

时变时滞与切换有向通信拓扑协议下 线性多智能体系统一致性的平均驻留时间条件

张亚霄, 陈阳舟

(北京工业大学 城市交通学院, 北京 100124)

摘要: 研究时变时滞与切换有向通信拓扑协议下高阶连续时间线性多智能体系统的一致性问题. 利用一个线性变换将该问题等价转化为一个切换时滞系统的稳定性问题. 假定出现的每一个通信拓扑都是可一致的, 借助时滞切换系统稳定性的平均驻留时间方法, 以线性矩阵不等式(LMIs)形式给出多智能体系统达到全局一致的充分条件. 数值实例验证了结果的正确性.

关键词: 多智能体系统; 一致性; 切换有向通信拓扑; 时变时滞; 平均驻留时间; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13

文献标志码: A

Average dwell-time condition for consensus of linear multi-agent systems with time-varying delay and switching directed communication topologies protocol

ZHANG Ya-xiao, CHEN Yang-zhou

(School of Metropolitan Transportation, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China. Correspondent: CHEN Yang-zhou, E-mail: yzchen@bjut.edu.cn)

Abstract: The consensus problem is investigated for high-order continuous-time linear multi-agent systems with time-varying delay protocol over switching directed communication topologies. By using a linear transformation, the consensus problem is equivalently transformed into the asymptotic stability problem of a corresponding switched delay system. Under the assumption that each of the communication topologies is consensusable, with the help of the scheme of average dwell-time in switched systems, a sufficient condition is presented in terms of linear matrix inequalities(LMIs) to guarantee the consensus of the agents. Simulation result shows the effectiveness of the obtained results.

Keywords: multi-agent system; consensus; switching directed communication topologies; time-varying delay; average dwell-time; LMIs

0 引言

近年来,多智能体系统的协作控制在无人机编队飞行、移动机器人的分布式优化、智能电网调度以及交通网络信号灯协调控制等领域得到了广泛的应用. 一致性问题已成为多智能体系统协作控制的基本问题之一. 一致性问题即设计恰当的协作控制协议使所有智能体的某个状态达到一个共同的值或者相同的动态过程^[1].

多智能体一致性问题研究需要考虑3个要素: 1) 每个智能体的动力学模型描述, 2) 智能体之间通信结构的拓扑表示, 3) 在给定通信拓扑下智能体的协作

控制协议设计. 本文针对带切换通信拓扑和时变时滞控制协议的高阶多智能体系统一致性问题展开研究.

带有切换通信拓扑和通信时滞的高阶多智能体系统一致性研究具有重要的实际意义. 首先, 实际系统中通信链路断开或重连情况通常导致通信拓扑结构发生变化^[2-3]; 其次, 通信过程中有限的传输速度以及信道拥塞等也常常导致通信时滞^[4-5]; 此外, 高阶系统的研究具有广泛的应用范围^[1].

上述问题研究的一个关键点是, 什么样的通信拓扑切换过程能使多智能体系统的状态达到一致性. 文献[5]针对基于无向通信拓扑且带有多时变时滞

收稿日期: 2015-03-21; 修回日期: 2015-06-16.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273006, 6141101096); 高等学校博士学科点专项科研基金项目(20111103110017).

作者简介: 张亚霄(1985-), 女, 博士生, 从事多智能体协作控制、鲁棒控制的研究; 陈阳舟(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 从事多智能体协调控制、智能交通系统控制等研究.

的一阶多智能体系统一致性问题进行了研究,利用 LMIs 方法证明了若切换通信拓扑一直保持连通,则多智能体系统可以达到平均一致;文献[6-7]在具有无向通信拓扑的条件下,分别在通信拓扑 Laplacian 矩阵为可同时对角化和可同时上三角化的条件下,给出了带有常时滞的多智能体系统的一致性(或同步)判据;文献[8]给出了在无向通信拓扑切换具有平均驻留时间条件下,带有时变时滞的高阶多智能体系统一致性(同步)的充分条件;文献[9]基于有向通信拓扑研究了带有多时变时滞的高阶多智能体一致性问题,以 LMIs 的形式给出了多智能体一致性的充分条件,即若通信拓扑在切换过程中一直保持为强连通平衡图,则多智能体系统最终可以达到状态一致。

就现有文献而言,针对切换有向通信拓扑且带有时变时滞协议的一致性问题还有待深入研究.文献[10-11]给出了切换有向通信拓扑条件下无时滞多智能体系统一致性的平均驻留时间条件.本文在此基础上,进一步研究带有切换有向通信拓扑和时变时滞协议的高阶多智能体系统一致性问题.首先,利用文献[1]提出的线性变换将该问题等价地转化为切换时滞系统的稳定性问题,利用混杂动态系统稳定性理论研究一致性问题;然后,将文献[8]中通信拓扑为无向图的情况扩展到有向情况;最后,将文献[9]中通信拓扑为强连通平衡图的情况扩展到可一致的条件,在更为一般的通信拓扑条件下得到具有更小保守性的一致性充分条件。

1 问题描述

考虑由 N 个智能体构成的系统,每个智能体由如下 n 阶连续时间线性状态方程描述:

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

其中: i 为智能体编号, $x_i \in \mathbf{R}^n$ 和 $u_i \in \mathbf{R}^m$ 分别为状态变量和控制协议; $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 为参数矩阵。

控制协议 u_i 的构造依赖于智能体 i 与其邻居 j 的相对状态 $(x_j - x_i)$. 此处邻居是指能够向智能体 i 传输信息的智能体. 假设每个智能体的邻居是时变的,用 $N_i(t)$ 表示 t 时刻智能体 i 的邻居集合,集合 $\mathcal{N}(t) =: \{N_i(t), i = 1, 2, \dots, N\}$ 称为多智能体系统(1)的通信拓扑,通信拓扑 $\mathcal{N}(t)$ 也可用一个动态有向图 $\{V, E(t), W(t)\}$ 表示. 其中: 顶点集 $V = \{1, 2, \dots, N\}$ 中的元素为智能体; 时变的边集 $E(t) \subseteq V \times V$ 中的元素为智能体之间的邻居关系 $(j, i) \in E(t) \Leftrightarrow j \in N_i(t)$; $W(t) = [w_{ij}(t)]_{N \times N}$ 为加权邻接矩阵,表示通信连接结构和强度。

假定时变通信拓扑 $\mathcal{N}(t)$ 所有可能出现的拓扑为

$\mathcal{N}^k = \{N_i^k, i = 1, 2, \dots, N\}, k \in \mathfrak{M}$, 即对于任意时刻 t , 有 $\mathcal{N}(t) \in \{\mathcal{N}^k, k \in \mathfrak{M}\}$, 其中 $\mathfrak{M} = \{1, 2, \dots, M\}$. 定义通过切换信号 $\sigma: [0, +\infty) \rightarrow \mathfrak{M}$ 来描述通信拓扑 $\mathcal{N}(t)$ 的切换规律, 即 $\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}^k \Leftrightarrow \sigma(t) = k$. 假定在任意有限时间区间内通信拓扑只有有限次切换. 对于任意给定的切换信号 $\sigma(t)$, 定义切换序列 $\{(t_0, k_0), (t_1, k_1), \dots, (t_r, k_r), \dots \mid k_r \in \mathfrak{M}, r = 0, 1, \dots\}$, 当 $\sigma(t_r) = k_r$, 即 $t \in [t_r, t_{r+1})$ 时, i 的邻居集为 $N_i^{k_r}$, 系统(1)的通信拓扑为 \mathcal{N}^{k_r} .

给定通信拓扑集 $\{\mathcal{N}^k, k \in \mathfrak{M}\}$ 和切换信号 $\sigma(t)$, 构造智能体 i 的带有时变时滞的协议如下:

$$u_i(t) = K_{\sigma(t)} \sum_{j \in N_i^{\sigma(t)}} w_{ij}^{\sigma(t)} (x_j(t - d(t)) - x_i(t - d(t))), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

其中: $K_{\sigma(t)} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 为分段常值增益矩阵, $w_{ij}^{\sigma(t)}$ ($i, j = 1, 2, \dots, N$) 为相应于信息拓扑 $\mathcal{N}^{\sigma(t)}$ 的通信权值. 类似于文献[8], 考虑如下两种情况的时滞 $d(t)$.

假设 1 $d(t)$ 为满足 $0 \leq d(t) \leq \tau$ 和 $|\dot{d}(t)| \leq \delta < 1$ 的可微函数, 其中 τ 和 δ 为已知常数。

假设 2 $d(t)$ 为满足 $0 \leq d(t) \leq \tau$ 的连续函数, 其中 τ 为已知常数。

在协议(2)下系统(1)可以写为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (I_N \otimes A)x(t) - (L_{\sigma(t)} \otimes BK_{\sigma(t)})x(t - d(t)), \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0]. \end{aligned} \quad (3)$$

其中: $x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T]^T \in \mathbf{R}^{Nn}$; I_N 为 N 阶单位矩阵; 符号 \otimes 为矩阵或向量的 Kronecker 积; $\varphi(\theta)$ 为连续可微的初始条件函数; $L_{\sigma(t)} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 为拓扑 $\mathcal{N}(t)$ 的加权 Laplacian 矩阵, 它的元素 $l_{ij}^{\sigma(t)}$ 为

$$l_{ij}^{\sigma(t)} = \begin{cases} \sum_{s=1, s \neq i}^N w_{is}^{\sigma(t)}, & j = i; \\ -w_{ij}^{\sigma(t)}, & j \neq i, j \in N_i; \\ 0, & j \neq i, j \notin N_i. \end{cases}$$

其中 $i, j = 1, 2, \dots, N$.

定义 1 给定通信拓扑集 $\{\mathcal{N}^k, k \in \mathfrak{M}\}$ 和切换信号 $\sigma(t)$, 如果对于任意给定的初始条件 $\varphi(\theta)$, 智能体的状态轨迹满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j$, 则称系统(1)在协议(2)下达到全局渐近状态一致。

定义 2 如果存在形如(2)的协议(其中 $\sigma(t) \equiv k$), 使得多智能体系统(1)在该固定通信拓扑 \mathcal{N}^k 下可以达到全局渐近一致, 则称通信拓扑 \mathcal{N}^k 为可一致的。

例如, 存在有向生成树的通信拓扑是可一致的^[3]. 本文暂时只考虑满足如下假设情况。

假设 3 集合 $\{\mathcal{N}^k, k \in \mathfrak{M}\}$ 中所有通信拓扑都是可一致的。

本文研究的目的是多智能体系统 (1) 中智能体之间的通信拓扑的切换信号 $\sigma(t)$ 满足怎样的条件, 才能通过控制协议 (2) 还能达到状态一致. 由于并非所有的切换信号都能使得系统仍然达到一致, 考虑一类满足平均驻留时间条件的信号 $\sigma(t)$.

定义 3 对于任意时刻 $t_2 > t_1 \geq 0$, 令 $N_\sigma(t_1, t_2)$ 为切换信号 $\sigma(t)$ 在时间间隔 (t_1, t_2) 内的切换次数. 对于给定的 $T_a > 0$ 和 $N_0 \geq 0$, 如果 $N_\sigma(t_1, t_2) \leq N_0 + (t_2 - t_1)/T_a$ 成立, 则 T_a 称为切换信号 $\sigma(t)$ 的平均驻留时间, N_0 为其抖振上界.

令 $S_a[T_a, N_0]$ 为所有满足平均驻留时间条件的 $N_\sigma(t_1, t_2) \leq N_0 + (t_2 - t_1)/T_a$ 的切换信号集合. 下面通过一个线性变换将带有时变时滞的多智能体系统在切换通信拓扑下的一致性等问题等价转化为一个切换时滞系统的稳定性问题. 应用切换时滞系统的稳定性理论推导出多智能体系统 (1) 达到全局渐近状态一致的充分条件.

2 主要结果

对于系统 (3) 采用如下线性变换^[1]:

$$\bar{x} = Sx, S =: \begin{bmatrix} \tilde{S}_0 \\ \mathbf{1}_N^T \end{bmatrix} \otimes I_n. \quad (4)$$

其中: $\mathbf{1}_N$ 表示所有元素均为 1 的 N 维列向量, 上标 T 表示矩阵或向量的转置; \tilde{S}_0 为一个 $(N-1) \times N$ 的矩阵, 即

$$\tilde{S}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

逆矩阵 S^{-1} 可计算如下:

$$S^{-1} =: [\hat{S}_0, N^{-1}\mathbf{1}_N] \otimes I_n, \quad (5)$$

其中 $\hat{S}_0 \in \mathbf{R}^{N \times (N-1)}$ 具有如下形式:

$$\hat{S}_0 = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} N-1 & N-2 & \cdots & 1 \\ -1 & N-2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & \cdots & 1 \\ -1 & -2 & \cdots & -(N-1) \end{bmatrix}.$$

根据线性变换 (4), 系统 (3) 可变为如下线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= S(I_N \otimes A)S^{-1}\bar{x}(t) - \\ &S(L_{\sigma(t)} \otimes BK_{\sigma(t)})S^{-1}\bar{x}(t-d(t)), \\ \bar{x}(\theta) &= \bar{\varphi}(\theta), \theta \in [-\tau, 0], \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\bar{\varphi}(\theta) = S\varphi(\theta)$. 令 $\bar{x} = [y^T, z^T]^T$, $y = [\bar{x}_1^T, \bar{x}_2^T, \dots, \bar{x}_{N-1}^T]^T$, $z = \bar{x}_N$, 将系统 (6) 表示为如下两部分:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \bar{A}y(t) + \bar{B}_{\sigma(t)}y(t-d(t)) + \\ &\bar{C}_{\sigma(t)}z(t) + \bar{D}_{\sigma(t)}z(t-d(t)), \\ \dot{z}(t) &= \bar{E}_{\sigma(t)}y(t) + \bar{F}_{\sigma(t)}y(t-d(t)) + \\ &\bar{G}_{\sigma(t)}z(t) + \bar{H}_{\sigma(t)}z(t-d(t)). \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{A} &= I_{N-1} \otimes A, \bar{B}_{\sigma(t)} = -\tilde{S}_0(L_{\sigma(t)} \otimes BK_{\sigma(t)})\hat{S}_0, \\ \bar{C}_{\sigma(t)} &= \bar{D}_{\sigma(t)} = 0, \bar{E}_{\sigma(t)} = 0, \\ \bar{F}_{\sigma(t)} &= -\mathbf{1}_N^T(L_{\sigma(t)} \otimes BK_{\sigma(t)})\hat{S}_0, \bar{G}_{\sigma(t)} = A, \\ \bar{H}_{\sigma(t)} &= 0. \end{aligned}$$

由于 $\bar{C}_{\sigma(t)} = \bar{D}_{\sigma(t)} = 0$, 系统 (7) 的第一个方程与变量 z 无关, 可以写为

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \bar{A}y(t) + \bar{B}_{\sigma(t)}y(t-d(t)), \\ y(\theta) &= \bar{\varphi}_y(\theta), \theta \in [-\tau, 0], \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\bar{\varphi}_y(\theta) = (\tilde{S}_0 \otimes I_n)\varphi(\theta)$. 由于 $\sigma(t)$ 可以在 \mathfrak{M} 中取 M 个值, 系统 (8) 是由 M 个子系统和切换信号 $\sigma(t)$ 构成的时滞切换系统.

定义 4^[13] 如果存在 $\Delta > 0, c > 0$ 和 $\alpha > 0$, 当初始条件满足 $\|y(\theta)\|_{c1} \leq \Delta$ 时, 系统 (8) 的解满足 $\|y(t)\| \leq c\|y(\theta)\|_{c1}e^{-\alpha t}$, 则称系统 (8) 在切换信号 $\sigma(t)$ 下是指数稳定的, α 称为系统 (8) 的衰减指数. 其中: $\|\cdot\|$ 为 2-范数, $\|y(\theta)\|_{c1} =: \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \|y(\theta)\|$.

类似于定义 4, 可定义切换系统 (8) 的第 $k(k \in \mathfrak{M})$ 个子系统满足 $\|y(t)\|^2 \leq c_k e^{-\alpha_k t} \|y(t_0)\|_{c1}^2$ 的衰减指数 α_k .

类似于文献 [1] 中的引理 2, 可以证明如下引理.

引理 1 给定通信拓扑集 $\{\mathcal{N}^k, k \in \mathfrak{M}\}$ 和切换信号 $\sigma(t)$, 由协议 (2) 可知, 系统 (1) 达到渐近状态一致的充要条件是切换时滞系统 (8) 是指数稳定的.

给定连续函数 $V: [-\tau, +\infty) \times \mathbf{R}^{(N-1)n} \rightarrow \mathbf{R}_+$, 令函数

$$\begin{aligned} \bar{V}(t) &= \max_{\theta \in [-\tau, 0]} V(t+\theta, y(t+\theta)), \\ \dot{V}(t, y(t)) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [V(t+s, y(t+s)) - V(t, y(t))]. \end{aligned}$$

为了表述方便, 采用 $V(t), \dot{V}(t)$ 代替 $V(t, y(t))$ 和 $\dot{V}(t, y(t))$.

引理 2^[14] 若存在一组连续函数 $V_k: [-\tau, +\infty) \times \mathbf{R}^{(N-1)n} \rightarrow \mathbf{R}_+$, $k \in \mathfrak{M}$, 正常数 a, b, α 和 $\mu \geq 1$, 使得对于系统 (8) 的任意解 $y(t)$ 有如下条件成立:

$$V_k(t) \geq a\|y(t)\|^2, \bar{V}_k(t) \leq b\|y(\theta)\|_{c1}^2, \forall k \in \mathfrak{M}; \quad (9)$$

$$\bar{V}_k(t) \leq \bar{V}_k(0)e^{-\alpha(t-\tau)}, \forall k \in \mathfrak{M}; \quad (10)$$

$$V_k(t) \leq \mu V_l(t), k, l \in \mathfrak{M}. \quad (11)$$

则对于平均驻留时间 T_a 满足

$$T_a > T_a^* = \frac{\ln \mu + \alpha \tau}{\alpha} \quad (12)$$

的任意切换信号 $\sigma(t) \in S_a[T_a, N_0]$, 切换时滞系统是全局指数稳定的.

定理 1 设时滞 $d(t)$ 满足假设 1, 通信拓扑 $\{\mathcal{N}^k, k \in \mathfrak{M}\}$ 满足假设 3, $\alpha = \min_{k \in \mathfrak{M}} \alpha_k$, 其中 α_k 为系统 (8) 的子系统 k 的衰减指数. 如果存在 $n(N-1) \times n(N-1)$ 维矩阵 $P_k = P_k^T > 0, Q_k = Q_k^T > 0, R_k = R_k^T > 0, Y_{ik} (i = 1, 2, 3), Z_{ik} (i = 1, 2)$, 恰当维数的矩阵

$$X_k = \begin{bmatrix} X_{11k} & X_{12k} & X_{13k} \\ * & X_{22k} & X_{23k} \\ * & * & X_{33k} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (13)$$

和满足

$$P_k \leq \mu P_l, Q_k \leq \mu Q_l, R_k \leq \mu R_l, k, l \in \mathfrak{M} \quad (14)$$

的常数 $\mu \geq 1$, 使得如下两个不等式成立:

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \phi_{11k} & \phi_{12k} & \phi_{13k} \\ * & \phi_{22k} & \phi_{23k} \\ * & * & \phi_{33k} \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} X_{11k} & X_{12k} & X_{13k} & Y_{1k} \\ * & X_{22k} & X_{23k} & Y_{2k} \\ * & * & X_{33k} & Y_{3k} \\ * & * & * & e^{-\alpha \tau} R_k \end{bmatrix} \geq 0. \quad (16)$$

其中

$$\phi_{11k} = P_k \bar{A} + \bar{A}^T P_k + \alpha P_k + Q_k + Y_{1k} +$$

$$Y_{1k}^T - \bar{A}^T Z_{1k}^T - Z_{1k} \bar{A} + \tau X_{11k},$$

$$\phi_{12k} = Z_{1k} - \bar{A}^T Z_{2k}^T + Y_{2k}^T + \tau X_{12k},$$

$$\phi_{13k} = P_k \bar{B}_k - Z_{1k} \bar{B}_k - Y_{1k} + Y_{3k}^T + \tau X_{13k},$$

$$\phi_{22k} = \tau R_k + Z_{2k} + Z_{2k}^T + \tau X_{22k},$$

$$\phi_{23k} = -Z_{2k} \bar{B}_k - Y_{2k} + \tau X_{23k},$$

$$\phi_{33k} = -(1 - \delta) e^{-\alpha \tau} Q_k - Y_{3k} - Y_{3k}^T + \tau X_{33k}.$$

则对于满足平均驻留时间条件 (12) 的任意切换信号 $\sigma(t) \in S_a[T_a, N_0]$, 当通信拓扑在 $\{\mathcal{N}^k, k \in \mathfrak{M}\}$ 之间按照 $\sigma(t)$ 切换时, 通过带有时变时滞的控制协议 (2), 多智能体系统 (1) 达到渐近状态一致.

证明 由引理 1 可知, 仅需证明切换时滞系统 (8) 是渐近稳定的. 选取如下分段 Lyapunov 候选函数:

$$V(t, y_t) = V_{\sigma(t)}(t, y_t) = y^T(t) P_{\sigma(t)} y(t) + \int_{t-d(t)}^t e^{\alpha(s-t)} y^T(s) Q_{\sigma(t)} y(s) ds + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{y}^T(s) R_{\sigma(t)} \dot{y}(s) ds d\theta. \quad (17)$$

首先, 令

$$a = \min_{k \in \mathfrak{M}} \lambda_{\min}(P_k),$$

$$b = \max_{k \in \mathfrak{M}} \lambda_{\max}(P_k) + \tau \max_{k \in \mathfrak{M}} \lambda_{\max}(Q_k) +$$

$$\frac{\tau^2}{2} \max_{k \in \mathfrak{M}} \lambda_{\max}(R_k),$$

其中 $\lambda_{\min}(\cdot)$ ($\lambda_{\max}(\cdot)$) 为矩阵“.”的最小(最大)特征值. 于是有

$$V(t) \geq a \|y(t)\|^2, \bar{V}(t) \leq b \|y(t_0)\|_{c1}^2. \quad (18)$$

切换信号 $\sigma(t)$ 在每一段时间间隔 $[t_r, t_{r+1})$ 上都是常值, 当 $t \in [t_r, t_{r+1})$ 时, 令 $\sigma(t) = k$, 由 Newton-Leibniz 公式可知, 对于带有恰当维数的任意矩阵 $Y_{ik} (i = 1, 2, 3)$ 和 $Z_{ik} (i = 1, 2)$, 有

$$2[y^T(t) Y_{1k} + \dot{y}^T(t) Y_{2k} + y^T(t-d(t)) Y_{3k}] \times \left[y(t) - y(t-d(t)) - \int_{t-d(t)}^t \dot{y}(s) ds \right] = 0, \quad (19)$$

$$2[y^T(t) Z_{1k} + \dot{y}^T(t) Z_{2k}] \times [\dot{y}(t) - \bar{A}_k y(t) - \bar{B}_k y(t-d(t))] = 0. \quad (20)$$

另外, 对于带有恰当维数的任意矩阵 $X_k = X_k^T \geq 0$, 有

$$\tau \zeta_1^T(t) X_k \zeta_1(t) - \int_{t-d(t)}^t \zeta_1^T(s) X_k \zeta_1(s) ds \geq 0, \quad (21)$$

其中 $\zeta_1(t) = [y^T(t), \dot{y}^T(t), y^T(t-d(t))]^T$.

结合式 (19) ~ (21), 对于 $\forall t \in [t_r, t_{r+1})$, 有

$$\dot{V}(t) + \alpha V(t) \leq \zeta_1^T(t) \Phi_k \zeta_1(t) - \int_{t-d(t)}^t \zeta_2^T(t, s) \Theta_k \zeta_2(t, s) ds, \quad (22)$$

其中 $\zeta_2(t) = [\zeta_1^T(t), \dot{y}^T(s)]^T$. 因此, 由式 (15) 和 (16) 可得

$$\dot{V}(t) + \alpha V(t) \leq 0.$$

于是得到

$$\bar{V}(t) \leq V(t) e^{\alpha \tau}, V(t) \leq \bar{V}(t_0) e^{-\alpha(t-t_0)},$$

即

$$\bar{V}(t) \leq \bar{V}(t_0) e^{-\alpha(t-\tau-t_0)}. \quad (23)$$

由式 (14) 和 (17) 可得

$$V_k(t) \leq \mu V_l(t), k, l \in \mathfrak{M}. \quad (24)$$

式 (18)、(23) 和 (24) 分别对应于引理 2 中的式 (9) ~ (11). 由引理 2 可知, 对于满足平均驻留时间条件 (12) 的任意切换信号 $\sigma(t) \in S_a[T_a, N_0]$, 线性切换时滞系统 (8) 是指数稳定的. 再由引理 1 可知, 对于满足平均驻留时间条件 (12) 的任意切换信号 $\sigma(t) \in S_a[T_a, N_0]$, 通过控制协议 (2), 多智能体系统 (1) 达到全局渐近状态一致. \square

定理 1 的验证过程如下.

Step 1: 通过线性变换 (4) 将多智能体系统 (3) 等价转化为相应的切换时滞系统 (8);

Step 2: 计算系统 (8) 的每个子系统 $k, k \in \mathfrak{M}$ 的衰减指数 α_k , 令 $\alpha = \min_{k \in \mathfrak{M}} \alpha_k$;

Step 3: 将 α 代入 LMIs 式 (15)、(16), 得出矩阵 $P_k, Q_k, R_k, k \in \mathfrak{M}$ 的值, 解出满足不等式 (14) 的 μ ;

Step 4: 将 α, μ 以及时滞上界 τ 代入式 (12), 得出平均驻留时间的下界值 T_a^* .

如果时滞 $d(t)$ 微分无上界, 重复定理 1 的证明过程, 只需在选取的 Lyapunov 函数 $V(t, y_t)$ 中让 $Q_k = 0$, 则可得到如下定理.

定理 2 设时滞 $d(t)$ 满足假设 2, 通信拓扑 $\{\mathcal{N}^k, k \in \mathfrak{M}\}$ 满足假设 3, $\alpha = \min_{k \in \mathfrak{M}} \alpha_k$, 其中 α_k 为系统 (8) 的子系统 k 的衰减指数. 如果存在 $n(N-1) \times n(N-1)$ 维的矩阵 $P_k = P_k^T > 0, Q_k = 0, R_k = R_k^T > 0, Y_{ik}(i = 1, 2, 3), Z_{ik}(i = 1, 2)$, 式 (13) 中满足恰当维数的矩阵 X_k 和满足 (14) 的常数 $\mu \geq 1$, 且不等式 (15) 和 (16) 成立, 则对于满足平均驻留时间条件 (12) 的任意切换信号 $\sigma(t) \in S_a[T_a, N_0]$, 当拓扑在 $\{\mathcal{N}^k, k \in \mathfrak{M}\}$ 之间切换时, 通过带有时变时滞的控制协议 (2), 多智能体系统 (1) 达到渐近状态一致.

3 仿真实验

考虑文献 [8] 的例 1, 得到每个智能体的动态结构如下:

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} x_i + u_i, i = 1, 2, \dots, 10. \quad (25)$$

不同于文献 [8], 智能体之间的通信拓扑为满足假设 3 且各边权重为 1 的有向图 $\mathcal{N}^1, \mathcal{N}^2$, 其相应的 Laplacian 矩阵为

$$L_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

与之相对应的增益矩阵 K_1, K_2 分别为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ -1 & 0.25 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 \\ -0.1 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

通信时滞 $d(t) = 0.005(1 - \sin t)$, 所以 $\tau = 0.01$ 和 $\delta = 0.005$ 满足假设 1.

智能体系统 (25) 在拓扑 \mathcal{N}^1 和 \mathcal{N}^2 上的状态信息分别如图 1 和图 2 所示, 此处系统的初始状态取为

$$x_0 = [4, 12, 8, 11, 10, 10, 14, 9, 16, 8, 18, 7, 20, 6, 22, 5, 26, 4, 30, 3]^T.$$

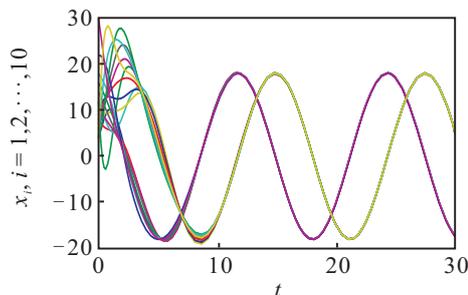


图 1 在拓扑 \mathcal{N}^1 下的两个状态分量轨迹

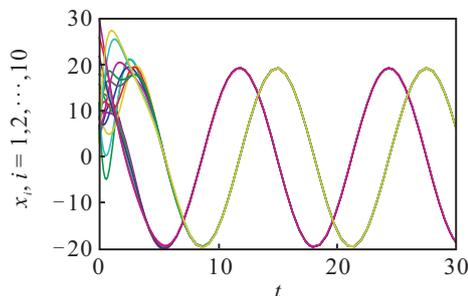


图 2 在拓扑 \mathcal{N}^2 下的两个状态分量轨迹

由图 1 和图 2 可以看出, $\mathcal{N}^1, \mathcal{N}^2$ 均为可一致通信拓扑.

当拓扑进行切换时, 根据 Step 2 计算 $\alpha = 0.9671$, 再由 Step 3 得到 $\mu = 1.702$, 代入式 (12) 可以得出 $T_a^* = 0.5699$. 因此, 对于拓扑 $\mathcal{N}^1, \mathcal{N}^2$, 只要切换信号 σ 满足平均驻留时间条件 $T_a > 0.5699$, 多智能系统 (25) 在切换拓扑下就可以达到状态一致.

图 3 给出了当 $T_a = 0.6$ 时, 多智能体系统 (25) 在拓扑 \mathcal{N}^1 和 \mathcal{N}^2 切换下的状态变化曲线, 图 4 表示对应的切换信号 σ .

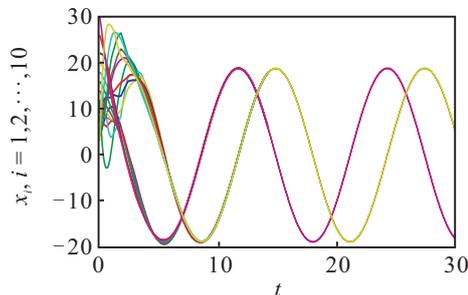


图 3 在拓扑 $\mathcal{N}^1, \mathcal{N}^2$ 切换下的两个状态分量轨迹

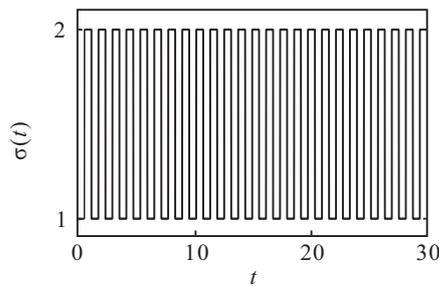


图4 拓扑 \mathcal{N}^1 、 \mathcal{N}^2 的切换信号 $\sigma(t)$

多种因素(例如 α 的近似计算)可能会导致计算的 T_a^* 具有一定的保守性.但本文给出的实例表明,定理1给出的平均驻留时间 T_a^* 具有较小的保守性.例如,可以验证当 $T_a = 0.5$ 时,多智能体系统(25)不能达到状态一致.

4 结论

本文考虑了带有时变时滞的高阶线性多智能体系统在切换有向通信拓扑下的全局一致性问题,对文献[8]中的定理1进行了推广.当通信拓扑均为可一致时,基于平均驻留时间切换法则,以LMIs的形式给出了带有时变时滞的多智能体系统在切换拓扑下可以达到一致性的充分条件,并给出了仿真实例.

参考文献(References)

- [1] Chen Y, Ge Y, Zhang Y. Partial stability approach to consensus problem of linear multiagent systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2014, 40(11): 2573-2584.
- [2] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(6): 988-1001.
- [3] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.
- [4] 宋莉, 伍清河. 具有多时变时滞的多智能体系统在切换拓扑下的平均一致性[J]. 控制与决策, 2013, 28(12): 1811-1816.
(Song L, Wu Q H. Average consensus of multi-agent systems with multiple time-varying delays and switching topologies[J]. Control and Decision, 2013, 28(12): 1811-1816.)
- [5] Sun Y, Wang L, Xie G. Average consensus in networks of dynamic agents with switching topologies and multiple time-varying delays[J]. Systems & Control Letters, 2008, 57(2): 175-183.

- [6] Liu T, Zhao J. Synchronization of complex switched delay dynamical networks with simultaneously diagonalizable coupling matrices[J]. J of Control Theory and Applications, 2008, 6(4): 351-356.
- [7] Zhao J, Hill D J, Liu T. Synchronization of complex dynamical networks with switching topology: A switched system point of view[J]. Automatica, 2009, 45(11): 2502-2511.
- [8] Liu T, Zhao J, Hill D J. Exponential synchronization of complex delayed dynamical networks with switching topology[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems I, 2010, 57(11): 2967-2980.
- [9] Jiang F, Wang L, Xie G. Consensus of high-order dynamic multi-agent systems with switching topology and time-varying delays[J]. J of Control Theory and Applications, 2010, 8(1): 52-60.
- [10] Chen Y, Zhang Y, He Z, et al. Average dwell-time conditions of switching information topologies for consensus of linear multi-agent systems[C]. Proc of the 32nd Chinese Control Conf. Xi'an: Chinese Association of Automation, 2013: 7115-7120.
- [11] 盖彦荣, 陈阳舟, 张亚霄, 等. 离散时间多智能体系统一致性的平均驻留时间条件[J]. 控制与决策, 2014, 29(10): 1871-1875.
(Gai Y R, Chen Y Z, Zhang Y X, et al. Average dwell-time conditions for consensus of discrete-time multi-agent systems[J]. Control and Decision, 2014, 29(10): 1871-1875.)
- [12] Vorotnikov V I. Partial stability and control[M]. Basel Berlin: Birkhauser Boston, 1998: 51-118.
- [13] Liberzon D. Switching in systems and control[M]. Boston: Springer Science & Business Media, 2003: 21-61.
- [14] Sun X, Dimirovski G M, Zhao J, et al. Exponential stability for switched delay systems based on average dwell time technique and Lyapunov function method[C]. Proc of the 2006 American Control Conf. Minnesota: American Automatic Control Council, 2006: 1539-1543.
- [15] 吴敏, 何勇. 时滞系统鲁棒控制——自由权矩阵方法[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 30-36.
(Wu M, He Y. Robust control for time delay systems—Free weight matrix method[M]. Beijing: Science Press, 2008: 30-36.)

(责任编辑: 闫妍)