文章编号: 1001-0920 (2016) 05-0953-04 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.0384

含有时间幂次项的灰色预测模型病态特性

崔 杰[1,2], 刘思峰[1], 马红燕[2]

(1. 南京航空航天大学 灰色系统研究所，南京 210016；2. 淮阴工学院 管理工程学院，江苏 淮安 223001)

摘 要: 为了准确揭示含时间幂次项灰色预测模型的解在系统原始特征序列存在微小扰动下的变化规律, 对该模型背景值和时间幂系数在不同取值下的系数矩阵谱条件数值进行分类计算. 研究结果表明, 一般情况下该模型不存在严重病态性. 研究结论认为, 在系统建模预测过程中, 该模型的预测值不会因系统原始特征序列存在一定误差而产生显著振荡现象.

关键词: 灰色系统理论；灰色预测理论；灰色预测模型；病态性

中图分类号: N941.5 **文献标志码:** A

Morbid property of grey prediction model with time-power

CUI Jie[1,2], *LIU Si-feng*[1], *MA Hong-yan*[2]

(1. Institution for Grey Systems Research，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China; 2. Faculty of Management and Engineering，Huaiyin Institute of Technology，Huaian 223001，China．Correspondent: CUI Jie，E-mail：nuaacui2008@163.com)

Abstract: Aiming to reveal the change law of modeling parameters of the grey model with time-power resulted from a small perturbation of primitive sequence, the spectrum condition number of the matrix is taken as a tool of measuring the morbidity of this model, and the value of conditions of the coefficient matrix with the background value and time-power item of this model in different cases, respectively. The research result shows that this grey model has no unusually severe morbidity. The research conclusion suggests that, in the grey prediction modeling process, while using this grey model with time-power, the solution of this model will not occur significant drift for the original data series of systems existing minor errors.

Keywords: grey systems theory；grey forecasting theory；grey forecasting model；morbidity

0 引 言

20世纪80年代初, 中国学者邓聚龙教授提出了灰色系统理论(简称灰理论). 该理论以“部分信息已知, 部分信息未知”的“小样本”、“贫信息”不确定性系统为研究对象, 主要通过对“部分”已知信息的生成、开发来提取有价值的信息, 从而实现对系统运行行为、演化规律的正确描述和有效监控[1-2]. 灰理论经过20多年的发展, 已基本形成一门新兴学科的结构体系. 灰理论的主要内容包括灰预测、灰关联、灰决策、灰控制、灰评估等[3-4]. 作为该理论的重要分支之一, 灰预测目前已在农业、工业、科技、教育、能源、医疗等领域获得了广泛的应用空间, 取得了良好的应用效果. 在灰预测建模中, 若模型存在严重的病态性, 则会对建模的准确性和可靠性产生显著的负面影响[5]. 近年来, 众多学者对灰色模型的病态性问题进行了深入研究. 郑照宁等[6]研究了灰色模型的病态性问题, 探讨了GM模型产生病态的原因, 发现GM (0, N)、GM (2,1) 模型存在严重病态性; 曾祥艳等[7]为了解决GM (2,1) 模型中存在的病态性问题, 引入累积法对GM (2,1) 模型进行参数估计, 并给出了新的参数估计公式, 研究结果表明, 利用数乘变换可解决累积法构建GM (2,1) 模型产生的严重病态性问题; 党耀国等[8]针对灰色模型在参数辨识过程中是否出现病态的问题, 利用矩阵条件数进行了研究, 研究结果表明, 灰色GM (1,1) 模型不存在严重病态问题; 崔杰等[9-10]以矩阵谱条件数作为工具分别研究了NGM (1, 1,k) 模型和灰色Verhulst拓展模型的病态性问题, 研究结果表明, 两模型均不存在严重病态性; 吴正朋

收稿日期: 2015-03-28；**修回日期:** 2015-06-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71301060, 71271226)；教育部人文社会科学青年基金项目(13YJC630109)；教育部人文社会科学规划基金项目(12YJA630122)；江苏省“青蓝工程”中青年学术带头人专项基金项目(2014).

作者简介: 崔杰(1978−), 男, 副教授, 博士后, 从事灰色系统理论、预测与决策方法等研究；刘思峰(1955−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济学等研究.

等[11]采用矩阵条件数对离散 GM (1,1) 模型的病态性进行了分析, 分析结果表明, 直接利用原始数据建模时, 模型会出现严重的病态问题, 数乘变换可有效解决该模型的病态问题; 王正新等[12]基于矩阵求逆的条件数探讨了 GM (1,1) 幂模型的病态性问题, 研究结果表明, 背景值和幂指数是影响灰色 GM (1,1) 幂模型病态性的直接因素; Xiao 等[13]研究了灰色 GM (2,1) 模型病态性, 研究结果显示, 采用数乘变换可有效解决 GM (2,1) 模型严重病态性问题.

上述学者的研究成果对寻求有效克服灰色模型病态性的途径具有重要指导意义. 然而, 部分实践显示, 现有的灰色预测模型在实际应用中并非都能取得良好的建模效果. 如在重大突发事件伤亡系统预测中, 由于此类系统的特征序列具有短时高速增长特性, 采用常见的灰色预测模型难以取得满意的建模效果. 为了解决该问题, 提出一种含有时间幂次项的新灰色预测模型 (NGM$(1,1,k^\alpha)$), 给出其系统预测时间响应函数. 研究该模型的病态性是提高其建模精度、拓展其适用范围的重要手段之一, 对发展和完善灰色预测理论具有重要意义. 鉴于上述分析, 采用矩阵条件数作为测量新模型病态性的工具, 介绍矩阵条件数的定义, 对灰色 NGM$(1,1,k^\alpha)$ 模型的灰导数背景值和幂系数进行分类讨论, 利用谱条件数法对该模型的病态性进行测算, 得到灰色 NGM$(1,1,k^\alpha)$ 模型出现严重病态性的一致性条件. 研究结论认为, 在通常条件下, 灰色 NGM$(1,1,k^\alpha)$ 模型并不存在严重的病态性.

1 病态方程与矩阵条件数

考虑线性方程组 $Ax=b$. 其中: A 为非奇异矩阵, b 为常数向量, x 为方程组的精确解.

定义 1[14] 如果矩阵 A 或常数向量 b 的微小变化引起方程组 $Ax=b$ 解的巨大变化, 则称此方程组为病态方程组, 矩阵 A 为病态矩阵.

定义 2[14] 设 $A\in R^{n\times m}$, A 为非奇异矩阵, $\|\cdot\|$ 为定义在 $R^{n\times m}$ 上的矩阵, 则称

$$\mathrm{cond}(A)_v=\|A^{-1}\|_v\|A\|_v \tag{1}$$

为 A 关于范数 $\|\cdot\|$ 的条件数, 其中 $v=1,2$ 或 ∞.

若矩阵 A 的条件数大, 则称 A 对于 $Ax=b$ 而言是病态的, 反之为良态. 考虑条件数对于矩阵病态性度量的等价性, 为了分析问题的便利, 这里采用谱条件数, 即

$$\mathrm{cond}(A)_2=\|A^{-1}\|_2\|A\|_2=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^\mathrm{T}A)}{\lambda_{\min}(A^\mathrm{T}A)}}, \tag{2}$$

其中 $\lambda_{\max}(A^\mathrm{T}A)$、$\lambda_{\min}(A^\mathrm{T}A)$ 分别为矩阵 $A^\mathrm{T}A$ 的模最大和最小特征根. 当 A 为实对称阵时, 有

$$\mathrm{cond}(A)_2=\frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}, \tag{3}$$

其中 $\lambda_{\max}$、$\lambda_{\min}$ 分别为矩阵 A 的按模最大和最小特征根.

2 灰色 NGM$(1,1,k^\alpha)$ 模型的病态性

设 $D\in R^{m\times n}$、$y\in R^m$、$x\in R^n$、D 为灰色预测模型的系数矩阵, 若存在一个向量 $x_0\in R^n$, 使得 $\|Dx-y\|_2$ 达到最小, 即

$$\|Dx_0-y\|_2=\min_{x\in R^n}\|Dx-y\|_2,$$

则 x_0 为线性方程组 $Dx=y$ 的最小二乘解, 即灰色预测模型的参数估计结果. 令 $f(x)=\|Dx-y\|_2^2=(Dx-y)^\mathrm{T}(Dx-y)=x^\mathrm{T}D^\mathrm{T}Dx-x^\mathrm{T}D^\mathrm{T}y-y^\mathrm{T}Dx+y^\mathrm{T}y$. 极值存在的条件为 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=2D^\mathrm{T}Dx-2D^\mathrm{T}y=0$, 由该条件可知, 方程组 $D^\mathrm{T}Dx=D^\mathrm{T}y$ 的解即为方程组 $Dx=y$ 的最小二乘解.

由现有研究文献可知, 可以根据方程组 $D^\mathrm{T}Dx=D^\mathrm{T}y$ 分析系数矩阵对灰色模型参数估计结果 x_0 的扰动, 即用 $D^\mathrm{T}D$ 的条件数来测算灰色预测模型的病态程度.

2.1 灰色 NGM$(1,1,k^\alpha)$ 模型的定义

定义 3 设原始的非负序列为 $X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$, 且 $x^{(0)}(k)\geqslant 0$, $k=1,2,\cdots,n$. $X^{(0)}$ 的一次累加生成序列为 $X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\}$, $x^{(1)}(k)=\sum\limits_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)$, $k=1,2,\cdots,n$. $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列为 $Z^{(1)}=\{z^{(1)}(1),z^{(1)}(2),\cdots,z^{(1)}(n)\}$, $z^{(1)}(k)=\dfrac{1}{2}(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k+1))$, $k=2,3,\cdots,n$. 这里称模型 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=bk^\alpha$ $(\alpha>0)$ 为灰色 NGM$(1,1,k^\alpha)$ 模型, 其白化形式可表示为 $\dfrac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}(t)=bt^\alpha$. 其中: 当 $\alpha=0$ 时, 该模型为传统的 GM (1,1) 模型; 当 $\alpha=1$ 时, 该模型为文献 [6] 中所研究的 NGM$(1,1,k)$ 模型.

若 $\hat{a}=[a,b]^\mathrm{T}$ 为灰色 NGM$(1,1,k^\alpha)$ 模型的参数, 且有

$$Y=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\x^{(0)}(3)\\\vdots\\x^{(0)}(n)\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & 2^\alpha\\-z^{(1)}(3) & 3^\alpha\\\vdots & \vdots\\-z^{(1)}(n) & n^\alpha\end{bmatrix},$$

则灰色微分方程 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=bk^\alpha$ 的最小二乘估计参数序列为 $\hat{a}=(B^\mathrm{T}B)^{-1}B^\mathrm{T}Y$, 即 $(B^\mathrm{T}B)\hat{a}=B^\mathrm{T}Y$.

2.2 灰色 NGM$(1,1,k^\alpha)$ 模型病态性计算

$$B^\mathrm{T}B=\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=2}^{n}\left(z^{(1)}(k)\right)^2 & -\sum\limits_{k=2}^{n}k^\alpha z^{(1)}(k)\\-\sum\limits_{k=2}^{n}k^\alpha z^{(1)}(k) & \sum\limits_{k=2}^{n}k^{2\alpha}\end{bmatrix},$$

$B^\mathrm{T}B$ 的伴随矩阵为

$$(B^{\mathrm T}B)^*=\begin{bmatrix}\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha} & \sum_{k=2}^{n}k^{\alpha}z^{(1)}(k)\\ \sum_{k=2}^{n}k^{\alpha}z^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^{n}\left(z^{(1)}(k)\right)^2\end{bmatrix}.$$

下面讨论矩阵 $B^{\mathrm T}B$ 的谱条件数.

由定义 2 可知, $B^{\mathrm T}B$ 的谱条件数为

$$\mathrm{cond}(B^{\mathrm T}B)_2=$$
$$\|(B^{\mathrm T}B)^{-1}\|_2\|B^{\mathrm T}B\|_2=\|B^{\mathrm T}B\|_2\left\|\frac{(B^{\mathrm T}B)^*}{|B^{\mathrm T}B|}\right\|_2=$$
$$\frac{1}{|B^{\mathrm T}B|}\times\|B^{\mathrm T}B\|_2\|(B^{\mathrm T}B)^*\|_2=\frac{|\lambda_1||\lambda_1^*|}{|B^{\mathrm T}B|}.$$

其中: λ_1 为矩阵 $B^{\mathrm T}B$ 模最大的特征根, λ_1^* 为矩阵 $(B^{\mathrm T}B)^*$ 模最大的特征根.

引理 1[14]　设 $A\in R_{m\times n}$, 则 A 的任一特征根 λ 满足 $\lambda\leqslant n\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$.

由引理 1 可得

$$\mathrm{cond}(B^{\mathrm T}B)_2=\frac{|\lambda_1||\lambda_1^*|}{|B^{\mathrm T}B|}\leqslant\frac{4\max|a_{ij}|\max|a_{ij}^*|}{|B^{\mathrm T}B|}.$$

其中: $\max|a_{ij}|$ 为矩阵 $B^{\mathrm T}B$ 最大元素的模, $\max|a_{ij}^*|$ 为矩阵 $(B^{\mathrm T}B)^*$ 最大元素的模.

引理 2[14]　若 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 为实数序列, 则有 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2\times\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^2$. 其中: 当且仅当序列 a 与序列 b 存在线性相关时, 等式成立.

定理 1　若对于任意的 $k=2,3,\cdots,n$, 均有 $0<z^{(1)}(k)<1$, 则灰色 NGM $(1,1,k^{\alpha})$ 模型的系数矩阵 $B^{\mathrm T}B$ 及其伴随阵的最大元素为 $\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}$.

证明　由于 $\alpha>0$, $k^{2\alpha}>k^{\alpha}z^{(1)}(k)>(z^{(1)}(k))^2$, 则有 $\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}>\sum_{k=2}^{n}k^{\alpha}z^{(1)}(k)>\sum_{k=2}^{n}\left(z^{(1)}(k)\right)^2$. □

定理 2　若对于任意 $k=2,3,\cdots,n$, 均有 $z^{(1)}(k)>1$, 则存在如下两种情形:

1) 当 $0<\alpha<1$ 时, 灰色 NGM $(1,1,k^{\alpha})$ 模型的系数矩阵 $B^{\mathrm T}B$ 及其伴随阵的最大元素为 $\sum_{k=2}^{n}\left(z^{(1)}(k)\right)^2$.

证明　当 $0<\alpha<1$, $z^{(1)}(k)>1$, $z^{(1)}(k)>k^{\alpha}$ 时, 有 $\sum_{k=2}^{n}\left(z^{(1)}(k)\right)^2>\sum_{k=2}^{n}k^{\alpha}z^{(1)}(k)>\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}$. □

2) 当 $\alpha>1$ 时, 灰色 NGM $(1,1,k^{\alpha})$ 模型的系数矩阵 $B^{\mathrm T}B$ 及其伴随阵的最大元素为 $\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}$.

证明　当 $\alpha>1$, $z^{(1)}(k)>1$ 时, 有 $\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}>\sum_{k=2}^{n}k^{\alpha}z^{(1)}(k)>\sum_{k=2}^{n}\left(z^{(1)}(k)\right)^2$. □

下面根据定理 1 和定理 2 分 3 种情况讨论灰色 NGM $(1,1,k^{\alpha})$ 模型的病态性.

1) 当 $0<z^{(1)}(k)<1$ 时, 由定理 1 可知, 灰色 NGM $(1,1,k^{\alpha})$ 模型的系数矩阵 $B^{\mathrm T}B$ 及其伴随阵的最大元素为 $\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}$, 且有

$$\mathrm{cond}(B^{\mathrm T}B)_2\leqslant\frac{4\max|a_{ij}|\max|a_{ij}^*|}{|B^{\mathrm T}B|}=$$
$$\frac{4\left(\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}\right)^2}{\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}\sum_{k=2}^{n}\left(z^{(1)}(k)\right)^2-\left(\sum_{k=2}^{n}k^{\alpha}z^{(1)}(k)\right)^2}=$$
$$\frac{4\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}}{\sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^2-\left(\sum_{k=2}^{n}k^{\alpha}z^{(1)}(k)\right)^2\Big/\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}}.$$

由引理 2 可知

$$\left(\sum_{k=2}^{n}k^{\alpha}z^{(1)}(k)\right)^2<\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}\sum_{k=2}^{n}\left(z^{(1)}(k)\right)^2,$$

即 $\sum_{k=2}^{n}\left(z^{(1)}(k)\right)^2>\left(\sum_{k=2}^{n}k^{\alpha}z^{(1)}(k)\right)^2\Big/\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}$.

当 $\sum_{k=2}^{n}\left(z^{(1)}(k)\right)^2-\left(\sum_{k=2}^{n}k^{\alpha}z^{(1)}(k)\right)^2\Big/\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}\geqslant 1$ 成立时, $\mathrm{cond}(B^{\mathrm T}B)_2$ 的最大值为 $4\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}$. 由于灰色系统理论研究的系统具有少数据、贫信息的特性, $4\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}$ 的取值有限小, 故灰色 NGM $(1,1,k^{\alpha})$ 模型不存在严重病态性问题.

当 $0<\sum_{k=2}^{n}\left(z^{(1)}(k)\right)^2-\left(\sum_{k=2}^{n}k^{\alpha}z^{(1)}(k)\right)^2\Big/\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}<1$ 成立时, $\mathrm{cond}(B^{\mathrm T}B)_2$ 的值取决于 $\sum_{k=2}^{n}\left(z^{(1)}(k)\right)^2$ 接近 $\left(\sum_{k=2}^{n}k^{\alpha}z^{(1)}(k)\right)^2\Big/\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}$ 的程度. 若 $\sum_{k=2}^{n}\left(z^{(1)}(k)\right)^2\to\left(\sum_{k=2}^{n}k^{\alpha}z^{(1)}(k)\right)^2\Big/\sum_{k=2}^{n}k^{2\alpha}$, 则有 $z^{(1)}(k)\approx\mathrm{const}\ k$, 即系统原始特征序列近似为常数序列, 此时进行灰色建模无实际意义.

2) 当 $z^{(1)}(k)>1$ 时, 若 $0<\alpha<1$, 则由定理 2 可知, 灰色 NGM $(1,1,k^{\alpha})$ 模型系数矩阵 $B^{\mathrm T}B$ 及其伴随阵的最大元素为 $\sum_{k=2}^{n}\left(z^{(1)}(k)\right)^2$, 且有

$$\mathrm{cond}(B^{\mathrm T}B)_2\leqslant\frac{4\max|a_{ij}|\max|a_{ij}^*|}{|B^{\mathrm T}B|}=$$

$$\frac{4\Big(\sum\limits_{k=2}^{n}\big(z^{(1)}(k)\big)^2\Big)^2}{\sum\limits_{k=2}^{n}k^{2\alpha}\sum\limits_{k=2}^{n}\big(z^{(1)}(k)\big)^2-\Big(\sum\limits_{k=2}^{n}k^{\alpha}z^{(1)}(k)\Big)^2}=$$

$$\frac{4\sum\limits_{k=2}^{n}\big(z^{(1)}(k)\big)^2}{\sum\limits_{k=2}^{n}k^{2\alpha}-\Big(\sum\limits_{k=2}^{n}k^{\alpha}z^{(1)}(k)\Big)^2\Big/\sum\limits_{k=2}^{n}\big(z^{(1)}(k)\big)^2}.$$

3) 当 $z^{(1)}(k)>1$ 时, 若 $\alpha>1$, 则由定理 2 可知, 灰色 NGM $(1,1,k^{\alpha})$ 模型的系数矩阵 $B^{\mathrm{T}}B$ 及其伴随阵的最大元素为 $\sum\limits_{k=2}^{n}k^{2\alpha}$. 该结论与第 1 种情况的结论相同.

从上述 3 种情况的讨论结果可知, 灰色 NGM $(1,1,k^{\alpha})$ 模型出现病态性的条件为 $\sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^2\rightarrow\Big(\sum\limits_{k=2}^{n}k^{\alpha}z^{(1)}(k)\Big)^2\Big/\sum\limits_{k=2}^{n}k^{2\alpha}$, 即 $\sum\limits_{k=2}^{n}\big(z^{(1)}(k)\big)^2\sum\limits_{k=2}^{n}k^{2\alpha}\rightarrow\Big(\sum\limits_{k=2}^{n}k^{\alpha}z^{(1)}(k)\Big)^2$. 该条件等价于 $z^{(1)}(k)\approx\mathrm{const}\ k$, 即系统原始特征序列近似为常数序列, 此时采用该序列进行灰色预测建模无实际意义, 故通常情况下灰色 NGM $(1,1,k^{\alpha})$ 模型不存在严重病态性.

3 结 论

本文提出了含有时间幂次项的灰色 NGM $(1,1,k^{\alpha})$ 模型, 深入分析了该模型的背景值和时间幂系数在不同取值下的病态性问题. 研究结果表明, 在通常情况下, 灰色 NGM $(1,1,k^{\alpha})$ 模型并不存在严重病态性. 因此, 在预测建模过程中, 该模型的预测值不会因系统原始特征序列数据存在微小误差而出现显著漂移现象. 关于该模型的其他参数特性是未来进一步研究的方向.

参考文献(References)

[1] Deng J L. Introduction to grey system theory[J]. The J of Grey System, 1989, 1(1): 1-26.

[2] Deng J L. The basis of grey theory[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science and Technology, 2002: 35-41.

[3] Lin Y, Liu S F. A systemic analysis with data[J]. Int J of General Systems, 2000, 29(6): 1001-1011.

[4] 王正新. 含可变参数的缓冲算子与GM (1,1) 幂模型研究[D]. 南京: 南京航空航天大学经济与管理学院, 2010: 5-6.
(Wang Z X. On the buffer operators with parameters and GM (1,1) power model[D]. Nanjing: Institute of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010: 5-6.)

[5] 崔杰. 灰色不确定系统建模的理论与方法研究[D]. 南京: 南京航空航天大学经济与管理学院, 2010: 8-10.
(Cui J. Study on the theories and methods of modeling for grey uncertain systems[D]. Nanjing: Institute of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010: 8-10.)

[6] 郑照宁, 武玉英. GM 模型的病态性问题[J]. 中国管理科学, 2001, 9(5): 38-44.
(Zheng Z N, Wu Y Y. The morbidity problem in grey models[J]. The Chinese Management Science, 2001, 9(5): 38-44.)

[7] 曾祥艳, 肖新平. 累积法GM (2,1) 模型及其病态性研究[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(4): 542-544.
(Zeng X Y, Xiao X P. Research on morbidity problem of accumulating method GM(2,1) model[J]. Systems Engineering and Electronics, 2006, 28(4): 542-544.)

[8] 党耀国, 王正新, 刘思峰. 灰色模型的病态问题研究[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 21(1): 156-160.
(Dang Y G, Wang Z X, Liu S F. Study on morbidity problem in grey model[J]. Systems Engineering — Theory and Practice, 2008, 21(1): 156-160.)

[9] 崔杰, 党耀国, 刘思峰. 基于矩阵条件数的NGM (1, 1, k) 模型病态性研究[J]. 控制与决策, 2010, 25(7): 1050-1054.
(Cui J, Dang Y G, Liu S F. Study on morbidity of NGM (1, 1, k) model based on conditions of matrix[J]. Control and Decision, 2010, 25(7): 1050-1054.)

[10] 崔杰, 刘思峰. 基于灰色Verhulst拓展模型病态性问题[J]. 控制与决策, 2014, 29(3): 567-571.
(Cui J, Liu S F. Morbid property of grey extended Verhulst model[J]. Control and Decision, 2014, 29(3): 567-571.)

[11] 吴正鹏, 李波, 张友萍, 等. GM (1,1) 模型的病态问题研究[J]. 中国传媒大学学报: 自然科学版, 2011, 18(4): 31-34.
(Wu Z P, Li B, Zhang Y P, et al. Study on the morbidity problem in grey model[J]. J of Communication University of China: Science and Technology, 2011, 18(4): 31-34.)

[12] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 灰色幂模型的病态性[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33 (7): 1859-1866.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. Study on morbidity problem in grey power model[J]. Systems Engineering — Theory and Practice, 2013, 33(7): 1859-1866.)

[13] Xiao X P, Guo J H. The morbidity problem of GM (2, 1) model based on vector transformation[J]. The J of Grey System, 2014, 26(3): 1-11.

[14] 任玉杰. 数值分析及其Matlab实现[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007: 102-108.
(Ren Y J. Numerical analysis and its implement in Matlab[M]. Beijing: Higher Education Press, 2007: 102-108.)

[15] 利诺维奇D S. 解析不等式[M]. 北京: 科学出版社, 1987: 23-27.
(Mitrinovic D S. The solution to inequation[M]. Beijing: Science Press, 1987: 23-27.)

(责任编辑: 闫 妍)