第 31 卷 第 5 期
Vol. 31 No. 5

控 制 与 决 策
Control and Decision

2016 年 5 月
May 2016

文章编号: 1001-0920 (2016) 05-0895-06 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2015.0387

基于 T-S 模糊模型的不确定时滞系统鲁棒 L_1 滤波

李艳辉, 周秀杰, 刘俊丽

(东北石油大学 电气信息工程学院，黑龙江 大庆 163318)

摘 要: 针对外部干扰信号为峰值有界的不确定时滞系统, 提出一种新的基于 T-S 模糊模型的鲁棒 L_1 滤波方法. 根据平行分布补偿法 (PDC) 和 Lyapunov 稳定性理论, 构造模糊基依赖 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 并利用积分不等式方法, 建立基于 T-S 模糊模型的不确定时滞系统的时滞相关峰值——峰值 (L_1) 性能判据. 最后通过 LMI 技术将鲁棒 L_1 滤波器设计问题转化为 LMIs 的凸优化求解问题. 仿真示例验证了所提出方法的有效性.

关键词: T-S 模糊模型；鲁棒 L_1 滤波；时滞相关；模糊基依赖；线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Robust L_1 filtering for uncertain time-delay systems based on T-S fuzzy model

LI Yan-hui, *ZHOU Xiu-jie*, *LIU Jun-li*

(College of Electrical and Information Engineering，Northeast Petroleum University，Daqing 163318，China. Correspondent：LI Yan-hui，E-mail：LY_hui@hotmail.com)

Abstract: A new robust L_1 filtering method for a class of uncertain time-delay systems with peak-bounded external disturbances based on T-S fuzzy model is proposed. According to the parallel distributed compensation(PDC) and Lyapunov theory, a fuzzy basis-dependent Lyapunov-Krasovskii function is constructed. By adopting the integral inequality method, a delay-dependent peak-to-peak(L_1) criterion is firstly established for the uncertain time-delay systems based on the T-S fuzzy model. By using the LMI technique, the robust L_1 filtering problem can be casted into a convex optimization problem of LMIs. A numerical example is presented to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: T-S fuzzy model；robust L_1 filtering；delay-dependent；fuzzy basis-dependent；linear matrix inequality

0 引 言

鲁棒滤波由于不需要输入信号的统计特性且对模型中存在的不确定性具有很好的鲁棒性而受到广泛关注[1]. 近年来, 基于不同性能指标的鲁棒滤波器设计方法被不断提出, 如 H_∞ 滤波、L_2-L_∞ 滤波等, 其均要求外部扰动是能量有界的信号[2-3]. 然而, 实际系统的外部干扰并不总是满足平方可积的能量有界信号, 如阀门控制系统中突加负荷所产生的阶跃干扰信号、飞机飞行控制系统中风力对机翼产生的干扰等一般都是持续峰值有界的, 因此基于能量有界扰动条件下的鲁棒 H_∞ 等滤波方法不再适用. 在这种情况下, 鲁棒 L_1 滤波能够最小化系统的峰值-峰值增益, 更好地保证了系统的稳定性及性能, 具有重要的理论研究意义和广泛的工程应用前景. 目前, 对于鲁棒 L_1 滤波方法的研究主要集中于线性系统[4-6]. 文献 [4] 针对具有多时滞的多面体系统提出了鲁棒 L_1 固定阶滤波器的设计方法; 文献 [5] 和文献 [6] 分别研究了 LPV 系统和切换 LPV 系统的时滞依赖鲁棒 L_1 滤波问题. 而关于非线性系统的鲁棒 L_1 滤波问题的报道相对较少.

针对具有非线性、时变、滞后等特征的实际控制系统, 基于 T-S 模糊模型的鲁棒滤波方法研究已成为国内外研究热点, 并取得了一定的成果[7-10]. 文献 [7] 针对随机时滞系统的 T-S 模糊近似模型提出一种使滤波误差系统均方渐近稳定且满足 Hankel-norm 性能约束的滤波器设计方法; 文献 [8] 基于 T-S 模糊模型讨论了由非线性连续时间状态空间模型描述的时

收稿日期: 2015-03-29；**修回日期:** 2015-07-27.

基金项目: 东北石油大学研究生创新科研项目(YJSCX2014-029NEPU)；黑龙江省自然科学基金项目(F201403)；黑龙江省博士后科学研究发展基金项目(LBH-Q13177)；东北石油大学校内培育基金项目(XN2014112).

作者简介: 李艳辉(1970−), 女, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制及滤波、智能控制等研究；周秀杰(1990−), 女, 硕士生, 从事鲁棒控制及滤波的研究.

变时滞系统的 H_∞ 滤波问题; 文献 [10] 在假定模型不确定参数为多胞形以及时变时滞的条件下, 研究了模糊系统的鲁棒 L_2-L_∞ 滤波问题. 需要注意的是, 上述已取得的成果大多是基于 H_∞、L_2-L_∞ 等性能指标进行分析的, 而基于 T-S 模糊模型的不确定非线性系统的鲁棒 L_1 滤波方法尚待研究, 是一个全新的领域.

本文采用 T-S 模糊模型描述非线性时滞系统, 假设模型中存在不确定性, 且范数有界. 基于 PDC 以及状态增广法建立模糊滤波误差系统. 通过构造一个时滞相关的模糊基依赖 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 推导出具有峰值-峰值性能增益的滤波器存在的充分条件. 基于 LMI 技术, 将不确定非线性时滞系统的鲁棒 L_1 滤波器设计问题转化为LMIs的凸优化求解问题. 数值算例验证了所得结果的可行性.

1 问题描述

考虑由 T-S 模糊模型描述的不确定时滞系统

Rule i: If $\theta_1(t)$ is $F_{i1}, \theta_2(t)$ is F_{i2} and $\cdots$ and $\theta_n(t)$ is F_{in}, then

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=(A_i+\Delta A_i(t))x(t)+(A_{di}+\\ \qquad \Delta A_{di}(t))x(t-d(t))+B_i\omega(t),\\ y(t)=(C_i+\Delta C_i(t))x(t)+(C_{di}+\\ \qquad \Delta C_{di}(t))x(t-d(t))+D_i\omega(t),\\ z(t)=L_ix(t),\ i=1,2,\cdots,r. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t)$ 是状态变量, $y(t)$ 是测量输出, $z(t)$ 是待估计信号, $\omega(t)$ 是干扰输入, 且 $\omega(t)\in L_\infty[0,\infty)$; $\theta_1(t)$, $\theta_2(t),\cdots,\theta_n(t)$ 是可测的前件变量; $F_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$ 是模糊集; r 是模糊规则数; $A_i, A_{di}, B_i, C_i, C_{di}, D_i$ 和 L_i 是具有适当维数的常数矩阵; $\Delta A_i(t)$, $\Delta A_{di}(t)$, $\Delta C_i(t)$, $\Delta C_{di}(t)$ 是时变参数矩阵, 表示系统模型中的不确定性. 假设其范数有界且满足

$$\begin{bmatrix} \Delta A_i(t) & \Delta A_{di}(t)\\ \Delta C_i(t) & \Delta C_{di}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_{1i}\\ M_{2i}\end{bmatrix}\varLambda_i(t)[\,N_{1i}\ \ N_{2i}\,]. \tag{2}$$

其中: $M_{1i}, M_{2i}, N_{1i}, N_{2i}$ 是具有适当维数的常数矩阵, $\varLambda_i(t)$ 是具有 Lebesgue 可测元的未知函数矩阵, 满足 $\varLambda_i^{\mathrm T}(t)\varLambda_i(t)\leqslant I$.

应用单点模糊化、乘积推理和加权平均去模糊化, 可得

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=(A(t)+\Delta A(t))x(t)+(A_d(t)+\\ \qquad \Delta A_d(t))x(t-d(t))+B(t)\omega(t),\\ y(t)=(C(t)+\Delta C(t))x(t)+(C_d(t)+\\ \qquad \Delta C_d(t))x(t-d(t))+D(t)\omega(t),\\ z(t)=L(t)x(t). \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$\upsilon_i(\theta(t))=\prod_{j=1}^{n}F_{ij}(\theta_j(t)),$$

$$\mu_i(\theta(t))=\frac{\upsilon_i(\theta(t))}{\sum\limits_{i=1}^{r}\upsilon_i(\theta(t))},$$

$$\varTheta(t)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\theta(t))\varTheta_i; \tag{4}$$

$\varTheta$ 表示系统矩阵 $A,\Delta A,A_d,\Delta A_d,B,C,\Delta C,C_d,\Delta C_d$, D 和 L; $F_{ij}(\theta_j(t))$ 是前件变量 $\theta_j(t)$ 隶属于模糊集 F_{ij} 的隶属度函数, 对于任意 t, 满足

$$\mu_i(\theta(t))\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{r}\mu_i(\theta(t))=1.$$

根据 PDC 原理, 考虑如下形式的模糊滤波器:

Rule i: If $\theta_1(t)$ is $F_{i1}, \theta_2(t)$ is F_{i2} and $\cdots$ and $\theta_n(t)$ is F_{in}, then

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t)=A_{fi}x_f(t)+B_{fi}y(t),\\ z_f(t)=C_{fi}x_f(t). \end{cases} \tag{5}$$

对应的全局模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t)=A_f(t)x_f(t)+B_f(t)y(t),\\ z_f(t)=C_f(t)x_f(t). \end{cases} \tag{6}$$

$A_f(t), B_f(t), C_f(t)$ 定义同式 (4).

定义 $\xi(t)=[\,x^{\mathrm T}(t)\ \ x_f^{\mathrm T}(t)\,]^{\mathrm T}$, $e(t)=z(t)-z_f(t)$. 综合式 (3) 和 (6), 应用状态增广思想对模型进行处理, 得到如下模糊滤波误差系统:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t)=(A_F(t)+\Delta A_F(t))\xi(t)+(A_{Fd}(t)+\\ \qquad \Delta A_{Fd}(t))G\xi(t-d(t))+B_F(t)\omega(t),\\ e(t)=C_F(t)\xi(t). \end{cases} \tag{7}$$

其中

$$G=[\,I\ \ 0\,],$$

$$A_F(t)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\theta(t))\sum_{j=1}^{r}\mu_j(\theta(t))\begin{bmatrix} A_i & 0\\ B_{fj}C_i & A_{fj}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A(t) & 0\\ B_f(t)C(t) & A_f(t)\end{bmatrix},$$

$$\Delta A_F(t)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\theta(t))\sum_{j=1}^{r}\mu_j(\theta(t))\begin{bmatrix} \Delta A_i & 0\\ B_{fj}\Delta C_i & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Delta A(t) & 0\\ B_f(t)\Delta C(t) & 0\end{bmatrix},$$

$$A_{Fd}(t)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\theta(t))\sum_{j=1}^{r}\mu_j(\theta(t))\begin{bmatrix} A_{di}\\ B_{fj}C_{di}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_d(t)\\ B_f(t)C_d(t)\end{bmatrix},$$

$$\Delta A_{Fd}(t)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\theta(t))\sum_{j=1}^{r}\mu_j(\theta(t))\begin{bmatrix} \Delta A_{di}\\ B_{fj}\Delta C_{di}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} \Delta A_d(t) \\ B_f(t)\Delta C_d(t) \end{bmatrix},$$

$$B_F(t)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\theta(t))\sum_{j=1}^{r}\mu_j(\theta(t))\begin{bmatrix} B_i \\ B_{fj}D_i \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} B(t) \\ B_f(t)D(t) \end{bmatrix},$$

$$C_F(t)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\theta(t))\sum_{j=1}^{r}\mu_j(\theta(t))[\ L_i\ \ -C_{fj}\ ]=$$

$$[\ L(t)\ \ -C_f(t)\ ]. \tag{8}$$

针对上述系统矩阵中的不确定项, 定义

$$\boldsymbol{M}=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\theta(t))\sum_{j=1}^{r}\mu_j(\theta(t))\begin{bmatrix} M_{1i} \\ B_{fj}M_{2i} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{N}_1=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\theta(t))[\ N_{1i}\ \ 0\ ],$$

$$\boldsymbol{N}_2=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\theta(t))N_{2i}, \tag{9}$$

则有

$$\Delta A_F(t)=\boldsymbol{M}\Lambda(t)\boldsymbol{N}_1,\ \Delta A_{Fd}(t)=\boldsymbol{M}\Lambda(t)\boldsymbol{N}_2. \tag{10}$$

定义 1　给定系统(1), 设计模糊滤波器(5), 得到模糊滤波误差系统(7), 使得:

1) 模糊滤波误差系统(7)渐近稳定;

2) 零初始条件下, 对于任意非零 $\omega(t)\in L_\infty[0,\infty)$, 模糊滤波误差系统(7)具有给定的 L_1 噪声抑制水平 γ, 即 $\|T_{e\omega}\|_{L_1}=\sup\limits_{\omega\in L_\infty}\dfrac{\|e(t)\|_{L_\infty}}{\|\omega(t)\|_{L_\infty}}<\gamma$.

满足以上两个条件的滤波器被称为鲁棒 L_1 滤波器.

在分析模糊滤波误差系统的鲁棒 L_1 性能之前, 给出如下引理.

引理 1　假设 Γ, M, N, S 是具有适当维数的实矩阵, 其中 $S>0$, $\Lambda(t)$ 满足 $\Lambda^{\mathrm T}(t)\Lambda(t)\leqslant I$, 则有下列不等式成立:

1) 对于任意 $\varepsilon>0$ 和向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}$, 总有

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm T}M\Lambda(t)N\boldsymbol{y}\leqslant\varepsilon^{-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm T}MM^{\mathrm T}\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{y}^{\mathrm T}N^{\mathrm T}N\boldsymbol{y};$$

2) 对于任意 $\varepsilon>0$, 使得 $S-\varepsilon MM^{\mathrm T}>0$, 总有

$$(\Gamma+M\Lambda(t)N)^{\mathrm T}S^{-1}(\Gamma+M\Lambda(t)N)\leqslant$$
$$\Gamma^{\mathrm T}(S-\varepsilon MM^{\mathrm T})^{-1}\Gamma+\varepsilon^{-1}N^{\mathrm T}N.$$

2　模糊滤波误差系统 L_1 性能分析

本节建立了使模糊滤波误差系统(7)渐近稳定且具有 L_1 性能约束的模糊滤波器存在的充分条件, 为后续滤波器设计问题提供了理论基础.

定理 1　给定标量 $\alpha>0$, 如果存在正常数 ε_1, ε_2, 以及具有适当维数的矩阵 $P>0$, $Q_{1i}>0$, $Q_{2i}>0$, $R_{1i}>0$, $R_{2i}>0$ 和 $\boldsymbol{Q}_{1k}$, $\boldsymbol{Q}_{2t}$, $\boldsymbol{S}_i$, 使得

$$\begin{bmatrix}
\Pi_{11} & \Pi_{12} & 0 & \Pi_{14} & P\boldsymbol{M}_{ij} & \boldsymbol{d}\boldsymbol{N}_{1i}^{\mathrm T} & \Pi_{17} \\
* & \Pi_{22} & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{d}\boldsymbol{N}_{2i}^{\mathrm T} & \Pi_{27} \\
* & * & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & -\alpha I & 0 & 0 & \Pi_{47} \\
* & * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 \\
* & * & * & * & * & * & \Pi_{77}
\end{bmatrix}<0, \tag{11}$$

$$G^{\mathrm T}[\alpha Q_{1i}-(1-\alpha\boldsymbol{d})R_{1i}]G<0, \tag{12}$$

$$G^{\mathrm T}[\alpha Q_{2i}-(1-\tau-\alpha\boldsymbol{d})R_{2i}]G<0, \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix}
-\alpha P & 0 & C_{Fij}^{\mathrm T} \\
* & -(\gamma-\alpha)I & 0 \\
* & * & -\gamma I
\end{bmatrix}<0 \tag{14}$$

成立, 则模糊滤波误差系统(7)渐近稳定且满足 L_1 噪声抑制水平 γ. 其中

$$\Pi_{11}=PA_{Fij}+A_{Fij}^{\mathrm T}P+G^{\mathrm T}Q_{1i}G+G^{\mathrm T}Q_{2i}G+$$
$$\boldsymbol{d}G^{\mathrm T}R_{1i}G+\boldsymbol{d}G^{\mathrm T}R_{2i}G+\alpha P+\varepsilon_1\boldsymbol{N}_{1i}^{\mathrm T}\boldsymbol{N}_{1i},$$
$$\Pi_{12}=PA_{Fdij}+\varepsilon_1\boldsymbol{N}_{1i}^{\mathrm T}\boldsymbol{N}_{2i},\ \Pi_{14}=PB_{Fij},$$
$$\Pi_{17}=\boldsymbol{d}A_{Fij}^{\mathrm T}G^{\mathrm T},\ \Pi_{27}=\boldsymbol{d}A_{Fdij}^{\mathrm T}G^{\mathrm T},\ \Pi_{47}=\boldsymbol{d}B_{Fij}^{\mathrm T}G^{\mathrm T},$$
$$\Pi_{22}=-(1-\tau)\boldsymbol{Q}_{2t}+\varepsilon_1\boldsymbol{N}_{2i}^{\mathrm T}\boldsymbol{N}_{2i},\Pi_{33}=-\boldsymbol{Q}_{1k},$$
$$\Pi_{77}=-\boldsymbol{S}_i+\varepsilon_2G\boldsymbol{M}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{\mathrm T}G^{\mathrm T}.$$

证明　选取如下形式的模糊基依赖Lyapunov-Krasovskii泛函:

$$V(\xi_t)=\sum_{l=1}^{6}V_l(\xi_t),\ V_1(\xi_t)=\xi^{\mathrm T}(t)P\xi(t),$$
$$V_2(\xi_t)=\int_{t-\boldsymbol{d}}^{t}\xi^{\mathrm T}(s)G^{\mathrm T}Q_1(s)G\xi(s)\mathrm{d}s,$$
$$V_3(\xi_t)=\int_{t-d(t)}^{t}\xi^{\mathrm T}(s)G^{\mathrm T}Q_2(s)G\xi(s)\mathrm{d}s,$$
$$V_4(\xi_t)=\int_{t-\boldsymbol{d}}^{t}\int_{s}^{t}\xi^{\mathrm T}(\beta)G^{\mathrm T}R_1(\beta)G\xi(\beta)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}s,$$
$$V_5(\xi_t)=\int_{t-d(t)}^{t}\int_{s}^{t}\xi^{\mathrm T}(\beta)G^{\mathrm T}R_2(\beta)G\xi(\beta)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}s,$$
$$V_6(\xi_t)=\boldsymbol{d}\int_{t-\boldsymbol{d}}^{t}\int_{s}^{t}\dot\xi^{\mathrm T}(\beta)G^{\mathrm T}S(\beta)G\dot\xi(\beta)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}s. \tag{15}$$

其中

$$P>0,\ Q_{1i}>0,\ Q_{2i}>0,\ R_{2i}>0,$$
$$Q_1(s)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\theta(s))Q_{1i},\ Q_2(s)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\theta(s))Q_{2i},$$
$$R_1(\beta)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\theta(\beta))R_{1i},\ R_2(\beta)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\theta(\beta))R_{2i},$$
$$S(s)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\theta(s))S_i,\ S_i>0,\ R_{2i}>0. \tag{16}$$

对 $V_1(\xi_t)\sim V_6(\xi_t)$ 求导, 应用引理1, 整理可得

$$\dot V(\xi_t) < \eta^{\mathrm T}(t)\varOmega\eta(t) + \alpha\omega^{\mathrm T}(t)\omega(t) - \alpha\xi^{\mathrm T}(t)P\xi(t) - \int_{t-\boldsymbol d}^{t}\xi^{\mathrm T}(s)G^{\mathrm T}R_1(s)G\xi(s)\mathrm ds - (1-\tau)\int_{t-d(t)}^{t}\xi^{\mathrm T}(s)G^{\mathrm T}R_2(s)G\xi(s)\mathrm ds - \boldsymbol d\int_{t-\boldsymbol d}^{t}\dot\xi^{\mathrm T}(s)G^{\mathrm T}S(s)G\dot\xi(s)\mathrm ds. \tag{17}$$

其中

$$\eta^{\mathrm T}(t) = [\,\xi^{\mathrm T}(t)\ \ \xi^{\mathrm T}(t-d(t))G^{\mathrm T}\ \ \xi^{\mathrm T}(t-\boldsymbol d)G^{\mathrm T}\ \ \omega^{\mathrm T}(t)\,],$$

$$\varOmega = \begin{bmatrix} \varOmega_{11} & \varOmega_{12} & 0 & \varOmega_{14} \\ * & \varOmega_{22} & 0 & \varOmega_{24} \\ * & * & -Q_1(t-\boldsymbol d) & 0 \\ * & * & * & \varOmega_{44} \end{bmatrix},$$

$$\varOmega_{11} = PA_F(t) + A_F^{\mathrm T}(t)P + G^{\mathrm T}(Q_1(t)+Q_2(t))G + \boldsymbol dG^{\mathrm T}(R_1(t)+R_2(t))G + \varepsilon_1\boldsymbol N_1^{\mathrm T}\boldsymbol N_1 + \alpha P + \varepsilon_1^{-1}P\boldsymbol M\boldsymbol M^{\mathrm T}P + \boldsymbol d^2\varepsilon_2^{-1}\boldsymbol N_1^{\mathrm T}\boldsymbol N_1 + \boldsymbol d^2A_F^{\mathrm T}(t)G^{\mathrm T}\times (S^{-1}(t) - \varepsilon_2G\boldsymbol M\boldsymbol M^{\mathrm T}G^{\mathrm T})^{-1}GA_F(t),$$

$$\varOmega_{12} = PA_{Fd}(t) + \varepsilon_1\boldsymbol N_1^{\mathrm T}\boldsymbol N_2 + \boldsymbol d^2\varepsilon_2^{-1}\boldsymbol N_1^{\mathrm T}\boldsymbol N_2 + \boldsymbol d^2A_F^{\mathrm T}(t)\times G^{\mathrm T}(S^{-1}(t) - \varepsilon_2G\boldsymbol M\boldsymbol M^{\mathrm T}G^{\mathrm T})^{-1}GA_{Fd}(t),$$

$$\varOmega_{14} = PB_F(t) + \boldsymbol d^2A_F^{\mathrm T}(t)G^{\mathrm T}(S^{-1}(t) - \varepsilon_2G\boldsymbol M\boldsymbol M^{\mathrm T}G^{\mathrm T})^{-1}GB_F(t),$$

$$\varOmega_{22} = -(1-\tau)Q_2(t-d(t)) + \varepsilon_1\boldsymbol N_2^{\mathrm T}\boldsymbol N_2 + \boldsymbol d^2\varepsilon_2^{-1}\boldsymbol N_2^{\mathrm T}\boldsymbol N_2 + \boldsymbol d^2A_{Fd}^{\mathrm T}(t)G^{\mathrm T}(S^{-1}(t) - \varepsilon_2G\boldsymbol M\boldsymbol M^{\mathrm T}G^{\mathrm T})^{-1}GA_{Fd}(t),$$

$$\varOmega_{24} = \boldsymbol d^2A_{Fd}^{\mathrm T}(t)G^{\mathrm T}(S^{-1}(t) - \varepsilon_2G\boldsymbol M\boldsymbol M^{\mathrm T}G^{\mathrm T})^{-1}GB_F(t),$$

$$\varOmega_{44} = -\alpha I + \boldsymbol d^2B_F^{\mathrm T}(t)G^{\mathrm T}(S^{-1}(t) - \varepsilon_2G\boldsymbol M\boldsymbol M^{\mathrm T}G^{\mathrm T})^{-1}GB_F(t).$$

由式(17)可知

$$\dot V(\xi_t) < \eta^{\mathrm T}(t)\varOmega\eta(t) + \alpha\omega^{\mathrm T}(t)\omega(t) - \alpha\xi^{\mathrm T}(t)P\xi(t) - \alpha\int_{t-\boldsymbol d}^{t}\xi^{\mathrm T}(s)G^{\mathrm T}Q_1(s)G\xi(s)\mathrm ds - \alpha\int_{t-d(t)}^{t}\xi^{\mathrm T}(s)G^{\mathrm T}Q_2(s)G\xi(s)\mathrm ds + \int_{t-\boldsymbol d}^{t}\xi^{\mathrm T}(s)G^{\mathrm T}[\alpha Q_1(s) - R_1(s)]G\xi(s)\mathrm ds + \int_{t-d(t)}^{t}\xi^{\mathrm T}(s)G^{\mathrm T}[\alpha Q_2(s) - (1-\tau)R_2(s)]G\times \xi(s)ds - \boldsymbol d\int_{t-\boldsymbol d}^{t}\dot\xi^{\mathrm T}(s)G^{\mathrm T}S(s)G\dot\xi(s)\mathrm ds. \tag{18}$$

根据式(12),(13),(18)以及

$$\int_{t-\boldsymbol d}^{t}\int_{s}^{t}\xi^{\mathrm T}(\beta)[R(\beta) - \alpha Q(\beta)]\xi(\beta)\mathrm d\beta\mathrm ds \leqslant \boldsymbol d\int_{t-\boldsymbol d}^{t}\xi^{\mathrm T}(s)[R(s) - \alpha Q(s)]\xi(s)\mathrm ds,$$

可得

$$\dot V(\xi_t) < \eta^{\mathrm T}(t)\varOmega\eta(t) + \alpha\omega^{\mathrm T}(t)\omega(t) - \alpha V(\xi_t). \tag{19}$$

应用Schur补引理, 令 $\boldsymbol S(t) = S^{-1}(t)$, 由式(8), (9)和(11)易得 $\varOmega < 0$, 则

$$\dot V(\xi_t) < \alpha\omega^{\mathrm T}(t)\omega(t) - \alpha V(\xi_t). \tag{20}$$

对于所有 $\eta(t) \neq 0$, $\omega(t) = 0$, 可得 $\dot V(\xi_t) < 0$. 模糊滤波误差系统(7)渐近稳定.

定义 $\varXi = \{\xi : V(\xi_t) \leqslant 1\}$. 对于模糊滤波误差系统(7)的状态 $\xi(t)$, 在零初始条件下及 $\|\omega(t)\|_{L_\infty} \leqslant 1$, 易得 $\varXi$ 是一个不变集. 引入如下性能指标:

$$J = \frac{1}{\gamma}\|C_F(t)\xi(t)\|_2^2 - \alpha\xi^{\mathrm T}(t)P\xi(t) - (\gamma-\alpha)\omega^{\mathrm T}(t)\omega(t) = \begin{bmatrix}\xi(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\varTheta & 0\\ * & -(\gamma-\alpha)I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}, \tag{21}$$

其中 $\varTheta = \dfrac{1}{\gamma}C_F^{\mathrm T}(t)C_F(t) - \alpha P$.

由式(8)和(14)可知 $J < 0$, 即

$$\|C_F(t)\xi(t)\|_2^2 < \gamma[\alpha\xi^{\mathrm T}(t)P\xi(t) + (\gamma-\alpha)\omega^{\mathrm T}(t)\omega(t)].$$

由 $V(\xi_t) \leqslant 1$ 可得 $\xi^{\mathrm T}(t)P\xi(t) < 1$, 对于所有 $\|\omega(t)\|_{L_\infty} \leqslant 1$, 有

$$\|C_F(t)\xi(t)\|_2^2 < \gamma^2.$$

即 $\sup\limits_{\|\omega(t)\|_{L_\infty} \leqslant 1}\|e(t)\|_{L_\infty} < \gamma$. □

注 1 本文选取的Lyapunov-Krasovskii泛函包含了隶属度函数以及 $\xi(t)$, $\xi(t-d(t))$, $\xi(t-\boldsymbol d)$, $\dot\xi(t)$, $d(t)$ 和 $\boldsymbol d$ 的信息, 因而所得结果是时滞相关且模糊依赖的, 与传统的Lyapunov泛函相比, 具有较低的保守性. 定理1首次提出了基于T-S模糊模型的不确定时滞系统的峰值-峰值性能判据, 这为以后研究干扰信号峰值有界的实际工程系统(如阀门控制系统、飞机飞行控制系统、船舶航行控制系统等)提供了理论参考依据, 同时也扩展了一类鲁棒 L_1 滤波在非线性系统或T-S模糊系统中的应用, 具有重要的工程意义.

注 2 由定理1可知, 不等式(11)～(14)的解依赖于变量 α 的选取, 且有

$$PA_{Fij} + A_{Fij}^{\mathrm T}P + G^{\mathrm T}Q_{1i}G + G^{\mathrm T}Q_{2i}G + \boldsymbol dG^{\mathrm T}R_{1i}G + \boldsymbol dG^{\mathrm T}R_{2i}G + \alpha P + \varepsilon_1\boldsymbol N_{1i}^{\mathrm T}\boldsymbol N_{1i} < 0.$$

要确保不等式(11)存在正定解, 则 α 必须在区间 $(0, -2\max\mathrm{Re}(\lambda(A_{Fij})))$ 内取值. 因此, 峰值-峰值增益上界 γ 的最小化与 α 的选择有关. 为了获得更紧的界定, 需要对 α 执行一个线性搜索.

3 鲁棒 L_1 滤波器设计

基于定理1给出的结果, 采用变量替换法以及线

性矩阵不等式技术, 将不等式 (11) ∼ (14) 等价转换为 LMIs 的形式, 并最终得到有效的滤波器设计方法.

定理 2 给定标量 $\alpha > 0$, 如果存在正常数 ε_1, ε_2, 以及具有适当维数的矩阵 $X > 0$, $W > 0$, $Q_{1i} > 0$, $Q_{2i} > 0$, $R_{1i} > 0$, $R_{2i} > 0$, $\boldsymbol{Q}_{1k}$, $\boldsymbol{Q}_{2t}$, $\boldsymbol{S}_i$ 和 $\bar{A}_{fj}$, $\bar{B}_{fj}$, $\bar{C}_{fj}$, 使得

$$\begin{bmatrix} \varPhi_{11} & \varPhi_{12} & \varPhi_{13} & 0 & \varPhi_{15} & \varPhi_{16} & \varPhi_{17} & \varPhi_{18} \\ * & \varPhi_{22} & \varPhi_{23} & 0 & \varPhi_{25} & \varPhi_{26} & 0 & 0 \\ * & * & \varPhi_{33} & 0 & 0 & 0 & \varPhi_{37} & \varPhi_{38} \\ * & * & * & \varPhi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\alpha I & 0 & 0 & \varPhi_{58} \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \varPhi_{88} \end{bmatrix} < 0, \tag{22}$$

$$\alpha Q_{1i} - (1-\alpha\boldsymbol{d})R_{1i} < 0, \tag{23}$$

$$\alpha Q_{2i} - (1-\tau-\alpha\boldsymbol{d})R_{2i} < 0, \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha X & -\alpha W & 0 & L_i^{\mathrm{T}} \\ * & -\alpha W & 0 & -\bar{C}_{fj}^{\mathrm{T}} \\ * & * & -(\gamma-\alpha)I & 0 \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{25}$$

成立, 则模糊滤波误差系统 (7) 渐近稳定且满足 L_1 噪声抑制水平 γ. 并且, 滤波器参数为

$$A_{fj} = W^{-1}\bar{A}_{fj},\ B_{fj} = W^{-1}\bar{B}_{fj},\ C_{fj} = \bar{C}_{fj}. \tag{26}$$

其中

$$\begin{aligned}
\varPhi_{11} =& XA_i + A_i^{\mathrm{T}}X + \bar{B}_{fj}C_i + C_i^{\mathrm{T}}\bar{B}_{fj}^{\mathrm{T}} + \alpha X + \\
& Q_{1i} + Q_{2i} + \boldsymbol{d}R_{1i} + \boldsymbol{d}R_{2i} + \varepsilon_1 N_{1i}^{\mathrm{T}}N_{1i},\\
\varPhi_{12} =& \bar{A}_{fj} + A_i^{\mathrm{T}}W + C_i^{\mathrm{T}}\bar{B}_{fj}^{\mathrm{T}} + \alpha W,\\
\varPhi_{12} =& \bar{A}_{fj} + A_i^{\mathrm{T}}W + C_i^{\mathrm{T}}\bar{B}_{fj}^{\mathrm{T}} + \alpha W,\\
\varPhi_{13} =& XA_{di} + \bar{B}_{fj}C_{di} + \varepsilon_1 N_{1i}^{\mathrm{T}}N_{2i},\\
\varPhi_{15} =& XB_i + \bar{B}_{fj}D_i,\ \varPhi_{17} = \boldsymbol{d}N_{1i}^{\mathrm{T}},\ \varPhi_{18} = \boldsymbol{d}A_i^{\mathrm{T}},\\
\varPhi_{16} =& XM_{1i} + \bar{B}_{fj}M_{2i},\ \varPhi_{22} = \bar{A}_{fj} + \bar{A}_{fj}^{\mathrm{T}} + \alpha W,\\
\varPhi_{23} =& WA_{di} + \bar{B}_{fj}C_{di},\ \varPhi_{25} = WB_i + \bar{B}_{fj}D_i,\\
\varPhi_{26} =& WM_{1i} + \bar{B}_{fj}M_{2i},\ \varPhi_{37} = \boldsymbol{d}N_{2i}^{\mathrm{T}},\\
\varPhi_{33} =& -(1-\tau)\boldsymbol{Q}_{2t} + \varepsilon_1 N_{2i}^{\mathrm{T}}N_{2i},\ \varPhi_{38} = \boldsymbol{d}A_{di}^{\mathrm{T}},\\
\varPhi_{44} =& -\boldsymbol{Q}_{1k}, \varPhi_{58} = \boldsymbol{d}B_i^{\mathrm{T}},\ \varPhi_{88} = -\boldsymbol{S}_i + \varepsilon_2 M_{1i}M_{1i}^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

证明 1) 必要性. 假设存在 $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $P > 0$, $Q_{1i} > 0$, $Q_{2i} > 0$, $R_{1i} > 0$, $R_{2i} > 0$, $\boldsymbol{Q}_{1k}$, $\boldsymbol{Q}_{2t}$ 和 $\boldsymbol{S}_i$, 使得不等式 (11) ∼ (14) 成立. 设矩阵 P 和 U 具有如下形式:

$$P = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Z^{-1}Y^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

其中: $X > 0$, $Z > 0$. 令 $\varDelta_1 = \mathrm{diag}\{U, I, I, I, I, I, I\}$, $\varDelta_2 = \mathrm{diag}\{U, I, I\}$, 分别用 $\varDelta_1$, U, U 和 $\varDelta_2$ 对不等式 (11) ∼ (14) 进行全等变换, 定义

$$\begin{aligned} &\bar{A}_f(t) = YA_f(t)Z^{-1}Y^{\mathrm{T}},\ \bar{B}_f(t) = YB_f(t),\\ &\bar{C}_f(t) = C_f(t)Z^{-1}Y^{\mathrm{T}},\ W = YZ^{-1}Y^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{28}$$

根据式 (3), (6), (8) 和 (9), 即可得不等式 (22) ∼ (25). 定理的必要性成立.

2) 充分性. 假设存在正常数 ε_1, ε_2, 矩阵 $X > 0$, $W > 0$, $Q_{1i} > 0$, $Q_{2i} > 0$, $R_{1i} > 0$, $R_{2i} > 0$, $\boldsymbol{Q}_{1k}$, $\boldsymbol{Q}_{2t}$, $\boldsymbol{S}_i$ 以及 $\bar{A}_{fj}$, $\bar{B}_{fj}$, $\bar{C}_{fj}$, 使得不等式 (22) ∼ (25) 成立. 选取正定矩阵 Z 和可逆矩阵 Y 满足 $W = YZ^{-1}Y^{\mathrm{T}}$, 定义矩阵 P 如式 (27). 令 $\varDelta_3 = \mathrm{diag}\{I, Y^{-\mathrm{T}}Z, I, I, I, I, I, I\}$, $\varDelta_4 = \mathrm{diag}\{I, Y^{-\mathrm{T}}Z, I, I\}$, 分别用 $\varDelta_3$、$\varDelta_4$ 对不等式 (22) 和 (25) 进行全等变换, 易得不等式 (11) 和 (14) 成立. □

根据式 (22) ∼ (25), 结合 LMI 凸优化思想,可得如下推论.

推论 1 选取 γ 作为优化变量, 则基于 T-S 模糊模型的不确定时滞系统鲁棒 L_1 滤波器设计可通过如下凸优化问题进行求解:

$$\min \gamma,\ \text{s.t.}(22) \sim (25).$$

4 仿真示例

考虑基于 T-S 模糊模型描述的不确定时滞系统 (1), 其系统矩阵如下 ($r = 2$):

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.1 & 0.1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -1.9 & 0 \\ -0.2 & -1.1 \end{bmatrix},$$

$$A_{d1} = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.1 \\ -0.8 & -0.9 \end{bmatrix},\ A_{d2} = \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ -1.1 & -1.2 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix},\ C_{d1} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ C_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ C_{d2} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ L_2 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ M_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = 0.3,\ D_2 = 0.6,\ M_{21} = 0.8,\ M_{22} = 0.6,$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix},\ N_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ N_{12} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$N_{21} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \end{bmatrix},\ N_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 \end{bmatrix}.$$

选取 $\varLambda_i(t) = \cos t$, 根据定理 2 求解得到模糊滤波误差系统的最优 L_1 性能 $\gamma^* = 0.286\,8$ ($\alpha = 0.2$), 对应的模糊滤波器参数为

$$A_{f1} = \begin{bmatrix} -5.666\,3 & 0.159\,0 \\ 0.930\,8 & -5.739\,2 \end{bmatrix},\ B_{f1} = \begin{bmatrix} -3.415\,5 \\ 0.212\,9 \end{bmatrix},$$

$$A_{f2}=\begin{bmatrix}-2.0560 & -1.9473\\ -0.6528 & -6.1544\end{bmatrix},\ B_{f2}=\begin{bmatrix}-0.5055\\ -0.7512\end{bmatrix},$$

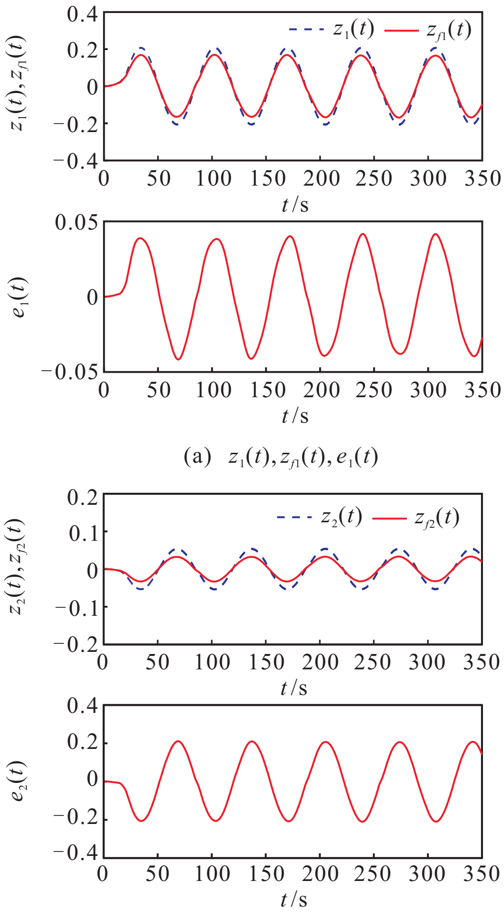
$C_{f1}=[\,-0.9598\ \ 0.4254\,]$, $C_{f2}=[\,0.1886\ \ -0.0869\,]$.

选择隶属度函数如下:

$$F_1(x_1(t))=\mathrm{e}^{-0.5x_1^2(t)},$$

$$F_2(x_1(t))=1-F_1(x_1(t)).$$

给出初始状态 $x(0)=[\,0\ \ 0\,]^{\mathrm{T}}$, $x_f(0)=[\,0\ \ 0\,]^{\mathrm{T}}$, 设外部扰动满足峰值有界, 且 $\omega(t)=0.5\sin(0.1\pi t)$. 通过仿真得到滤波估计信号 $z(t)$ 和它的估计值 $z_f(t)$, 以及估计误差 $e(t)$ 的曲线, 如图 1 所示. 从图 1 中可以看出, 所设计的模糊滤波器能够较好地估计 $z(t)$, 表明本文所提出的方法是有效的.



(a) $z_1(t), z_{f1}(t), e_1(t)$

(b) $z_2(t), z_{f2}(t), e_2(t)$

图 1 滤波估计及估计误差

5 结 论

针对 T-S 模糊模型描述的一类具有不确定性和时变时滞的非线性系统, 基于 LMI 的可解性给出了一种时滞相关且模糊依赖意义下的鲁棒 L_1 滤波器设计方法. 通过该方法所设计的模糊滤波器均能使模糊滤波误差系统渐近稳定且具有指定的 L_1 噪声抑制水平. 本文所得的结果为鲁棒 L_1 滤波在非线性系统以及实际工程系统中的应用提供了理论借鉴, 仿真结果验证了所提出方法的可行性和有效性.

参考文献(References)

[1] Gao H J, Lam J, Shi P, et al. Parameter-dependent filter design with guaranteed H_∞ performance[J]. IEE Proc of Control Theory and Applications, 2005, 152(5): 531-537.

[2] Liu J L, Gu Z, Tian E G, et al. New results on H_∞ filter design for nonlinear systems with time-delay through a T-S fuzzy model approach[J]. Int J of Systems Science, 2012, 43(3): 426-442.

[3] 夏建伟, 徐胜元, 邹云, 等. 连续随机时滞系统 L_2-L_∞ 滤波设计[J]. 控制与决策, 2008, 23(5): 597-600.
(Xia J W, Xu S Y, Zou Y, et al. L_2-L_∞ filter design for stochastic time-delay systems[J]. Control and Decision, 2008, 23(5): 597-600.)

[4] Li Y H, Lam J, Luo X L. Convex optimization approaches to robust L_1 fixed-order filtering for polytopic systems with multiple delays[J]. Circuits Systems and Signal Processing, 2008, 27(1): 1-22.

[5] Li Y H, Liang Y, Luo X L. Delay-dependent L_1 filtering for LPV systems with parameter-varying delays[J]. J of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2011, 133(4): 1-4.

[6] Li Y H, Shi Q, Karimi H R. Robust L_1 fixed-order filtering for switched LPV systems with parameter-dependent delays[J]. J of the Franklin Institute, 2015, 352(3): 761-775.

[7] Li Y H, Zhou X J. T-S fuzzy model-based approximation and filter design for stochastic time-delay systems with Hankel norm criterion[J]. Abstract and Applied Analysis, 2014: 1-12.

[8] Su Y K, Chen B, Lin C, et al. A new fuzzy H_∞ filter design for nonlinear continuous-time dynamic systems with time-varying delays[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160(24): 3539-3549.

[9] Wu L G, Wang C H. Fuzzy filtering of nonlinear fuzzy stochastic systems with time-varying delay[J]. Signal Processing, 2009, 89(9): 1739-1753.

[10] Gong C, Su B K. Robust L_2-L_∞ filtering of convex polyhedral uncertain time-delay fuzzy systems[J]. Int J of Innovative Computing, Information and Control, 2008, 4(4): 793-802.

(责任编辑：孙艺红)