$ 和 $u(t)$ 的组合形式, 即

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} u_1^{\beta_1} u_2^{\beta_2} \cdots u_{n_u}^{\beta_{n_u}}. \quad (3)$$

其中: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_u}$ 分别表示对应状态和输入分量元素的阶次, 在非线性自由度 d 下满足

$$2 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^{n_u} \beta_j \leq d.$$

由式(2)可以看出, 在线性状态空间的 n 个方程和 n_y 个输出方程上添加式(3)中的多项式项即可转换成式

(2)的多项式非线性状态空间模型.

辨识多项式非线性状态空间模型是利用观测输入-输出数据来辨识式(2)的各系统矩阵 (A, B, E, C, D, F). 将此 6 个系统矩阵作矢量化运算后, 构成一个包含所有系统参数元素的矢量 $\theta \in R^{n_\theta}$, 有

$$\theta^T = \text{vec}[A, B, E, C, D, F]. \quad (4)$$

2 多项式非线性系统的适用性

为了强调式(2)的适用性, 下面给出非线性反馈系统与多项式非线性系统间的转化过程, 以说明两者间的等价性. 非线性反馈系统的结构如图 1 所示.

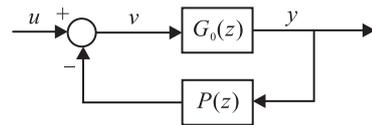


图 1 非线性反馈系统结构框图

图 1 中: $G_0(z)$ 表示线性系统对象, 反馈控制器 $P(z)$ 为非线性形式. 线性系统 $G_0(z)$ 的内部可结构描述为

$$\begin{cases} x_0(t+1) = A_0x_0(t) + B_0v(t), \\ y(t) = C_0x_0(t) + D_0v(t). \end{cases} \quad (5)$$

其中 $G_0(z)$ 的输入信号为

$$v(t) = u(t) - P(y(t)) = u(t) - \sum_{i=1}^r P_i y^i(t). \quad (6)$$

将式(6)代入(5), 可得

$$\begin{cases} x_0(t+1) = A_0x_0(t) + B_0(u(t) - \sum_{i=1}^r P_i y^i(t)), \\ y(t) = C_0x_0(t) + D_0(u(t) - \sum_{i=1}^r P_i y^i(t)). \end{cases} \quad (7)$$

假设当 $D_0 = 0$ 时, 式(7)可简化为

$$\begin{cases} x_0(t+1) = A_0x_0(t) + B_0(u(t) - \sum_{i=1}^r P_i y^i(t)), \\ y(t) = C_0x_0(t). \end{cases} \quad (8)$$

定义矩阵

$$\begin{aligned} A &= A_0 - P_1 B_0 C_0, \quad B = B_0, \quad C = C_0, \quad D = F = 0, \\ E &= -B_0 [P_2 C_0^2, P_3 C_0^3, \dots, P_r C_0^r]^T, \\ \xi &= [x_0^2(t), x_0^3(t), \dots, x_0^r(t)]^T, \quad \eta(t) = 0. \end{aligned}$$

利用定义的矩阵可将式(8)转化成式(2)所示的多项式非线性系统.

3 多项式非线性系统的并行分布辨识

采集整个非线性系统的输出观测数据为

$$y_m = [y_m(1) \quad y_m(2) \quad \cdots \quad y_m(N)]^T,$$

参数化的模型输出为

$$y(\theta) = [(1, \theta) \quad y(2, \theta) \quad \cdots \quad y(N, \theta)]^T,$$

其中 N 表示采样时刻总个数.

命题 1 未知参数矢量 θ 可通过求解最小二乘代价函数 $V(\theta)$ 来获取, 即

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} V(\theta) = \sum_{t=1}^N \varepsilon^T(t, \theta) \varepsilon(t, \theta) = \varepsilon^T(\theta) \varepsilon(\theta),$$

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t, \theta) - y_m(t), \quad \varepsilon(\theta) = y(\theta) - y_m, \quad (9)$$

其中 $\varepsilon(t, \theta) \in R^{n_y}$ 为模型误差. 对式 (9) 中未知参数矢量 θ 的求解可采用如下迭代算法:

$$\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + \Delta\theta^{(i)}. \quad (10)$$

其中: $\theta^{(i+1)}$ 表示第 $i+1$ 次迭代值, $\theta^{(i)}$ 表示第 i 次迭代值, $\Delta\theta^{(i)}$ 表示修正项. 为了避免海赛矩阵的计算, 通常仅采用梯度矩阵来表示, 即

$$\begin{cases} (J^{(i)T} J^{(i)}) \Delta\theta^{(i)} = -J^{(i)T} \varepsilon^{(i)}, \\ J^{(i)} = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right|_{\theta^{(i)}}. \end{cases} \quad (11)$$

由式 (11) 可得修正项为

$$\Delta\theta^{(i)} = -(J^{(i)T} J^{(i)})^{-1} J^{(i)T} \varepsilon^{(i)}, \quad (12)$$

并且可知模型误差的梯度矩阵是不可避免的, 由式 (9) 中模型误差的定义可得

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} = \frac{\partial y}{\partial \theta}.$$

由多项式非线性系统的输出方程和未知参数矢量 θ 的元素可得

$$\begin{aligned} J_A &= \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial A} = \left(C + F \frac{\partial \eta(t)}{\partial x(t)} \right) \frac{\partial x(t)}{\partial A}, \\ J_B &= \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial B} = \left(C + F \frac{\partial \eta(t)}{\partial x(t)} \right) \frac{\partial x(t)}{\partial B}, \\ J_C &= \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial C} = x(t), \quad J_D = \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial D} = u(t), \\ J_E &= \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial E} = \left(C + F \frac{\partial \eta(t)}{\partial x(t)} \right) \frac{\partial x(t)}{\partial E}, \\ J_F &= \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial F} = \eta(t). \end{aligned} \quad (13)$$

其中非线性函数 $\eta(t)$ 关于 $x(t)$ 的导数为

$$\frac{\partial \eta(t)}{\partial x(t)} = \left[\frac{\partial \eta(t)}{\partial x_1(t)}, \frac{\partial \eta(t)}{\partial x_2(t)}, \dots, \frac{\partial \eta(t)}{\partial x_n(t)} \right]^T.$$

由多项式非线性系统的状态方程可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t+1)}{\partial A} &= x(t) + \left(A + E \frac{\partial \xi(t)}{\partial x(t)} \right) \frac{\partial x(t)}{\partial A}, \\ \frac{\partial x(t+1)}{\partial B} &= u(t) + \left(A + E \frac{\partial \xi(t)}{\partial x(t)} \right) \frac{\partial x(t)}{\partial B}, \\ \frac{\partial x(t+1)}{\partial E} &= \xi(t) + \left(A + E \frac{\partial \xi(t)}{\partial x(t)} \right) \frac{\partial x(t)}{\partial E}. \end{aligned} \quad (14)$$

其中非线性函数 $\xi(t)$ 关于 $x(t)$ 的导数为

$$\frac{\partial \xi(t)}{\partial x(t)} = \left[\frac{\partial \xi(t)}{\partial x_1(t)}, \frac{\partial \xi(t)}{\partial x_2(t)}, \dots, \frac{\partial \xi(t)}{\partial x_n(t)} \right]^T.$$

联合式 (13) 和 (14) 可得到修正项 $\Delta\theta^{(i)}$ 中的梯度矩阵. 为了减小式 (12) 的计算复杂度, 采用并行分布算法来辨识未知参数矢量 θ .

3.1 无约束并行分布算法

将式 (9) 改写成

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^N f_i(\theta) = \sum_{i=1}^N \varepsilon^T(i, \theta) \varepsilon(i, \theta). \quad (15)$$

将未知参数矢量 θ 选择范围 R^{n_θ} 限制在一系列的有界多面体子集中, 即 $\theta \in P_i, i = 1, 2, \dots, n_\theta$.

命题 2 将式 (15) 转化成对应的等价可分离问题, 即

$$\begin{aligned} \min_{\theta_i} \sum_{i=1}^N f_i(\theta_i); \\ \text{s.t. } \theta_i = \theta, \theta_i \in P_i, i = 1, 2, \dots, n_\theta. \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\theta_i \in P_i (i = 1, 2, \dots, n_\theta)$ 为额外添加的虚拟变量. 对式 (16) 应用拉格朗日乘子法的递推关系式, 有

$$P_i(t+1) = P_i(t) + c(t)(\theta(t+1) - \theta_i(t+1)), \quad (17)$$

其中: $c(t)$ 为一个正数序列, 应满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \inf c(t) > 0$; $\theta(t+1)$ 和 $\theta_i(t+1)$ 由如下优化问题求解得到:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^N \left\{ f_i(\theta_i) + p_i(t)(\theta - \theta_i) + \frac{c(t)}{2} \|\theta - \theta_i\|_2^2 \right\}; \\ \text{s.t. } \theta_i \in P_i, i = 1, 2, \dots, n_\theta. \end{aligned} \quad (18)$$

利用迭代式对扩展拉格朗日函数关于优化变量 θ 求最小化, 可得

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^N \theta_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i(t)}{Nc(t)}. \quad (19)$$

关于 θ_i 最小化扩展拉格朗日函数, 可得到迭代式为

$$\begin{aligned} \theta_i = \arg \min_{\theta_i \in P_i} \left\{ f_i(\theta_i) + p_i(t)(\theta - \theta_i) + \frac{c(t)}{2} \|\theta - \theta_i\|_2^2 \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

对式 (20) 作重复迭代运算, 直至收敛于扩展拉格朗日函数的最小值.

3.2 约束并行分布算法

将式 (1) 中的非线性关系式引入至式 (15) 的最小化问题中, 得到一簇等式约束条件为

$$\begin{aligned} \underbrace{x(t+1) = f(x(t), u(t))}_{\downarrow} \\ \begin{cases} x(1) = f(x(0), u(0)), \\ x(2) = f(x(1), u(1)), \\ \vdots \\ x(0) = x(N) = f(x(N-1), u(N-1)). \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

命题 3 将 N 个状态瞬时刻值与未知参数矢量式 (4) 合并为一个新的未知参数矢量 v , 即

$$v = [x(0), x(1), \dots, x(N-1), \theta]^T. \quad (22)$$

将式 (15) 的代价函数和式 (2) 的约束条件联合,

组成一个约束优化问题,即

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \arg \min_v V(v) = \sum_{i=1}^N f_i(v), \\ \text{s.t. } & F(v) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

其中约束条件为

$$F(v) = \begin{bmatrix} f(x(0), u(0)) - x(1) \\ f(x(1), u(1)) - x(2) \\ \vdots \\ f(x(N-1), u(N-1)) - x(0) \end{bmatrix} = 0.$$

将约束条件中的第 1 个等式作泰勒级数展开,可得

$$\begin{aligned} f(x(0), u(0)) - x(1) &= \\ f(u(0)) + f_x(u(0))x(0) + & \\ f_{\theta_0}(u(0))(\theta - \theta_0) - x(1) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

其中: f_x 和 f_{θ_0} 分别表示非线性函数 f 关于 x 和 θ_0 的偏导运算; θ_0 为人为选择的某初始时刻的迭代初值. 将式 (24) 改写为

$$\begin{aligned} [f_x(u(0)) \quad f_{\theta_0}(u(0))] \begin{bmatrix} x(0) \\ \theta \end{bmatrix} - x(1) &= \\ -f(u(0)) + f_{\theta_0}(u(0))\theta_0. & \end{aligned} \quad (25)$$

继续整理可得

$$\begin{aligned} [f_x(u(0)) \quad -1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad f_{\theta_0}(u(0))] \cdot \\ [x(0) \quad x(1) \quad \cdots \quad x(N-1) \quad \theta]^T = \\ -f(u(0)) + f_{\theta_0}(u(0))\theta_0. \end{aligned} \quad (26)$$

将约束条件的第 2 个等式改写成

$$\begin{aligned} [0 \quad f_x(u(1)) \quad -1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad f_{\theta_0}(u(1))] \cdot \\ [x(0) \quad x(1) \quad \cdots \quad x(N-1) \quad \theta]^T = \\ -f(u(1)) + f_{\theta_0}(u(1))\theta_0. \end{aligned} \quad (27)$$

根据规律将约束条件 N 个等式的泰勒级数展开式合并成为

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_x(0) & -1 & 0 & \cdots & 0 & f_{\theta_0}(0) \\ 0 & f_x(1) & -1 & \cdots & 0 & f_{\theta_0}(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & f_x(N-1) & f_{\theta_0}(N-1) \end{bmatrix}}_e \times \underbrace{\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \\ \theta \end{bmatrix}}_v =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -f(0) + f_{\theta_0}(0)\theta_0 \\ -f(1) + f_{\theta_0}(1)\theta_0 \\ \vdots \\ -f(N-1) + f_{\theta_0}(N-1)\theta_0 \end{bmatrix}}_s. \quad (28)$$

将式 (28) 简记为

$$e v = s \text{ or } e_j v = s_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (29)$$

命题 4 原约束优化问题式 (23) 可写为

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \arg \min_v V(v) = \sum_{i=1}^N f_i(v); \\ \text{s.t. } & e_j v = s_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad v \in P. \end{aligned} \quad (30)$$

将式 (30) 中 j 的取值改为 $j = 1, 2, \dots, N$, 可得

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \arg \min_v V(v) = \sum_{i=1}^N f_i(v). \\ \text{s.t. } & e_j v = s_j, \quad j = 1, 2, \dots, N; \\ & v_i \in P_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (31)$$

设 e_{ji} 表示 e_j 中对应于 v_j 元素的子矢量, 对于任意给定的 j , 设 $I(J)$ 表示出现在第 j 个等式 $e_j v = s_j$ 中对应于子矢量 v_j 的指标集, 则有

$$I(J) = \{i | e_{ji} \neq 0\}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

命题 5 引入新额外变量 z_{ji} , $j \in I(J)$, 将式 (31) 变换为

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \arg \min_v V(v) = \sum_{i=1}^N f_i(v_i). \\ \text{s.t. } & e_j v = z_{ji}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad i \in I(J); \\ & v_i \in P_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ & \sum_{i \in I(J)} z_{ji} = s_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (32)$$

对于每一个 $j = 1, 2, \dots, N$, 考虑等式约束 $e_j v = z_{ji} (i \in I(J))$ 的拉格朗日乘子 p_{ji} , 该乘子的递推更新式为

$$\begin{aligned} p_{ji}(t+1) &= p_{ji}(t) + c(t)(e_{ji}v_i(t+1) - z_{ji}(t+1)), \\ & j = 1, 2, \dots, N, \quad i \in I(J). \end{aligned} \quad (33)$$

递推值 $v_i(t+1)$ 和 $z_{ji}(t+1)$ 应通过如下最小化扩展拉格朗日函数得到:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N f_i(v_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in I(J)} p_{ji}(e_{ji}v_i - z_{ji}) + \\ & \frac{c(t)}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in I(J)} (e_{ji}v_i - z_{ji})^2. \\ \text{s.t. } & \sum_{i \in I(J)} z_{ji} = s_j, \quad j = 1, 2, \dots, N; \\ & v_i \in P_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

矢量 v_i 和 z_{ji} 取最小化运算时的迭代式为

$$v_i = \arg \min_{\zeta_i \in P_i} \left\{ f_i(\zeta_i) + \sum_{i \in I(J)} \left\{ p_{ji}(t) e_{ji} \zeta_i + \frac{c(t)}{2} (e_{ji} \zeta_i - z_{ji}) \right\} \right\},$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\{z_{ji} | i \in I(J)\} =$$

$$\arg \min_{\substack{\zeta_{ji} | i \in I(J), \\ \sum_{i \in I(J)} \zeta_{ji} = s_j}} \left\{ - \sum_{i \in I(J)} p_{ji}(t) \zeta_{ji} + \frac{c(t)}{2} \sum_{i \in I(J)} (e_{ji} \zeta_i - \zeta_{ji}) \right\},$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, N. \quad (34)$$

定理 1 关于 $\{\zeta_{ji} | i \in I(J)\}$ 取最小化运算过程中含有可分离的二次代价和等式约束, 最小值为

$$\zeta_{ji} = e_{ji} v_i + \frac{p_{ji}(t) - \lambda_j}{c(t)},$$

$$j = 1, 2, \dots, N, i \in I(J), \quad (35)$$

其中 λ_j 的选取需满足

$$\sum_{i \in I(J)} \zeta_{ji} = s_j,$$

等价于

$$\lambda_j = \frac{1}{m_j} \sum_{i \in I(J)} p_{ji}(t) + \frac{c(t)}{m_j} \sum_{i \in I(J)} (e_{ji} v_i - s_{ji}),$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, N, \quad (36)$$

其中 m_j 为指标集 $I(J)$ 中元素的总个数, 即有

$$m_j = |I(J)|.$$

由式 (35) 可知, 最优值

$$z_{ji}(t+1) = e_{ji} v_i(t+1) + \frac{p_{ji}(t) - \lambda_j(t+1)}{c(t)},$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, N, i \in I(J).$$

通过与式 (33) 相比较可知

$$p_{ji}(t+1) = \lambda_j(t+1),$$

$$j = 1, 2, \dots, N, i \in I(J).$$

利用拉格朗日乘子更新式 (33), 可得

$$\lambda_j(t+1) =$$

$$\lambda_j(t) + \frac{c(t)}{m_j} \left[\sum_{i \in I(J)} (e_{ji} v_i(t+1) - z_{ji}(t+1)) \right], \quad (37)$$

等价于

$$\lambda_j(t+1) = \lambda_j(t) + \frac{c(t)}{m_j} (e_j v - s_j). \quad (38)$$

用 $p_{ji}(t+1)$ 代替 $\lambda_j(t)$, 可得 z_{ji} 的更新式为

$$z_{ji} = e_{ji} v_i + \frac{\lambda_j(t) - \lambda_j}{c(t)}, \quad (39)$$

其中

$$\lambda_j = \lambda_j(t) + \frac{c(t)}{m_j} \sum_{i \in I(J)} (e_{ji} v_i - s_{ji}). \quad (40)$$

联合式 (39) 和 (40) 两方程可得 z_{ji} 的迭代式为

$$z_{ji} = e_{ji} v_i - \frac{1}{m_j} (e_j v - s_j). \quad (41)$$

定理 2 将式 (41) 用于 (34) 中消去 z_{ji} , 可得最小化扩展拉格朗日函数的并行迭代式为

$$v_i = \arg \min_{\zeta_i \in P_i} \left\{ f_i(\zeta_i) + \sum_{i \in I(J)} \left\{ \lambda_j(t) e_{ji} \zeta_i + \frac{c(t)}{2} (e_{ji} (\zeta_i - v_j) + \omega_j)^2 \right\} \right\}, \quad (42)$$

其中

$$\omega_j = \frac{1}{m_j} (e_j v - s_j), j = 1, 2, \dots, N.$$

4 仿真算例

仿真过程采用 3 阶不稳定的非线性系统, 即

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + Bu(t) + \begin{bmatrix} 1.2x_1(t)^2 \\ 0.3x_2(t)^2 \\ -0.1x_3(t)^2 \end{bmatrix},$$

$$y(t) = C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}. \quad (43)$$

其中各个系统矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0.35 & 0 & 0.12 \\ 0.24 & -0.05 & 0.05 \\ 0.13 & 0.28 & -0.02 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.06 \\ 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}, C = [0.3 \quad 0.08 \quad -0.3].$$

将该不稳定系统安置于某闭环反馈结构中, 使反馈项 w 以加性和的形式添加于参考信号 r 中, 有

$$u(t) = r(t) + w(t).$$

此反馈环对于任意的输入信号并不能保证稳定性, 当输入信号选择为均方根 0.2 的伪随机二元序列时, 可保证整个闭环系统的输出信号是有界的. 将 3 个矩阵 A 、 B 和 C 中的所有元素都集中成一个未知参数矢量, 采用并行分布算法来求解此未知参数矢量的结果如图 2 和图 3 所示. 图 2 和图 3 给出了全部 15 个系统参数的估计值, 由此可见随着迭代次数的增加, 系统参数估计值将趋向于各自对应的真实实际值. 在运用并行分布辨识算法相互迭代 80 次运算后, 式 (15) 中的目标函数值的递减曲线如图 4 所示. 由图 4 可知, 在迭代 80 次后, 目标函数值逐渐地趋于零, 算法可终止, 以此时的参数估计值作为最后的确定值.

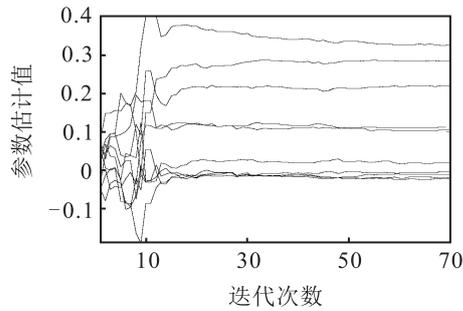


图2 其中10个参数估计值的收敛曲线

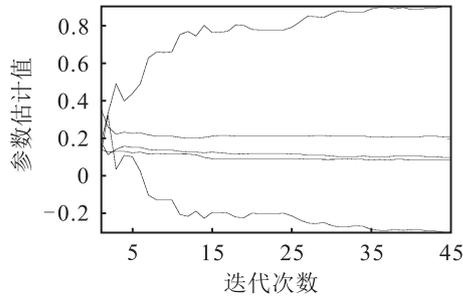


图3 剩余5个参数估计值的收敛曲线

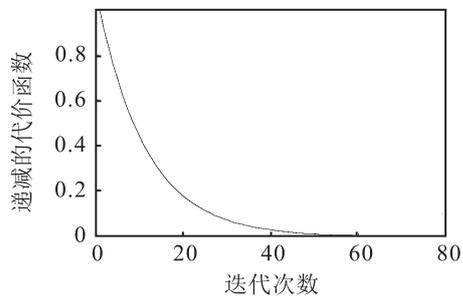


图4 仿真实验中的目标函数值

对于非线性系统(43)中非线性环节3个参数的辨识,应将此3个参数融入 θ 的元素中.同样采用第3节的并行分布辨识算法来批量求解,区别在于此时待辨识未知参数的维数有所增加,但算法的实现过程和步骤是相同的,整个并行分布辨识算法的实验设置、输入信号选择、某些权重因子的设计等都是相似的.3个非线性环节的参数辨识仿真曲线如图5所示.由图5可知,3个非线性参数是随着各个系统矩阵的参数同时辨识出来的,因维数的增加势必会造成某些参数辨识初始阶段的不稳定性,但随着时间和迭代次数的增加,参数最终趋向于稳定的收敛值.

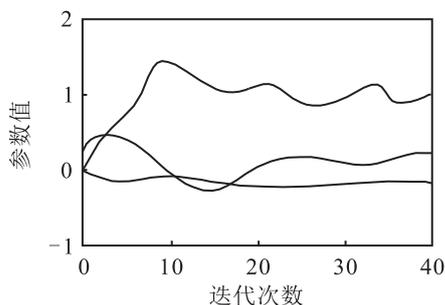


图5 非线性参数估计值的收敛曲线

5 结论

本文针对多项式非线性状态空间系统中系统矩阵的辨识问题,建立了非线性反馈系统与多项式非线性系统间的等价性,构造了最小化模型误差的代价函数来求解未知参数矢量,分别在无约束和有约束条件下给出了并行分布辨识算法的推导过程.由于辨识算法仅是系统辨识理论的一个基本方面,本文未对并行分布算法的复杂性和统计特性作深入研究,而此研究过程将是下一步的研究内容.

参考文献(References)

- [1] Ljung L. System identification: Theory for the user[M]. New Jersey: Prentice Hall Press, 1999: 245-260.
- [2] Pintelon R, Schoukens J. System identification: A frequency domain approach[M]. New York: IEEE Press, 2001: 310-320.
- [3] Boyd S, Vandenberghe L. Convex optimization[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2008: 350-380.
- [4] Er Wei Bai. Kernel based approaches to local nonlinear nonparametric variable selection[J]. Automatica, 2014, 50(1): 100-113.
- [5] Ohlsson H. Identification of switched linear regression models using sum of norms regularization[J]. Automatica, 2013, 49(4): 1045-1050.
- [6] Anne Van Mulders. Identification of systems with localised nonlinearity: From state space to block structured models[J]. Automatica, 2013, 49(5): 1392-1396.
- [7] Pillonetto G. Kernel methods in system identification, machine learning and function estimation: A survey[J]. Automatica, 2014, 50(3): 657-682.
- [8] Paul M J Vanden Hof. Identification of dynamic models in complex networks with prediction error methods[J]. Automatica, 2013, 49(10): 2994-3006.
- [9] Johan Paduart. Identification of nonlinear systems using polynomial nonlinear state space models[J]. Automatica, 2010, 46(4): 647-656.
- [10] Anne Van Mulders. Two nonlinear optimization methods for black box identification compared[J]. Automatica, 2010, 46(10): 1675-1681.
- [11] Melanie Zeilinger. Real time suboptimal model predictive control using a combination of explicit MPC and online optimization[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(7): 1524-1534.
- [12] Christian Feller. An improved algorithm for combinatorial multi-parameteric quadratic programming[J]. Automatica, 2013, 49(5): 1370-1376.