

连续线性切换系统的镇定慢切换设计

熊建栋¹, 刘永奇², 沈志萍¹, 伍俊³

(1. 河南师范大学 a. 数学与信息科学学院, b. 大数据统计分析与优化控制河南省工程实验室, 河南 新乡 453007; 2. 北京师范大学珠海分校 应用数学学院, 广东 珠海 519087; 3. 佛山科学技术学院 机械与电气工程学院, 广东 佛山 528000)

摘要: 针对含有两个不稳定子系统的线性切换系统, 设计一种包含时间驱动和状态驱动两个环节的切换法则, 使线性切换系统稳定. 在该切换法则下, 系统的类 Lyapunov 函数在两个环节都不需要严格单调递减, 使得系统在每个子系统有更长的驻留时间, 从而有效降低系统的切换频率. 在适当的假设条件下, 带时变扰动的线性切换系统在该切换信号下具有良好的鲁棒稳定性. 基于此, 当系统可观测时, 进一步设计了基于观测器的混合切换法则, 实现了系统的鲁棒稳定.

关键词: 切换线性系统; 切换频率; 观测器; 鲁棒性

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Stabilizing slow-switching strategy for continuous-time switched linear systems

XIONG Jian-dong¹, LIU Yong-qi², SHEN Zhi-ping¹, WU Jun³

(1a. College of Mathematics and Information Science, 1b. Henan Engineering Laboratory for Big Data Statistical Analysis and Optimization Control, He'nan Normal University, Xinxiang 453007, China; 2. College of Applied Mathematics, Beijing Normal University, Zhuhai 519087, China; 3. School of Mechanical and Electrical Engineering, Foshan University, Foshan 528000, China. Correspondent: WU Jun, E-mail: susanwuj@163.com)

Abstract: By combining a time-driven mechanism with a state-driven mechanism, a new switching strategy is designed to stabilize the switched linear systems with two unstable subsystems. Under this strategy, the Lyapunov-like function of the system is not necessary to be decreasing in both time-driven and state-driven mechanisms, which permits the subsystems to have a longer dwell-time to reduce the switching frequency remarkably. For suitable assumptions on the system dynamics, the system with time-varying disturbances has a good robust stability under the designed switching strategy. Moreover, when the system is observable, an observer-based combined switching law is designed, which robustly stabilizes the perturbed systems.

Keywords: switched linear system; switching frequency; observer; robustness

0 引言

随着现代社会信息化以及集成化的提高, 切换系统已广泛应用于现实的工业生产和生活中, 例如智能交通系统、电力电子系统、飞行器的纵向控制系统等^[1]. 另外, 控制技术的不断发展, 人们所面对的控制对象越来越复杂. 此时, 传统的线性以及非线性分析与设计方法已不能满足人们的需要. 因此, 自 20 世纪 90 年代初以来, 切换系统的研究便成为控制界的研究热点之一^[2-5].

线性切换系统作为一类典型且又相对简单的切换系统, 由有限个线性子系统和协调它们运行的切换法则组成. 切换法则是切换系统的一个重要特性, 往往对系统的稳定性有直接影响, 即使切换系统的子系统都不稳定, 通过选择适当的切换法则也可使系统稳定. 因此, 切换法则的设计是切换系统镇定性研究的一个重要分支. 切换信号主要是基于各种 Lyapunov 函数进行设计的. 文献 [6-7] 基于共同二次 Lyapunov 函数根据系统状态反馈设计切换信号使系统二次稳

收稿日期: 2015-04-07; **修回日期:** 2015-07-15.

基金项目: 河南师范大学博士启动基金项目(qd13038); 广东省教育厅项目(2014KTSCX156); 佛山市高校和医院科研基础平台建设项目(2014AG10018); 河南省科技攻关项目(162102210265).

作者简介: 熊建栋(1982—), 男, 讲师, 博士, 从事混杂系统的稳定性分析与设计等研究; 伍俊(1985—), 女, 讲师, 博士, 从事多平衡点混杂系统稳定性分析与设计研究.

定. 多 Lyapunov 函数法^[8-9], 分片二次 Lyapunov 函数法^[10]以及复合二次 Lyapunov 函数法^[11-12]等都可有效降低基于共同 Lyapunov 函数法的保守性. 最近, 文献 [13-14] 提出了一种基于状态反馈的分片路径切换法则使系统指数稳定, 并指出该方法对任意可镇定的线性切换系统是普适的.

在保证稳定性的基础上, 切换系统的切换频率是衡量其可行性的一个重要问题. 因为在一些物理系统中, 高频切换或抖振会缩短关键部件寿命甚至造成系统损坏, 如数字传输网络^[15]. 然而, 如何设计使系统稳定且具有较低切换频率的切换法则是具有挑战性的问题, 相关的文献相对较少. 当所有的子系统都稳定时, Morse^[16]指出只要切换频率足够慢, 即可保证系统稳定. 在此基础上, Hespanha 等^[17]指出只要系统在所有子系统的平均驻留时间足够大, 即使系统在某个时间段有较高的切换频率, 也可保证系统是指数稳定的. 当系统同时包含稳定子系统和不稳定子系统时, 在考虑慢切换的同时还要求切换系统在不稳定的子系统上驻留的时间不能过长^[18-19]. 在对状态空间分割的基础上设计了驻留时间切换法则, 有效降低了执行器的切换频率^[20]. 另外, 切换法则对系统扰动的鲁棒性也是设计所关心的一个重要问题. 对依赖状态反馈的切换法则而言, 即使对标称系统良定的切换法则, 在扰动下也可能出现抖振等现象^[21]. Sun^[15]将驻留时间切换法则和状态反馈切换法则相结合设计了一种具有较低切换频率的切换法则, 且该切换法则具有对外部扰动良好的鲁棒稳定性. 最近, 文献 [22-23] 分别提出两种混合切换法则, 只要求 Lyapunov 函数在切换时刻下降, 降低了文献 [15] 结果的保守性. 在 Sun 的结果基础上, 笔者设计一种新的混合切换法则, 该切换法则不仅可以保证线性切换系统在时间驱动环节有更长的驻留时间, 而且在状态反馈驱动环节类 Lyapunov 函数也可以增加. 因此, 系统的切换频率得以进一步降低. 此外, 系统在该切换法则下对扰动也具有良好的鲁棒稳定性.

1 预备知识

考虑如下的线性连续切换系统:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是状态变量, $\sigma(t) \in \{1, 2\}$ 是分段常值切换法则, A_1 和 $A_2 \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是相应子系统的系数矩阵.

对于切换法则 σ , 如果有 $\lim_{s \rightarrow t^-} \sigma(s) \neq \sigma(t)$, 则时刻 t 称为切换时刻或者跳变时刻. 依次排列的切换时刻 $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ 被称为切换时刻序列. 相应地, 称 $\{\sigma(t_0), \sigma(t_1), \sigma(t_2), \dots\}$ 为切换指标序列, $\{(t_0, \sigma(t_0)),$

$(t_1, \sigma(t_1)), \dots\}$ 为切换法则序列. 如果对于任意长度的时间, 切换的次数都是有限的, 则称切换法则是良定的.

定义 1 n 阶实矩阵 B 称为 Schur 稳定的, 当且仅当矩阵 B 的谱半径小于 1.

考虑系统 (1) 的子系统都是不稳定的, 但满足如下假设.

假设 1 存在两个正实数 τ_1 和 τ_2 , 使得矩阵 $e^{A_2\tau_2}e^{A_1\tau_1}$ Schur 稳定.

假设 2 存在两个正实数 τ_3 和 τ_4 , 使得矩阵 $e^{A_1\tau_4}e^{A_2\tau_3}$ Schur 稳定.

假设 3 存在两个正实数 $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1)$ 及正定矩阵 P , 使得

$$(e^{A_2\tau_2}e^{A_1\tau_1})^T P (e^{A_2\tau_2}e^{A_1\tau_1}) \leq (1 - \delta_1)P, \quad (2)$$

$$(e^{A_1\tau_4}e^{A_2\tau_3})^T P (e^{A_1\tau_4}e^{A_2\tau_3}) \leq (1 - \delta_2)P \quad (3)$$

成立.

注 1 根据矩阵理论, 两个方阵 A, B 的乘积 AB 和 BA 有相同的特征值. 从而, 如果假设 1 成立, 则当 $\tau_1 = \tau_4, \tau_2 = \tau_3$ 时, 假设 2 亦成立. 根据假设, 系统 (1) 对于任意的初始状态至少存在一个基于时间驱动的周期切换法则, 可使系统稳定. 当 $\tau_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 都非常小时, 系统是高频切换, 容易引起系统的抖振. 对于假设 3, 要使正定矩阵 P 同时满足式 (2) 和 (3) 有一定的保守性. 对于满足假设 1 和假设 2 的 $\tau_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 将 δ_1 和 δ_2 进行二维搜索, 求解相应的线性矩阵不等式即可得到满足条件的正定矩阵 P .

对于线性切换系统 (1), 由式 (2) 和 (3), 可选择一个类 Lyapunov 函数为

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t),$$

并定义矩阵

$$Q_i = A_i^T P + P A_i, \quad i = 1, 2.$$

记 λ_1, λ_n 分别为正定矩阵 P 的最小和最大特征值, $\|\cdot\|$ 为矩阵或向量的欧氏范数, 即 2-范数.

2 主要结果

本节设计两个使系统 (1) 稳定的慢切换法则, 并考虑在该切换法则下系统对扰动的鲁棒稳定性.

2.1 切换法则及稳定性分析

对于系统 (1), 定义递归的切换法则如下:

$$t_{k+1} = \begin{cases} \tau_1 + \min\{\inf\{t \geq t_k + \tau_4 : x^T(t)Q_1x(t) > r_1x^T(t)x(t)\}, t_k + \tau_4 + T_1\}, & \sigma(t_k) = 1; \\ \tau_3 + \min\{\inf\{t \geq t_k + \tau_2 : x^T(t)Q_2x(t) > r_2x^T(t)x(t)\}, t_k + \tau_2 + T_2\}, & \sigma(t_k) = 2; \end{cases}$$

$$\sigma(t_{k+1}) = \begin{cases} 2, & \sigma(t_k) = 1; \\ 1, & \sigma(t_k) = 2. \end{cases} \quad (4)$$

其中 r_1, r_2, T_1, T_2 是给定的正实数. 对于系统的初始状态 $x(t_0) = x_0$, 切换信号按如下规则初始化:

$$\sigma(t_0) = \begin{cases} 1, & x_0^T Q_1 x_0 \leq x_0^T Q_2 x_0; \\ 2, & x_0^T Q_2 x_0 < x_0^T Q_1 x_0. \end{cases} \quad (5)$$

若系统服从此切换法则, 则由上述定义, 系统将受一种基于时间和状态的混合切换机制所控制. 对于任意非负的整数 k , 在时间区间 $[t_{2k+1} - \tau_1, t_{2k+1} + \tau_2)$ 和 $[t_{2k+2} - \tau_3, t_{2k+2} + \tau_4)$ 内, 切换是受时间驱动的, 与系统状态无关. 另一方面, 在时间区间 $[t_{2k+1} + \tau_2, t_{2k+2} - \tau_3)$ 和 $[t_{2k+2} + \tau_4, t_{2k+3} - \tau_1)$ 内, 切换是状态驱动的, 与系统的状态直接相关. 另外, 注意到在此切换机制下, 只要在时间 $[t_{2k+1} - \tau_1, t_{2k+3} - \tau_1)$ 内, 仅需类 Lyapunov 函数 $V(x(t))$ 满足 $V(x(t_{2k+1} - \tau_1)) > \lim_{t \rightarrow t_{2k+3} - \tau_1} V(x(t))$, 而不需要其严格递减的条件.

接下来, 研究上述切换法则作用下的系统的稳定性, 有如下结论.

定理 1 在假设 1 ~ 假设 3 成立时, 如果有

$$T_1 < -\frac{\lambda_1 \ln(1 - \delta_2)}{r_1}, T_2 < -\frac{\lambda_1 \ln(1 - \delta_1)}{r_2}, \quad (6)$$

则在切换法则 (4) 作用下系统 (1) 是稳定的.

证明 为了分析方便, 将时间区间 $[t_0, +\infty)$ 划分为一系列时间区间的集合 $\bigcup_{k=0}^{\infty} [t_{2k+1} - \tau_1, t_{2k+3} - \tau_1) \cup [t_0, t_1 - \tau_1)$.

首先, 考虑 $\sigma(t_0) = 1$ 的情形, 这意味着对于 $k = 0, 1, \dots$, 均有 $\sigma(t_{2k}) = 1$.

考虑时间区间 $[t_{2k+1} - \tau_1, t_{2k+3} - \tau_1)$, 根据切换法则 (4) 及不等式 (2) 和 (3), 显然在区间 $[t_{2k+1} - \tau_1, t_{2k+1} + \tau_2)$ 和 $[t_{2k+2} - \tau_3, t_{2k+2} + \tau_4)$ 内, 有如下不等式成立:

$$V(x(t_{2k+1} + \tau_2)) \leq (1 - \delta_1)V(x(t_{2k+1} - \tau_1)), \quad (7)$$

$$V(x(t_{2k+2} + \tau_4)) \leq (1 - \delta_2)V(x(t_{2k+2} - \tau_3)). \quad (8)$$

另一方面, 当 $t \in [t_{2k+1} + \tau_2, t_{2k+2} - \tau_3) \cup [t_{2k+2} + \tau_4, t_{2k+3} - \tau_1)$ 时, 有

$$\frac{dV}{dt} = x^T(t)Q_{\sigma(t)}x(t) \leq \frac{r_{\sigma(t)}}{\lambda_1}V(x(t)),$$

从而, 有下列不等式成立:

$$V(x(s_2)) \leq e^{\frac{r_2}{\lambda_1}(s_2 - s_1)}V(x(s_1)),$$

$$\forall s_1, s_2 \in [t_{2k+1} + \tau_2, t_{2k+2} - \tau_3); \quad (9)$$

$$V(x(s_2)) \leq e^{\frac{r_1}{\lambda_1}(s_2 - s_1)}V(x(s_1)),$$

$$\forall s_1, s_2 \in [t_{2k+2} + \tau_4, t_{2k+3} - \tau_1). \quad (10)$$

记 $d_1 = \tau_1 + \tau_4, d_2 = \tau_2 + \tau_3$. 根据上述不等式

(7) ~ (10) 可得

$$\begin{aligned} & V(x(t_{2k+3} - \tau_1)) \leq \\ & (1 - \delta_2)e^{\frac{r_1}{\lambda_1}(t_{2k+3} - t_{2k+2} - d_1)}V(x(t_{2k+2} - \tau_3)); \\ & V(x(t_{2k+2} - \tau_3)) \leq \\ & (1 - \delta_1)e^{\frac{r_2}{\lambda_1}(t_{2k+2} - t_{2k+1} - d_2)}V(x(t_{2k+1} - \tau_1)). \end{aligned}$$

从而, 可得

$$V(x(t_{2k+3} - \tau_1)) \leq e^{\alpha_{k+1}}V(x(t_{2k+1} - \tau_1)), \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} = & \frac{r_1}{\lambda_1}(t_{2k+3} - t_{2k+2} - d_1) + \ln(1 - \delta_2) + \\ & \frac{r_2}{\lambda_1}(t_{2k+2} - t_{2k+1} - d_2) + \ln(1 - \delta_1), \\ & k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

注意到, 根据切换法则 (4), 每次受状态驱动机制作用的时间间隔最多为 T_1 或 T_2 , 即

$$t_{2k+3} - t_{2k+2} - d_1 \leq T_1,$$

$$t_{2k+2} - t_{2k+1} - d_2 \leq T_2.$$

在条件 (6) 作用下, 可得 $\alpha_k \leq -c, k = 1, 2, \dots$, 其中

$$c = -\left[\frac{T_1 r_1}{\lambda_1} + \ln(1 - \delta_2) + \frac{T_2 r_2}{\lambda_1} + \ln(1 - \delta_1)\right]$$

为一个固定的正值.

根据式 (11) 及多次迭代, 可得

$$\begin{aligned} V(x(t_{2k+1} - \tau_1)) & \leq e^{\sum_{i=1}^k \alpha_i} V(x(t_1 - \tau_1)) \leq \\ & M e^{-kc} V(x(t_0)), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} M = & \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \exp\{2 \max\{\|A_1\|(t_1 - \tau_1 - t_0), \\ & \|A_2\|(t_1 - \tau_3 - t_0)\}\}. \end{aligned}$$

进一步, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|x(t_{2k+1} - \tau_1)\| \rightarrow 0$.

对于任意 $t \geq 0$, 必然存在非负整数 k , 使其满足 $t \in [t_{2k+1} - \tau_1, t_{2k+3} - \tau_1)$, 则在此时间区间内有

$$\begin{aligned} \|x(t)\| & \leq \\ & e^{\max(\|A_1\|, \|A_2\|)(t - t_{2k+1} + \tau_1)} \|x(t_{2k+1} - \tau_1)\|. \end{aligned}$$

显然, $e^{\max(\|A_1\|, \|A_2\|)(t - t_{2k+1} + \tau_1)}$ 有界, 从而有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0. \quad (12)$$

同理可得, 对于 $\sigma(t_0) = 2$ 的情况, 仍可推出式 (12) 成立. 因此, 系统是渐近稳定的, 或者说, 切换法则 (4) 可镇定系统 (1). \square

注 2 如果 $r_1 \geq \|Q_1\|$ 且 $r_2 \geq \|Q_2\|$, 则在切换法则 (4) 作用下, 切换将退化为周期切换, 且系统的切换周期为 $\sum_{i=1}^4 \tau_i + T_1 + T_2$. 另外, 当 $r_i \leq 0$, 设 $T_i = \infty$, 可知系统的类 Lyapunov 函数会在状态驱动的切换

机制下沿着轨迹不增. 因此, 文献[15]中的切换法则是(4)的一类特殊情况.

注 3 $\alpha_k = 0$ 是保证系统稳定的临界条件, 因此, 式(4)可能会在极小的扰动下变得不收敛.

2.2 鲁棒性分析

考虑如下的受扰系统:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + f_{\sigma}(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (13)$$

其中 $f_i: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$, $i = 1, 2$ 是系统扰动, 且 $f_i(\cdot)$ 分段连续.

定义

$$N_f = \sup_{t \geq t_0} \{\|f(t)\|\}.$$

如果 $N_f < +\infty$, 则称 $f(\cdot)$ 为有界; 如果 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|f(t)\| = 0$, 则称 $f(\cdot)$ 为收敛; 如果存在正实数 α 和 β , 使得 $\|f(t)\| \leq \beta \exp(-\alpha(t - t_0))$, $\forall t \in [t_0, +\infty)$ 成立, 则称 $f(\cdot)$ 为指数收敛. 关于系统的鲁棒性, 有如下结论.

定理 2 对于受扰系统(13), 若假设 1 ~ 假设 3 成立, 则当

$$T_1 + T_2 < -\frac{\lambda_1}{2r} \left(\ln \left(1 - \frac{\delta_1}{2} \right) + \ln \left(1 - \frac{\delta_2}{2} \right) \right) \quad (14)$$

时, 对于有界扰动 $f(t)$, 系统在式(4)作用下有界.

证明 当 $\sigma(t_0) = 1$ 和 $\sigma(t_0) = 2$ 时, 证明过程类似, 因此主要介绍 $\sigma(t_0) = 1$ 情形下的证明.

引入如下符号:

$$\mu = \tau_1 + \tau_2, \quad \nu = \tau_3 + \tau_4,$$

$$\tau = \mu + \nu + T_1 + T_2, \quad p = \|P\|,$$

$$q = \max\{\|Q_1\|, \|Q_2\|\}, \quad r = \max\{r_1, r_2\},$$

$$\theta_1 = \|e^{A_2 \tau_2}\| \|e^{A_1 \tau_1}\|, \quad \theta_2 = \|e^{A_1 \tau_4}\| \|e^{A_2 \tau_3}\|,$$

且

$$\eta = -\frac{\ln \left(1 - \frac{\delta_1}{2} \right) + \ln \left(1 - \frac{\delta_2}{2} \right) + \frac{2r(T_1 + T_2)}{\lambda_1}}{2\tau},$$

$$\varpi = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1} e^{\frac{(q+r)(\mu+\nu)+2\tau(r+\eta)}{\lambda_1}}}.$$

为了根据系统初始状态和扰动来估计系统状态模的上界, 引入如下函数:

$$\rho_1(t) = \max \left\{ \|x_0\| e^{-\eta(t-t_0)}, \frac{2p}{r} \|f(t)\|, \frac{8p\theta_1^2}{\delta_1 \lambda_1} \int_t^{t+\mu} \|f(\xi)\| d\xi, \frac{8p\theta_2^2}{\delta_2 \lambda_1} \int_t^{t+\nu} \|f(\xi)\| d\xi \right\}.$$

显然, ρ_1 分段连续. 进一步, 在 ρ_1 不连续处重新定义, 使其左连续, 可得

$$\|x(t)\| \leq \rho(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varpi \sup_{s \in [t_0, t]} \rho_1(s) \exp(-\eta(t-s)), \quad \forall t \geq t_0. \quad (15)$$

根据反证法, 如果式(15)不成立, 则必在某个时刻 $t^* > t_0$, 有 $\|x(t^*)\| > \rho(t^*) > \rho_1(t^*)$. 由于 $\|x(t_0)\| \leq \rho_1(t_0)$, 并根据系统状态的连续性, 必然存在一时

刻 $s \in [t_0, t^*)$ 使得下列不等式同时成立:

$$\begin{cases} \|x(s)\| \leq \rho_1(s), \\ \|x(t)\| \geq \rho_1(t), \quad \forall t \in (s, t^*). \end{cases} \quad (16)$$

另外, 也必存在一正整数 k , 使得 $s \in [t_{2k+1} - \tau_1, t_{2k+3} - \tau_1)$. 结合不等式(16), 可得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(x(t)) &= x^T(t)Q_{\sigma(t)}x(t) + 2f^T(t)Px(t) \leq \\ &2r\|x(t)\|^2 \leq \frac{2r}{\lambda_1}V(x(t)) \end{aligned} \quad (17)$$

对 $\forall t \in (s, t^*) \cap ([t_{2k+1} + \tau_2, t_{2k+2} - \tau_3] \cup [t_{2k+2} + \tau_4, t_{2k+3} - \tau_1])$ 成立, 以及

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(x(t)) &= x^T(t)Q_{\sigma(t)}x(t) + 2f^T(t)Px(t) \leq \\ &(q+r)\|x(t)\|^2 \leq \frac{q+r}{\lambda_1}V(x(t)) \end{aligned} \quad (18)$$

对 $\forall t \in (s, t^*) \cap ([t_{2k+1} - \tau_1, t_{2k+1} + \tau_2] \cup [t_{2k+2} - \tau_3, t_{2k+2} + \tau_4])$ 成立. 因此, 对于

$$s_1, s_2 \in (s, t^*) \cap [t_{2k+1} - \tau_1, t_{2k+3} - \tau_1),$$

可得

$$V(x(s_2)) \leq e^{\frac{(q+r)(\mu+\nu)}{\lambda_1} + \frac{2r}{\lambda_1}(s_2-s_1)}V(x(s_1)). \quad (19)$$

与此同时, 如果 $[t_{2k+1} - \tau_1, t_{2k+1} + \tau_2] \in (s, t^*)$, 则有

$$\begin{aligned} x(t_{2k+1} + \tau_2) &= \\ &e^{A_2 \tau_2} e^{A_1 \tau_1} x(t_{2k+1} - \tau_1) + \\ &e^{A_2 \tau_2} \int_{t_{2k+1} - \tau_1}^{t_{2k+1}} e^{A_1(t_{2k+1} - \xi)} f(\xi) d\xi + \\ &\int_{t_{2k+1}}^{t_{2k+1} + \tau_2} e^{A_2(t_{2k+1} + \tau_2 - \xi)} f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

由 $\rho_1(t_{2k+1} - \tau_1) \leq \|x(t_{2k+1} - \tau_1)\|$, $p \geq \lambda_1$, $\delta_1 \in (0, 1)$ 可得

$$\begin{aligned} V(x(t_{2k+1} + \tau_2)) &= \\ &x^T(t_{2k+1} + \tau_2)Px(t_{2k+1} + \tau_2) \leq \\ &(1 - \delta_1)V(x(t_{2k+1} - \tau_1)) + 2\theta_1^2 p \|x(t_{2k+1} - \tau_1)\| \times \\ &\int_{t_{2k+1} - \tau_1}^{t_{2k+1} - \tau_1 + \mu} \|f(\xi)\| d\xi + \\ &\theta_1^2 p \left(\int_{t_{2k+1} - \tau_1}^{t_{2k+1} - \tau_1 + \mu} \|f(\xi)\| d\xi \right)^2 \leq \\ &\left(1 - \delta_1 + \frac{\delta_1}{4} + \frac{\delta_1^2 \lambda_1}{16p\theta_1^2} \right) V(x(t_{2k+1} - \tau_1)) < \\ &\left(1 - \frac{\delta_1}{2} \right) V(x(t_{2k+1} - \tau_1)), \end{aligned}$$

类似地, 如果 $[t_{2k+2} - \tau_3, t_{2k+2} + \tau_4] \in (s, t^*)$, 可得

$$V(x(t_{2k+2} + \tau_4)) < \left(1 - \frac{\delta_2}{2} \right) V(x(t_{2k+2} - \tau_3)).$$

根据上述结论及式(17)和(18), 可得

$$\begin{aligned} V(x(t_{2k+3} - \tau_1)) &\leq \\ &\left(1 - \frac{\delta_1}{2} \right) \left(1 - \frac{\delta_2}{2} \right) \exp \left[\frac{2r}{\lambda_1}(t_{2k+3} - \right. \end{aligned}$$

$$t_{2k+1} - d_1 - d_2) \Big] V(x(t_{2k+1} - \tau_1)).$$

根据条件(14)及 $t_{2k+2} - t_{2k+1} - d_2 \leq T_2$, $t_{2k+3} - t_{2k+2} - d_1 \leq T_1$, $\tau \geq t_{2k+3} - t_{2k+1}$, 可推得存在一正数 η 使得下式成立:

$$\begin{aligned} & V(x(t_{2k+3} - \tau_1)) \leq \\ & \left(1 - \frac{\delta_1}{2}\right) \left(1 - \frac{\delta_2}{2}\right) e^{\frac{2\tau}{\lambda_1}(T_1+T_2)} V(x(t_{2k+1} - \tau_1)) \leq \\ & e^{-2\eta\tau} V(x(t_{2k+1} - \tau_1)) \leq \\ & e^{-2\eta(t_{2k+3}-t_{2k+1})} V(x(t_{2k+1} - \tau_1)). \end{aligned}$$

如果 $t^* > t_{2k+3} - \tau_1$, 则令 l 为满足 $t^* \geq t_{2(k+l)+3} - \tau_1$ 的最大非负整数. 根据式(19), 可得

$$\begin{aligned} & V(x(t^*)) \leq \\ & \exp\left[\frac{(q+r)(\mu+\nu)}{\lambda_1} + \frac{2(r+\lambda_1\eta)}{\lambda_1}\tau\right] \times \\ & \exp(-2\eta(t^* - t_{2k+3} + \tau_1)) V(x(t_{2k+3} - \tau_1)) \leq \\ & \exp\left[\frac{2(q+r)(\mu+\nu)}{\lambda_1} + \frac{4(r+\lambda_1\eta)}{\lambda_1}\tau\right] \times \\ & \exp(-2\eta(t^* - s)) V(x(s)). \end{aligned}$$

因此, 可推出如下结论:

$$\begin{aligned} \|x(t^*)\| & \leq \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} e^{\frac{(q+r)(\mu+\nu)+2\tau(r+\eta)}{\lambda_1}} e^{-\eta(t^*-s)} \|x(s)\| \leq \\ & \varpi e^{-\eta(t^*-s)} \rho_1(s) \leq \rho(t^*), \end{aligned} \tag{20}$$

式(20)与假设 $\|x(t^*)\| > \rho(t^*)$ 矛盾. 因此, 可推得不等式(15)成立. 由于扰动有界, 即存在 $N_f > 0$ 使得 $\|f(t)\| \leq N_f$. 根据式(15), 系统状态有界, 且满足如下关系:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| & \leq \varpi \sup_{[t_0, t]} \rho_1(t) \leq \\ & \varpi \max\left\{\|x_0\|, \frac{2p}{r} N_f, \frac{8p\theta_1^2}{\delta_1\lambda_1} \mu N_f, \frac{8p\theta_2^2}{\delta_2\lambda_1} \nu N_f\right\}. \end{aligned}$$

定理得证. \square

注4 如注3中所述, 根据简单计算, 可得条件(14)比条件(6)保守.

注5 如注2中所述, 如果选择 $r_{\sigma(t)} > \|Q_{\sigma(t)}\|$, 则切换将成为周期切换, 而不再与系统状态有关. 显然, 此时系统在条件(14)下仍然具有鲁棒性.

根据定理2, 进一步, 可得当扰动有界且(指数)收敛时, 系统状态有界且(指数)收敛, 详细如下所述.

定理3 对于受扰系统(13), 假设定理2的条件均成立, 在切换法则(4)作用下, 当扰动有界且收敛时, 系统状态有界且收敛; 当扰动有界且指数稳定时, 系统状态有界且指数稳定.

证明 首先证明扰动有界并收敛的情况. 由定理2可知此时系统状态有界, 因此只需证明状态的收敛性.

由式(15)可知

$$\|x(t)\| \leq \rho(t) \leq \varpi \sup_{s \in [t_0, t]} \rho_1(s).$$

另外, 对于任意给定正定值 $\epsilon < N_f$, 存在时刻 $N \geq t_0$, 使得

$$\begin{aligned} \|x_0\| & \leq \frac{\epsilon}{\varpi} e^{\eta(t-t_0)}, \\ \|f(t)\| & \leq \min\left\{\frac{r}{2p}, \frac{\delta_1\lambda_1}{8p\theta_1^2\mu}, \frac{\delta_2\lambda_1}{8p\theta_2^2\nu}\right\} \frac{\epsilon}{\varpi}, \forall t \geq N. \end{aligned}$$

进一步可推得, 对于给定 ϵ , 存在 $N \geq t_0$, 满足下式:

$$\|x(t)\| \leq \rho(t) \leq \epsilon, \forall t \geq N.$$

由于 ϵ 的任意性, 可推得系统状态的收敛性.

对于扰动指数收敛的情形, 假设

$$\|f(t)\| \leq \beta e^{-\alpha(t-t_0)},$$

其中 α 和 β 为正实数. 对于任意 $\forall t \geq t_0$, 有

$$\|x(t)\| \leq \varpi M e^{-\min(\eta, \alpha)(t-t_0)},$$

其中

$$M = \max\left\{\|x_0\|, \frac{2p\beta}{r}, \frac{8p\theta_1^2\beta}{\delta_1\lambda_1\alpha}, \frac{8p\theta_2^2\beta}{\delta_2\lambda_1\alpha}\right\}.$$

因此系统状态指数稳定. \square

2.3 基于观测器的切换设计

在生产生活中, 有时系统的状态无法直接测量, 这时需通过系统的可量测输出来观测系统的状态. 本节讨论基于系统的可量测输出设计切换法则使系统镇定.

考察如下线性切换系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + f(t), \\ y(t) = C_\sigma x(t) + h(t). \end{cases} \tag{21}$$

其中: $x(t)$ 、 σ 和 $f(t)$ 与系统(13)的定义一样; $y(t) \in \mathbf{R}^q$, $h(t)$ 分别是系统可量测的输出和输出扰动; A_i , C_i ($i = 1, 2$) 是适当维数的矩阵. 本小节假设系统的状态及状态扰动不可测量.

假设4 子系统 (C_1, A_1) 和 (C_2, A_2) 都是可观测的.

由假设4, 考虑如下状态观测器:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_\sigma \hat{x} + L_\sigma [y(t) - C_\sigma \hat{x}]. \tag{22}$$

其中: $y(t)$ 和 σ 是系统(20)的输出和切换法则, L_1 , $L_2 \in \mathbf{R}^{n \times q}$ 是待定的观测器增益矩阵.

对于2.1节定义的 T_1, T_2 , 以及任意选定的常数 $\psi \in (0, 1)$, 由 (C_i, A_i) ($i = 1, 2$) 的可观性, 总可选择增益矩阵 L_1, L_2 使得

$$\|e^{(A_1 - L_1 C_1)t}\| < \psi, \forall t \in [\tau_1 + \tau_4, \tau_1 + \tau_4 + T_1], \tag{23}$$

$$\|e^{(A_2 - L_2 C_2)t}\| < \psi, \forall t \in [\tau_2 + \tau_3, \tau_2 + \tau_3 + T_2] \tag{24}$$

成立.

基于系统的状态观测器可引入如下的切换法则:

设状态观测器的初始状态为 $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$, 令

$$\sigma(t_0) = \begin{cases} 1, & \hat{x}_0^T Q_1 \hat{x}_0 \leq \hat{x}_0^T Q_2 \hat{x}_0; \\ 2, & \hat{x}_0^T Q_2 \hat{x}_0 < \hat{x}_0^T Q_1 \hat{x}_0. \end{cases} \quad (25)$$

按 2.1 节定义的正实数 r_1, r_2 , 结合式 (24) 定义的递归切换序列 $(t_k, \sigma(t_k))$ 如下:

$$t_{k+1} = \begin{cases} \min\{\inf\{t \geq t_k + \tau_4 : \hat{x}^T(t) Q_1 \hat{x}(t) > r_1 \hat{x}^T(t) \hat{x}(t)\}, t_k + \tau_4 + T_1\} + \tau_1, \\ \sigma(t_k) = 1; \\ \min\{\inf\{t \geq t_k + \tau_2 : \hat{x}^T(t) Q_2 \hat{x}(t) > r_2 \hat{x}^T(t) \hat{x}(t)\}, t_k + \tau_2 + T_2\} + \tau_3, \\ \sigma(t_k) = 2; \end{cases} \quad (26)$$

$$\sigma(t_{k+1}) = \begin{cases} 2, & \sigma(t_k) = 1; \\ 1, & \sigma(t_k) = 2. \end{cases}$$

切换法则 (26) 与切换法则 (4) 相比, 只是把状态变量 $x(t)$ 替换为状态变量 $\hat{x}(t)$. 在此切换法则下, 系统具有类似定理 2 和定理 3 的可靠鲁棒性.

定理 4 对于受扰系统 (20), 若满足假设 1~假设 4, 则在切换法则 (25) 作用下, 当 T_1, T_2 满足 (14) 时, 存在如下结论:

1) 如果扰动有界, 则系统状态和状态的观测值都有界;

2) 如果扰动有界且收敛, 则系统状态和状态的观测值都收敛;

3) 如果扰动指数收敛, 则系统状态和状态的观测值都指数收敛.

证明 定义观测器的观测值误差为

$$\tilde{x} = x - \hat{x}.$$

由式 (21) 和 (22) 可得

$$\dot{\tilde{x}} = (A_\sigma - L_\sigma C_\sigma) \tilde{x} + f(t) - L_\sigma h(t). \quad (27)$$

而由式 (22) 可得

$$\dot{\hat{x}} = A_\sigma \hat{x} + L_\sigma C_\sigma \tilde{x} + L_\sigma h(t). \quad (28)$$

式 (28) 可看作标称系统 $\dot{\hat{x}} = A_\sigma \hat{x}$ 带外部扰动 $L_\sigma C_\sigma \tilde{x}$ 和 $L_\sigma h(t)$ 的一个受扰系统. 从而, 由定理 2 和定理 3, 只需证明受扰系统 (28) 在有界 (收敛/指数收敛) 的外部扰动下, 系统状态 \hat{x} 是有界 (收敛/指数收敛) 的. 设切换法则序列为 $\{(t_0, j_0), (t_1, j_1), (t_2, j_2), \dots\}$, 其中 $j_k = \sigma(t_k)$, $k = 0, 1, \dots$. 由切换法则 (26) 可得, 任意相邻的两个切换时刻 t_k, t_{k+1} 满足

$$t_{k+1} - t_k \geq \begin{cases} \tau_1 + \tau_4, & j_k = 1; \\ \tau_2 + \tau_3, & j_k = 2. \end{cases} \quad (29)$$

设 $\beta = \min\{-\ln \psi / (\tau_1 + \tau_4), -\ln \psi / (\tau_2 + \tau_3)\}$.

由式 (23) 和 (24) 可得

$$\|e^{(A_1 - L_1 C_1)t}\| \leq e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq \tau_1 + \tau_4, \quad (30)$$

$$\|e^{(A_2 - L_2 C_2)t}\| \leq e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq \tau_2 + \tau_3. \quad (31)$$

定义矩阵函数

$$\Psi(t, \sigma) = e^{(A_{j_k} - L_{j_k} C_{j_k})(t-t_k)} \dots e^{(A_{j_0} - L_{j_0} C_{j_0})(t_1-t_0)},$$

则误差系统 (27) 的状态转移矩阵为

$$\Phi(s_1, s_2, \sigma) = \Psi(s_1, \sigma) \Psi(s_2, \sigma)^{-1}, \quad \forall s_1, s_2 > t_0.$$

从而, 误差系统 (27) 的状态为

$$\tilde{x}(t) = \Phi(t, t_0, \sigma) \tilde{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \zeta, \sigma) (f(\zeta) - L_\sigma h(\zeta)) d\zeta.$$

结合式 (29)~(31), 可得

$$\|\Phi(s_1, s_2, \sigma)\| \leq M e^{-\beta(s_1-s_2)}, \quad \forall s_1 \geq s_2 \geq t_0.$$

其中

$$\delta = \max\{\beta, \|A_1 - L_1 C_1\|, \|A_2 - L_2 C_2\|\},$$

$$M = \exp(\delta \tau), \quad \tau = \max\{\tau_1 + \tau_4, \tau_2 + \tau_3\}.$$

从而有

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq$$

$$M e^{-\beta(t-t_0)} \|\tilde{x}_0\| + M \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\zeta)} \|f(\zeta) - L_\sigma h(\zeta)\| d\zeta.$$

由此, 根据文献 [24], 可以断言如果外部扰动有界 (有界且收敛/指数收敛), 则 $\tilde{x}(t)$ 有界 (有界且收敛/指数收敛). 从而定理得证. \square

3 仿真例子

考虑文献 [22] 中的三阶线性切换系统, 其系统矩阵分别为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.1 & 1.4 & 5.9 \\ -8.0 & -5.7 & -0.2 \\ 0.6 & 5.8 & 1.6 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 & -2.8 \\ 4.8 & -5.0 & 1.1 \\ -1.0 & -6.6 & -2.1 \end{bmatrix}.$$

经过搜索可得, 当 $\tau_1 = \tau_4 = 0.10$, $\tau_2 = \tau_3 = 0.20$ 时, $e^{A_2 \tau_2} e^{A_1 \tau_1}$ 和 $e^{A_1 \tau_4} e^{A_2 \tau_3}$ Schur 稳定. 当 $\delta_1 = 0.05$, $\delta_2 = 0.15$ 时, 满足假设 2 和假设 3 的正定阵为

$$P = \begin{bmatrix} 42.2706 & -4.2976 & 18.4539 \\ -4.2976 & 24.5546 & -9.9806 \\ 18.4539 & -9.9806 & 13.0761 \end{bmatrix}.$$

在接下来的仿真中, 假设系统初始状态为

$$x_0 = [1.4435, -0.3510, 0.6232]^T.$$

首先, 当 $r_1 = 0.5, r_2 = 0.1$ 时, 在切换法则 (4) 作用下的系统状态轨线、类 Lyapunov 函数 $V(x)$ 和切换信号如图 1 所示. 显然, 类 Lyapunov 函数 $V(x)$ 在切换

法则的时间驱动和状态驱动环节都不全是严格递减的. 此时, 系统在6s内的切换次数为14, 通过与文献[15]所设计的切换法则的效果对比, 显然本文的切换频率更低. 根据注1, 在假设1和假设2下, 存在一个周期切换可使系统镇定, 在每个周期子系统 A_1 驻留0.2s, 子系统 A_2 驻留0.4s, 在6s内切换20次, 此时系统的轨线和切换信号如图2所示. 本例采用文献[22]的混合切换法则, 在 $\lambda_1 = \lambda_2 = 8, T = 0.2$ s时, 系统在6s内的切换次数为25. 若采用文献[23]的混合切换法则, 则当取 $\mu = 5, \lambda_0 = 5$ 时, 在6s内的切换次数为18. 显然本文设计的切换法则的切换频率最慢.

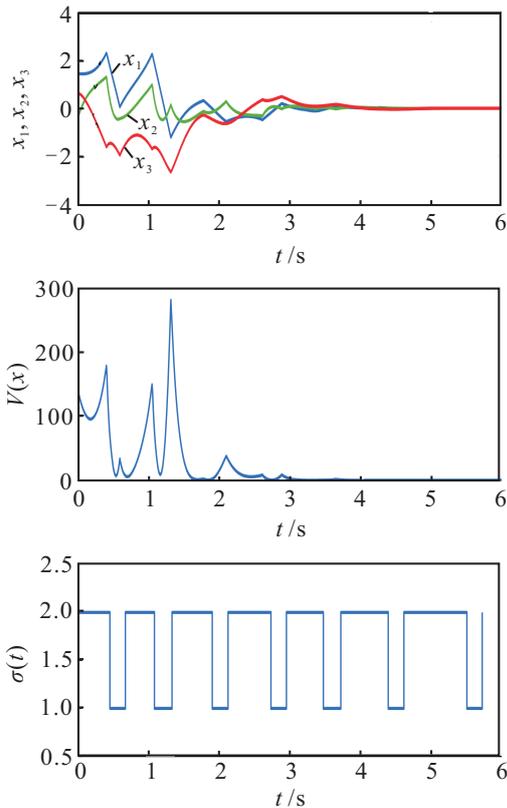


图1 切换法则(4)下的状态轨线、类Lyapunov函数和切换信号

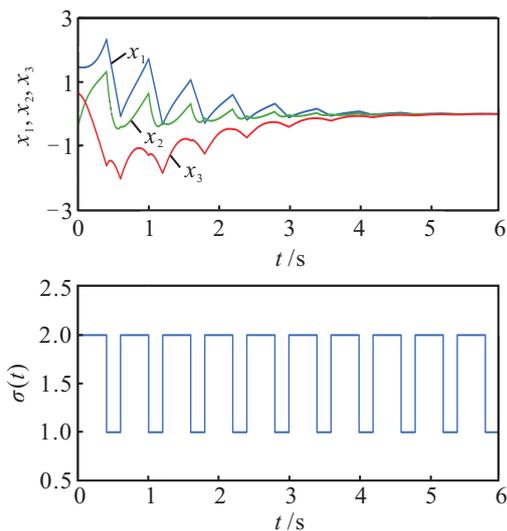


图2 周期切换信号下的状态轨线和切换信号

下面, 考察系统受外界扰动和系统状态不能直接测量的情形. 设

$$C_1 = [1, 0, 0], C_2 = [0, 1, 0].$$

对 $A_i - L_i C_i (i = 1, 2)$ 进行极点配置, 满足式(23)和(24)($\psi = 1$), 可得高增益矩阵

$$L_1 = [2993.80, 82167649.88, -18821524.19]^T,$$

$$L_2 = [28343519.91, 2993.90, -120047453.73]^T.$$

设系统观测器的初始状态为 $\hat{x} = [0, 0, 0]^T$, 系统外部扰动分别为

$$f_1 = [0.5 \sin(2t), 0.5 \operatorname{sat}(t - 1), 0.5 \operatorname{sgn}(\cos t)]^T,$$

$$f_2 = \left[0.5, \frac{t+2}{t+1}, \frac{t}{t+1} \right]^T.$$

以及 $\bar{f}_i(t) = \frac{1}{(1+t)^2} f_i(t), i = 1, 2$. 显然 f_1, f_2 有界而 \bar{f}_1, \bar{f}_2 收敛. 图3是带有界扰动 f_k 和收敛扰动 \bar{f}_k 的系统在基于观测器的切换法则(26)下的状态轨线, 与本文结论相符.

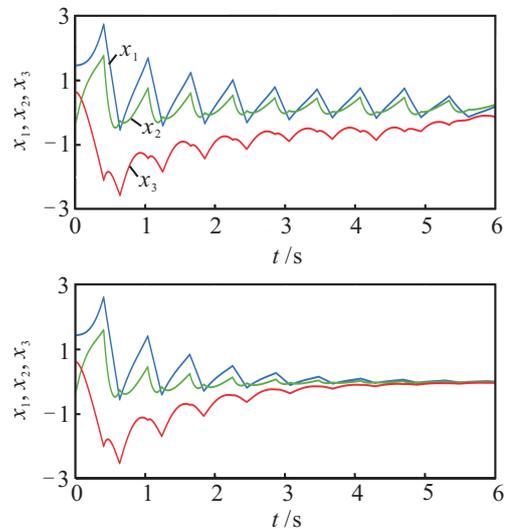


图3 带有界扰动和收敛扰动的系统(20)在切换信号(25)下的状态轨线

4 结 论

本文对含有两个不稳定子系统的线性切换系统, 基于类Lyapunov函数法设计了一种包含时间驱动和状态驱动两个环节的切换法则, 使得线性切换系统稳定. 在该切换法则下, 系统的类Lyapunov函数在两个环节都不需要严格单调递减, 有效降低了系统的切换频率. 在适当的假设条件下, 带时变扰动的线性切换系统在该切换信号下具有良好的鲁棒稳定性. 基于此, 当系统可观测时, 进一步设计了基于观测器的混合切换法则, 并实现了系统的鲁棒稳定. 最后通过数例仿真验证了切换法则的有效性.

参考文献(References)

[1] 张霞, 高岩, 夏尊铨. 切换线性系统稳定性研究进展[J].

- 控制与决策, 2010, 25(10): 1441-1450.
(Zhang X, Gao Y, Xia Z Q. Advances on stability for switched linear systems[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1441-1450.)
- [2] Sun Z, Ge S S. Analysis and synthesis of switched linear control systems[J]. Automatica, 2005, 41(2): 181-195.
- [3] 孙振东. 连续时间多线性动态系统的性能分析[J]. 控制理论与应用, 2014, 31(7): 872-877.
(Sun Z D. Performance analysis for continuous-time multilinear dynamic systems[J]. Control Theory & Applications, 2014, 31(7): 872-877.)
- [4] Liberzon D. Switching in systems and control[M]. Boston: Birkhäuser, 2003: 1-20.
- [5] Lin H, Antsaklis P J. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(2): 308-322.
- [6] Feron E. Quadratic stabilizability of switched systems via state and output feedback[R]. Cambridge: Massachusetts Institute Of Technology, 1996.
- [7] Wicks M A, Peleties P, DeCarlo R A. Switched controller design for the quadratic stabilization of a pair of unstable linear systems[J]. European J of Control, 1998, 4(2): 140-147.
- [8] Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(4): 475-482.
- [9] Peleties P, DeCarlo R A. Asymptotic stability of M-switched systems using Lyapunov functions[C]. Proc of 31st IEEE Conf on Decision and Control. Tuscon: IEEE, 1992: 3438-3439.
- [10] Pettersson S. Synthesis of switched linear systems[C]. Proc of 42nd IEEE Conf on Decision and Control. Maui: IEEE, 2003: 5283-5288.
- [11] Hu T, Lin Z. Absolute stability analysis of discrete-time systems with composite quadratic Lyapunov functions[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(6): 781-798.
- [12] Hu T, Ma L, Lin Z. Stabilization of switched systems via composite quadratic functions[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(11): 2571-2585.
- [13] Sun Z. Stabilizing switching design for switched linear systems: A state-feedback path-wise switching approach[J]. Automatica, 2009, 45(7): 1708-1714.
- [14] Wu J, Sun Z. Observer-driven switching stabilization of switched linear systems[J]. Automatica, 2013, 49(8): 2556-2560.
- [15] Sun Z. Combined stabilizing strategies for switched linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(4): 666-674.
- [16] Morse A S. Supervisory control of families of linear setpoint controllers—Part 1: Exact matching[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(10): 1413-1431.
- [17] Hespanha J P, Morse A S. Stability of switched systems with average dwell-time[C]. Proc of 38th IEEE Conf on Decision and Control. Phoenix: IEEE, 1999: 2655-2660.
- [18] Zhai G, Hu B, Yasuda K, et al. Disturbance attenuation properties of time-controlled switched systems[J]. J of Franklin Institute, 2001, 338(7): 765-779.
- [19] Zhai G, Hu B, Yasuda K, et al. Qualitative analysis of discrete-time switched systems[C]. Proc of American Control Conference. Anchorage AK: IEEE, 2002: 1880-1885.
- [20] Ishii H, Francis B A. Stabilizing a linear system by switching control with dwell time[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(12): 1962-1973.
- [21] Sun Z. A robust stabilizing law for switched linear systems[J]. Int J of Control, 2004, 77(4): 389-398.
- [22] Allerhand I L, Shaked U. Robust state-dependent switching of linear systems with dwell time[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2013, 58(4): 994-1001.
- [23] Duan C, Wu F. Analysis and control of switched linear systems via dwell-time min-switching[J]. Systems and Control Letters, 2014, 70(1): 8-16.
- [24] Khalil H K. Nonlinear systems[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1996: 339-380.

(责任编辑: 孙艺红)